GIRA POR ALGUNAS DINÁMICAS

JAIME GLARÍA B.

usm editorial

CC BY NC ND

© Jaime Glaría Bengoechea

Inscripción Nº
I.S.B.N. 978-956-7051-27-4

Primera edición
Enero de 2011

Edición
Sello Editorial USM
Unversidad Técnica Federico Santa María

Diseño
Eugenia Kähni B.

Dibujo de figuras
Soledad García O.

Impresión
CIPOD Impresión digital

~~Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, transmitida o almacenada, sea por procedimientos mecánicos, ópticos o químicos, incluídas las fotocopias, sin permiso del editor.~~

IMPRESO EN CHILE / PRINTED IN CHILE

ACKNOWLEDGEMENT (AGRADECIMIENTOS)

This book was tuned after a
substantial e-mail correspondence with
professor Arthur Jutan
of the University of Western Ontario, Canada,
promoted by
professor Graham Goodwin
of the University of Newcastle, Australia.

Thanks a lot,
Arthur and Graham.

CC BY NC ND

BY NC ND

1.0
INICIO

Las ingenierías son oficios centrados en las técnicas. Y las técnicas son conocimientos formados para actuar en la realidad con destreza, variándola directa o indirectamente y prediciendo en lo posible lo que va a ocurrir.

Las predicciones mejores son, principalmente, labores de animación donde el realismo de cada escena depende de la sensatez de las cuentas en las escenas anteriores.

Este libro acomete provincianamente las predicciones de esa especie, en una diversidad de casos que pretende abarcar buena parte de los logros de la Europa occidental de los siglos 17, 18 y 19, al respecto.

Es un libro pretencioso; y majadero.

Para variar diestramente la realidad, hay que saber qué cosas obedecen a la voluntad, qué otras dependen de ellas y así sucesivamente, hasta saber cómo someter las cosas que interesa dominando a las que las dominan.

El problema está en que las obediencias, las dependencias, los sometimientos y las dominaciones hablan de una causalidad doméstica que quedó maltrecha en los logros sugeridos recién, y que se desprecia al amparo de esos logros, exagerando la diversidad de casos con esplendores centrífugos que, por cierto, se venden y compran.

Tal exageración y tal comercio tienen una ventaja: mantienen ocupados a muchos seres humanos.

El libro presente es majadero, entre otros aspectos, por su insistencia en negarse a la ventaja, en pretender una compensación centrípeta, y en repetir que la causalidad es bastante más que la ruina dejada por su maltrato.

Por si esto fuese demasiado tenue, valga una reseña apretada de lo que se logra con semejante majadería.

Reiteradamente, el libro usa estructuras espaciales, taxonómicas, causales y temporales para hacer predicciones de la especie anunciada arriba. Cada estructura causal coincide con un planteamiento de ecuaciones. El planteamiento empieza con la identificación de las variables de interés y con la formulación de cómo depende cada una de otras, o, equivalentemente, cómo es dominada por ellas. Enseguida y recurrentemente, el planteamiento continúa con la identificación de las variables nuevas que dominan a otras antiguas en las fórmulas ya establecidas y, por orden de identificación, con la formulación de cómo se comporta cada una independientemente o dependiendo de otras antiguas, nuevas o aún más nuevas. Por fin, el planteamiento cesa con el reconocimiento de que no hay más variables dominantes nuevas por identificar. Así da ecuaciones necesarias y suficientes con pocas vacilaciones y pocas maniobras algebraicas. Además, completa estructuras causales con retardos en todas las dependencias mutuas. Gracias a ello, hace fácil estructurar programas de computación, a posteriori. Y ayuda a maniobrar algebraicamente, también a posteriori, para lograr, por ejemplo, algunas ecuaciones diferenciales en resumen.

Eso concilia las ecuaciones y los discursos austera y ordenadamente; asemeja los casos; con un poco de suerte, tranquiliza el entendimiento de manera que las enmiendas, inevitables, se hacen sin espanto cuando hay que hacerlas; y forma conocimientos técnicos en concordancia con las declaraciones iniciales.

CC BY NC ND

2.0
PREMISAS [1]

Bajemos.

En la formación de conocimientos es habitual que seleccionemos, que prefiramos algunas cosas entre las conocidas (o, en contra, que las despreciemos). No se trata de una selección burda: tiene una multitud de grados entre lo atendido, que es plural, y lo desatendido, que también lo es; tampoco se trata de una selección quieta: desprecia lo considerado a medias antes, prefiere lo desatendido recién, varía insistentemente. Además, es habitual que asociemos, que hermanemos unas cosas conocidas con otras (o, en contra, que las divorciemos). No se trata de una asociación torpe: tiene muchas tonalidades entre lo unido, plural, y lo separado, plural también; tampoco se trata de una asociación rígida: varía juntando y separando una y otra vez.

La asociación se ayuda con lo que la selección deja, de momento, en niveles de menor interés que las cosas reunidas. La selección se agarra de lo que la asociación usa como trabazón más sólida.

Llamamos "elemento" ("componente", "pieza", "unidad") a lo que queremos como singular y protagónico en el conocimiento, con una selección; "relación" ("conexión", "correspondencia", "enlace", "nexo", "vínculo") a lo que queremos como pretexto para asociar y seleccionar; y "estructura" ("organización", "sistema") a lo que queremos como plural y enlazado, con una asociación de lo seleccionado.

Como la selección y la asociación obedecen a la voluntad de quien conoce, las relaciones podrán ser elementos o estructuras cuando éste lo decida, los elementos podrán ser estructuras o relaciones, y las estructuras podrán ser relaciones o elementos

Comúnmente, representamos a los elementos dibujando líneas cerradas, a las relaciones mediante líneas simples o compuestas, y a las estructuras juntando las representaciones de los elementos mediante líneas no cerradas, como en la figura 1.

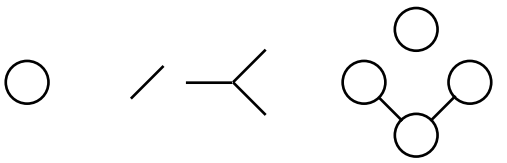


Fig. 1: Un elemento (en el lado izquierdo), dos relaciones (en el centro) y una estructura (en el lado derecho)

Si no ponemos algún rigor en los dibujos, las representaciones naufragan; pero, como la voluntad exige vivacidad a la conciencia, hay que darse algunas libertades, como la de dibujar unos diagramas delante de otros para mostrar algunas etapas en las variaciones de punto de vista, según el ejemplo de la figura 2.

[1] Recorte de: J. Glaría, 2009, *Un viaje a la ingeniería, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso*. El recorte ha sufrido cambio de "," por "." entre partes enteras y decimales, cambio de "Δt" por "dt", y, en expresiones como "dt" y "X_0", cambio de letras regulares por letras cursivas.

BY NC ND

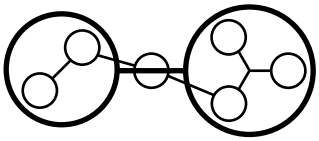


Fig. 2: Una variación de punto de vista

Entonces, nuestro afán selectivo pide que segmentemos el tiempo de las variaciones en etapas, y que dibujemos las representaciones respectivas usando recursos, como colores o grosores de línea diferentes, donde distinguir las representaciones y notar las etapas. Por otro lado, nuestro afán asociativo pide que la segmentación del tiempo no sea dislocada, sino considerando las transiciones entre unas etapas y otras, y que los recursos con los cuales distinguimos las etapas reflejen esas transiciones; por ejemplo, que los grosores de línea nos den sensaciones de hondura adecuadas, como si se tratase de un hundimiento de recuerdos en la memoria.

Si el dibujo se enreda demasiado, en vez de mostrar unas etapas delante de otras, podemos dibujarlas al lado agregando algún recurso para representar a las transiciones. Entonces nos surgen con claridad las estructuras temporales.

Llamamos "etapa" ("época", "era", "estadio", "momento", "ocasión", "temporada", "vez") a una parte del tiempo que queremos como elemento de una estructura temporal; y "transición" ("mudanza", "mutación", "renovación") a una parte del tiempo que queremos como relación orientada de una etapa a otra, con "antes" para unas etapas y "después" para otras.

Para declarar "antes" y "después", nos conviene representar a las transiciones mediante líneas con puntas de flechas, apuntando para después, a cuando las flechas se clavan. La figura 3 es un ejemplo tomado de la 2.

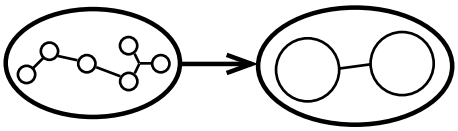


Fig. 3: Una estructura temporal de dos etapas y una transición entre ellas (la etapa izquierda antes, y la derecha después)

Llamamos "secuencia" ("serie", "sucesión") a una estructura temporal cuyos elementos son etapas y cuyas relaciones son transiciones entre pares de etapas; en particular, a cualquiera con una primera etapa antes por una transición que es la única para esa etapa; si quedan varias etapas más, con una segunda después por esa transición y antes por otra, que es la única adicional para esa etapa; si aún quedan etapas, con una tercera después por esa transición y antes por otra más, que es la única adicional para esa etapa; y, así, al fin, con una última etapa después por una transición que es la única para esa etapa.

No todas las estructuras temporales son secuencias: dejan de serlo apenas se quita la restricción de que las transiciones sean sólo entre pares de etapas, por ejemplo. Al leer, contar o cantar ocurre esto último cuando se dispone, no de una voz sola, en singular, sino de un coro, en plural.

Y no todas las estructuras son temporales: también hay, por ejemplo, estructuras espaciales.

Llamamos "recinto" ("comarca", "región", "sector", "sitio", "zona") a una parte del espacio que queremos como elemento; y "pasada" ("acceso", "vía") a una

CC BY NC ND

parte del espacio que queremos como relación entre recintos. Así podemos representar un plano arquitectónico en un diagrama como el de la figura 4.

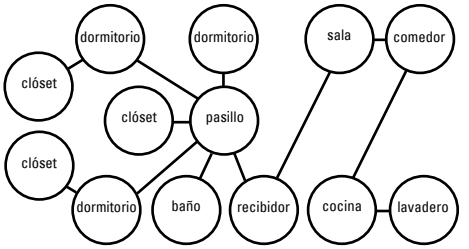


Fig. 4: Una estructura espacial de trece recintos y trece pasadas

Llamamos "viaje" ("desplazamiento", "migración", "recorrido", "traslado", "trayecto") a una estructura espacial de recintos y pasadas y, conjuntamente, a una estructura temporal de etapas y transiciones por la estructura espacial o por parte de ésta. La estructura espacial puede apoderarse del sustantivo "viaje" confundiendo las pasadas y las transiciones; pero la estructura temporal pone los adverbios "antes" y "después" con las transiciones, haciendo diferentes las entradas y las salidas, las idas y los regresos.

Para un viajero suficientemente singular, las transiciones son entre pares de etapas y, a la postre, las estructuras temporales de sus viajes son secuencias; pero tal restricción se desvanece apenas disponemos de viajantes más plurales, que pueden derramarse por varias pasadas a la vez.

También hay estructuras taxonómicas.

Llamamos "diferencia" ("disimilitud", "disparidad", "distinción") a una advertencia de no confundir, de no intercambiar lo conocido; y "parecido" ("semejanza", "similitud") a un permiso de confusión o de intercambio impune.

Llamamos "especie" ("categoría", "clase", "tipo") a una estructura taxonómica que componemos de elementos relacionados por un parecido y, consecuentemente, con algún permiso de confusión. Así hacemos la especie de los roedores, por un lado, y la de los cánidos, por otro, como en la figura 5.

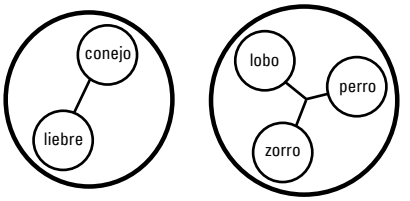


Fig. 5: Dos especies (una de dos elementos y un parecido, y otra de tres elementos y un parecido)

A veces reconocemos el parecido en que fundamos la especie sólo después de descubrir un parecido entre cada par de elementos, y de variar el punto de vista hasta tomar el enjambre de relaciones de todos con todos como una sola relación.

Llamamos "conversión" ("metamorfosis", "transformación", "transmutación") a una estructura taxonómica que consideramos parecida a una espacial, con especies parecidas a recintos y algo como pasadas, y, conjuntamente, a una estructura temporal de etapas y transiciones por la estructura taxonómico-espacial o por parte de ella. La estructura temporal pone los adverbios "antes" y "después" en las conversiones, como hace en los viajes.

BY NC ND

Tal anotación está emparentada con la factibilidad, por lo menos hipotética, de colocar los elementos de las especies (taxonómicas) diferentes en recintos (espaciales) separados (suponiendo un recinto por cada especie y, si se quiere el complemento, una especie por cada recinto), y de ir pasando dichos elementos de unos recintos a otros según las conversiones y con los cuidados pertinentes en los viajes.

Variando el punto de vista, podemos convertir una estructura en un elemento nuevo.

Para la variación no necesitamos, entre los elementos viejos, relaciones de una especie particular (por ejemplo, parecidos) ni enjambres de relaciones. La variación puede surgir con unas pocas relaciones ralas y antojadizas.

Llamamos "conjunto" ("agregado", "conglomerado", "cúmulo", "grupo") a una estructura que hemos compuesto de elementos relacionados secretamente y que, variando el punto de vista, queremos entera como un elemento nuevo. Existe una conjunción para ayudarnos en esto: "y" nos pide que hagamos un conjunto con todos los elementos sugeridos en su rededor, sin relaciones explícitas entre ellos; es decir, que tomemos todos los elementos sugeridos en uno nuevo.

Pero en vez de pedir que hagamos un conjunto con todos los elementos sugeridos, podemos pedir que lo hagamos con algunos. Existe otra conjunción para este oficio: "o" nos pide que hagamos un conjunto transitorio con todos los elementos sugeridos alrededor, sin relaciones explícitas entre ellos, y que enseguida seleccionemos alguno(s) de los elementos de ese conjunto como elemento nuevo; esto es, nos pide que tomemos algunos de los elementos sugeridos en uno nuevo. Tal conjunción suele tener implícitas algunas suposiciones dependientes del contexto. Por ejemplo, a veces nos pide que en el elemento nuevo haya un elemento único del conjunto transitorio, y ninguno ajeno a ese conjunto; otras veces nos pide que haya a lo menos un elemento del conjunto transitorio, aceptando que haya más: hasta todos los del conjunto pero ninguno ajeno; en otras ocasiones, nos pide que haya a lo más uno de los elementos del conjunto transitorio, aceptando que no haya ninguno. Muy mayoritariamente, lo que nos pide es lo primero: que haya un elemento único y que no sea ajeno al conjunto transitorio.

En particular, hay un sustantivo para lo planteado por la conjunción "o" en esa petición mayoritaria: llamamos "disyuntiva" a una estructura que hemos compuesto de elementos relacionados secretamente, de la cual queremos elegir un elemento único como elemento nuevo, descartando el resto, con una variación arbitraria de la selección.

Usando las conjunciones "y" y "o" combinadas con signos de puntuación domésticos, podemos plantear diversas situaciones y pedir variaciones de punto de vista para ellas. Así queda a nuestro alcance presentar, por ejemplo, un conjunto de disyuntivas, o una disyuntiva de conjuntos.

Lo interesante aquí es que un conjunto de d disyuntivas con e_1, e_2,... y e_d elementos respectivamente, se parece mucho a una disyuntiva de $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots e_d$ conjuntos con d elementos cada uno.

Hay que reconocer que con las conjunciones "y" y "o" podemos construir expresiones perversas, y la puntuación puede flaquear ante esa perversidad. Por eso hay otras palabras que refuerzan las expresiones: el adverbio "no" nos pide poner fuera del elemento nuevo un elemento presente que pudiéramos colar dentro, equivocada o maliciosamente, cuando la mera puntuación flaquea; y la conjunción "ni" nos pide poner fuera varios elementos presentes que pudiéramos colar de manera parecida.

La selección puede asentarse calmosamente en toda una estructura de elementos relacionados por parecidos. Sin embargo, como los elementos que se parecen

CC BY NC ND

también se diferencian, la selección puede pararse intranquilamente en alguno de los elementos originales: podemos mirarlos todos en conjunto; pero tendemos a mirarlos de a uno disyuntivamente, y a reconocer en la trama de parecidos y diferencias la variación de un mismo ser por estados distintos.

Llamamos "variable" a una estructura de elementos relacionados por parecidos y diferencias, en la que permitimos confundir todos los elementos con alguna calma y distinguir alguno con alguna intranquilidad. Con el sustantivo "identidad" aludimos a los parecidos entre los elementos de una variable que permiten confundir calmosamente tales elementos como un mismo ser, como lo mismo, a pesar de las diferencias. Y llamamos "estado" a cada elemento original de una variable en que la selección puede pararse inquietamente porque hay otros diferentes, a pesar de los parecidos.

El tema es complicado. Un problema es decidir hasta dónde pueden ralearse los parecidos que sostienen la identidad de una variable, y dónde empiezan las diferencias a centrifugar los estados, desintegrando la variable. No hay solución hecha para eso. Otro problema es decidir si la variación de una variable pertenece a la voluntad de quien se forma un conocimiento parando inquietamente la selección, o a la realidad que le es ajena. Tampoco hay solución hecha; sin embargo, los parecidos y diferencias se extienden desde los recuerdos hasta las percepciones; así, la variación de una variable abarca tanto el mundo propio de quien se forma el conocimiento, como el que le es ajeno; si las percepciones directas sobrepasan en preferencia a los recuerdos, podemos creer que la variación de la variable pertenece a la realidad ajena más que a la voluntad propia; si no, podemos creer lo contrario.

Una vez que los parecidos y diferencias subyacentes permiten identificar una variable como *x* y distinguir sus estados como 1 o 2, por ejemplo, podemos revelar el carácter de la variable describiendo, con una disyuntiva de descripciones elementales, "*x* varía a 1 o *x* varía a 2" (donde "variar a un estado" no niega "permanecer en él"), o, abreviando suavemente, "*x* varía a 1 o a 2"; en vez de ello, podemos revelar su carácter pidiendo, con una disyuntiva de peticiones elementales: "varíe *x* a 1 o a 2". La descripción es mejor si la variación de *x* pertenece a la realidad ajena; pero la petición es mejor si la variación pertenece a la voluntad del interlocutor, y por ello resulta más atrayente cuando se apunta a la acción voluntaria. Vamos a apegarnos un poco más a las peticiones y, si las variaciones aludidas pertenecen a la realidad más que a la voluntad, vamos a considerar tales peticiones como libretos para representar a las variables, poniéndolas en escena. Así, "varíe *x* a 1 o a 2" pedirá al interlocutor que, en su mundo propio y aunque sea en ficción, se encargue del alma de la variabilidad, que la anime, cumpliendo inquietamente una de las peticiones elementales.

Parecidamente, una vez identificadas dos variables como *x* e *y*, y distinguidos sus estados respectivos como 1 o 2 y como 3, 4 o 5, por ejemplo, podemos revelar el carácter del conjunto de las dos variables pidiendo, con un conjunto de dos disyuntivas de peticiones elementales: "varíe *x* a 1 o a 2; e *y* a 3, a 4 o a 5".

Esa última expresión se parece mucho a una disyuntiva de seis conjuntos de peticiones elementales: "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o *x* a 1 e *y* a 4; o *x* a 1 e *y* a 5; o *x* a 2 e *y* a 3; o *x* a 2 e *y* a 4; o *x* a 2 e *y* a 5".

Con "varíe *x* a 1 o a 2; e *y* a 3, a 4 o a 5" o, parecidamente, "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o *x* a 1 e *y* a 4; o *x* a 1 e *y* a 5; o *x* a 2 e *y* a 3; o *x* a 2 e *y* a 4; o *x* a 2 e *y* a 5", se nos otorga una independencia mutua entre las variaciones de *x* e *y*: seleccionando "varíe *x* a 1" en la primera disyuntiva, la segunda nos pide "varíe *y* a 3, a 4 o a 5"; seleccionando "varíe *x* a 2" en la primera, la segunda nos sigue pidiendo "varíe *y* a 3, a 4 o a 5"; seleccionando "varíe *y* a 3" en la segunda disyuntiva, la primera

BY NC ND

nos pide "varíe *x* a 1 o a 2"; seleccionando "varíe *y* a 4" en la segunda, la primera también nos pide "varíe *x* a 1 o a 2"; y, seleccionando "varíe *y* a 5" en la segunda, la primera nos sigue pidiendo "varíe *x* a 1 o a 2".

Supongamos alguna negación en el libreto; por ejemplo: "varíe *x* a 1 o a 2; e *y* a 3, a 4 o a 5; pero no varíe conjuntamente *x* a 2 e *y* a 5", esto es, de manera parecida, "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o *x* a 1 e *y* a 4; o *x* a 1 e *y* a 5; o *x* a 2 e *y* a 3; o *x* a 2 e *y* a 4". Seleccionando "varíe *x* a 1" en la primera disyuntiva, la segunda nos pide "varíe *y* a 3, a 4 o a 5"; pero seleccionando "varíe *x* a 2" en la primera, la segunda se nos reduce a "varíe *y* a 3 o a 4". Entonces, falta la independencia mutua entre las variaciones.

Para un conjunto de *v* variables con e_1, e_2,... y e_v estados diferentes cada una, respectivamente, la frase "independencia mutua" ("autonomía mutua", "libertad mutua") señala que el conjunto puede ser planteado como un conjunto de *v* disyuntivas con e_1, e_2,... y e_v peticiones elementales cada una, respectivamente, y también como una disyuntiva de $e_1 \cdot e_2 \cdot ... e_v$ conjuntos con *v* peticiones elementales cada uno. La independencia mutua falta cuando la última disyuntiva es reducida con alguna negación a menos que $e_1 \cdot e_2 \cdot ... e_v$ conjuntos con *v* peticiones elementales cada uno.

Podemos emplear las independencias mutuas como relaciones entre variables; pero a menudo hacemos lo contrario: usamos las faltas de independencias mutuas. Más: en el ámbito técnico, las relaciones claves entre las variables son las faltas de independencias mutuas de una especie... especial: las dependencias o, dicho inversamente, las dominaciones.

Las ideas de dependencia y dominación van con un cúmulo de sustantivos: "dependencia", "obediencia", "subordinación", "sujeción", "sometimiento", "contención", "represión", "subyugación", "avasallamiento", "dominación", "dominio", "señorío", "autoridad", "mando", "imperio", "potestad", "poder". Este cúmulo parte de la idea de falta de independencia mutua y exige algo más. "Dependencia" y "dominación" nombran a una falta de independencia mutua entre variables, aparejada con un supuesto que añadimos al de reducción característica de esas faltas, y que hace diferentes a las variables relacionadas: con el supuesto de que unas variables dominan con la reducción, pero otras dependen con ella; que unas mandan y las otras obedecen; que unas estimulan y las otras responden; que unas son causas y las otras, efectos.

Para insinuar mandatos y obediencias, nos conviene agregar puntas de flechas a las relaciones, como en la figura 6, apuntando a quien someten las flechas.

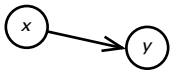


Fig. 6: Una estructura causal de dos variables (*x* e *y*) y una dependencia (*x* dominando e *y* dependiendo)

Pero el criterio para decidir hacia qué lado va la dependencia, no es evidente.

Podemos afirmarnos en una creencia: no son dominantes las variables cuyas variaciones percibimos que ocurren después. Esa creencia hace perentoria la presencia de la realidad ajena pues, por sí mismas, las peticiones como "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o *x* a 1 e *y* a 4; o *x* a 1 e *y* a 5; o *x* a 2 e *y* a 3; o *x* a 2 e *y* a 4" no ponen "después" entre las variables. Además, es algo suelta por sí sola: a veces no nos deja dictaminar qué variables que varían después son dependientes de qué otras; por ejemplo, las dos estructuras de la figura 7 nos resultan indistinguibles si en la izquierda *x* obedece a *z* con algún retardo e *y* obedece a *x* con un retardo parecido, mientras en la derecha *x* obedece a *z* con el mismo retardo e *y* obedece a *z* con un retardo doble; y la confusión es peor si las variaciones se hacen cíclicas o se detienen, porque entonces se torna difícil notar qué ocurre después y qué, antes.

CC BY NC ND

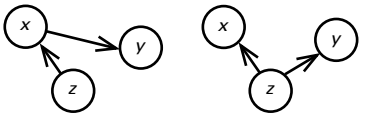


Fig. 7: Dos estructuras causales de tres variables (*x*, *y* y *z*) y dos dependencias (*z* dominando, *x* dependiendo y dominando, o dependiendo, e *y* dependiendo)

Antes de buscar otro criterio para orientar con más nitidez las dependencias, nos conviene preguntarnos (causalmente) por qué insistir en tal orientación. La respuesta técnica es ésta: porque, para variar diestramente la realidad, hay que saber qué cosas obedecen a la voluntad, qué otras dependen de ellas y así sucesivamente, hasta saber cómo someter las cosas que interesa dominando a las que las dominan. Y ahí está la clave.

Podemos decidir la orientación imponiendo estados voluntariamente en las presuntas variables dominantes, y observando si las supuestas variables dependientes adoptan los estados correspondientes, o no. Si los adoptan, entendemos que las presuntas variables dominantes sí son dominantes; si no, estimamos que no lo son.

Es justo confesar algunos recelos. Muchas variables son difíciles de alcanzar para imponerles estados a voluntad, y sólo las podemos percibir. Otras son difíciles hasta de percibir. Además, para creer que imponemos estados en algunas variables de la realidad, debemos creer que las dominamos. ¿Con qué criterio decidimos eso?

Si intentamos decidirlo imponiendo estados en nuestra voluntad y observando acaso una variable de la realidad adopta los estados correspondientes, nos rebota la pregunta: ¿con qué criterio decidimos que imponemos estados en nuestra propia voluntad? Nos queda el criterio anterior: podemos percibir que variamos a querer una variación de la variable antes, y que la variación se hace efectiva después, de manera que la variable no domina a la voluntad en el episodio. El criterio de que no domina quien varía después, complementa al de la imposición de estados.

Aún así, debemos aceptar que la parálisis, el dolor y el cansancio pueden dominarnos, suponiendo que las dependencias por las cuales nos dominan ahí son otras que aquellas por las que dominamos más arriba: que unas son provistas por los sentidos y las otras, por los músculos.

Lo temible es que las enfermedades y la muerte las amenazan a todas, desde la realidad. En retorno, amenazamos a la realidad: al imponer estados, ¿podemos asegurar que no variamos las dependencias?

La esperanza es que las variables dominan y dependen por dependencias diferentes, y que la restricción de estados en algunas variables puede variar las dependencias por las cuales esas variables dependen, sin variar las dependencias por las cuales dominan. Así podemos aspirar a variar diestramente la realidad: las variables reales que dependen de la voluntad propia por unas dependencias y dominan a otras por otras dependencias que persisten, permiten someter las cosas que interesan dominando a las que las dominan, y predecir lo que va a ocurrir usando el conocimiento de esas dependencias persistentes.

De todas maneras, la situación merece pensarse porque avisa que hay dependencias variables y, a la postre, que, con una variación en el punto de vista, podemos tomar las relaciones de dependencia como elementos variables, dependientes de otras variables. Como ilustración, en la figura 8 hay una dependencia que relaciona una variable dominante *x* con otra dependiente *y*, y, en otro punto de vista, la dependencia misma es variable y depende de una variable dominante z.

BY NC ND

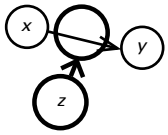


Fig. 8: Dependencia variable (entre *x* e *y*) y dependiente (de *z*)

Mirando con más distancia, en la estructura de la figura 8 *y* queda dependiendo tanto de *z* como de *x*, según la estructura de la figura 9.

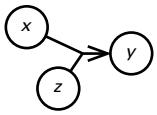


Fig. 9: Una estructura causal de tres variables (*x, y* y *z*) y una dependencia (*x* y *z* dominando, e *y* dependiendo)

Una dependencia puede relacionar a más que dos variables.

La figura 10 muestra un caso más complejo, de una dependencia que relaciona a cuatro variables: dos dominantes y dos dependientes. Este caso merece un comentario.

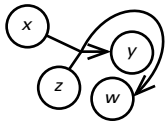


Fig. 10: Cuatro variables (*w, x, y* y *z*) y una dependencia (*x* y *z* dominando, y *w* e *y* dependiendo)

El comentario es que podemos interpretar la dependencia de la figura 10 como un conjunto de dos dependencias: una para cada variable dependiente. Podría ser, por ejemplo y como ilustra la figura 11, que tanto *y* como *w* dependan de *x* y *z*; o, más simplemente, que *w* dependa de *y* y ésta dependa de *z* y *x*; o, más complejamente, que *w* dependa de *z*, *x* e *y*, y que ésta dependa de *z* y *x*; o, aún más complejamente, que *w* dependa de *z*, *x* e *y*, y que ésta dependa de *z, x* y *w*.

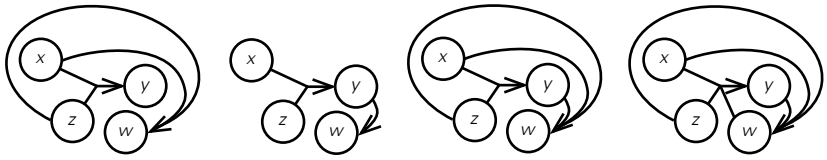


Fig. 11: Cuatro estructuras causales de cuatro variables (*w, x, y* y *z*) y dos dependencias (*x* y *z* dominando, y *w* e *y* dependiendo, o dependiendo y dominando)

Al parecer, cada vez que hay una dependencia para varias variables dependientes, podemos interpretar que esa dependencia es un conjunto de varias dependencias: una para cada variable dependiente.

Para rematar un poco mejor el tema de la orientación de las dependencias, agreguemos lo siguiente: no es cuerda ninguna estructura causal en la que una variable parece depender por dos o más dependencias diferentes, porque los estados impuestos en dicha variable por las dominantes serían contradictorios fácilmente y sin otro remedio que el rompimiento de todas esas dependencias, la persistencia de una, alguna variación que combine varias o alguna que las combine todas.

CC BY NC ND

Resumiendo: hasta más adelante, supondremos que la orientación de las dependencias se va zanjando con el criterio de la imposición voluntaria de estados, complementado con que ninguna variable depende por dos o más dependencias diferentes y con que ninguna variable domina variando después.

Ahora, vamos a abreviar los libretos.

Volvamos, por ejemplo, a la expresión "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o *x* a 1 e *y* a 4; o *x* a 1 e *y* a 5; o *x* a 2 e *y* a 3; o *x* a 2 e *y* a 4; o *x* a 2 e *y* a 5", que ya incorpora las abreviaturas suaves. Todavía le podemos incorporar otras abreviaturas parecidas, como la supresión de la conjunción "o" hasta el final. En complemento, le podemos entremeter el adverbio "respectivamente": la podemos expresar como "varíe *x* e *y* a 1 y 3, a 1 y 4, a 1 y 5, a 2 y 3, a 2 y 4, o a 2 y 5, respectivamente". Pese a la intromisión, esta segunda expresión elimina repeticiones y resulta un poco más breve que la primera. Si la primera hubiese sido más larga, las eliminaciones habrían compensado con creces al entremetimiento: habríamos abreviado bastante. Y eso ocurre a menudo.

Pero el adverbio "respectivamente" exige una variación importante en el punto de vista: pide pensar en secuencias, no en meros conjuntos. En la segunda expresión del párrafo anterior, por ejemplo, ya no se trata de "*x* e y", "1 y 3", "1 y 4" y demás, a secas; se trata de una secuencia con *x* antes e *y* después, de otra con 1 antes y 3 después, de otra con 1 antes y 4 después, y así sucesivamente. Cada una pone deliberadamente un elemento antes y otro después, de manera que se nos haga fácil asociar *x* con 1 o *x* con 2, por el lado de los elementos puestos antes, e *y* con 3, *y* con 4 o *y* con 5, por el lado de los puestos después. "Varíe *x* e *y* a 1 y 3, a 1 y 4, a 1 y 5, a 2 y 3, a 2 y 4, o a 2 y 5, respectivamente", es en el fondo "varíe *x* antes e *y* después a 1 antes y 3 después, a 1 antes y 4 después, a 1 antes y 5 después, a 2 antes y 3 después, a 2 antes y 4 después, o a 2 antes y 5 después".

Por cierto, esta secuenciación de expresiones exigida por el adverbio "respectivamente", no tiene obligación de coincidir con una secuenciación en la realidad ajena ni con una orientación de dependencias en esa realidad; pero tampoco tiene obligación de oponerse. De hecho, si tratamos de representar a una dependencia con una orientación real y conocida, nos conviene hacer la secuenciación exigida por el adverbio de manera que los elementos últimos (los derechos, en la escritura occidental) sean para la variable dependiente y sus estados, porque eso coincide con el criterio de que no domina quien varía después. Sin embargo, no conviene sobrevalorar la coincidencia porque, si en la dependencia hay dos o más variables dominantes de la dependiente pero independientes entre sí, el adverbio exige secuenciarlas también a ellas y sus estados. Por lo demás, ante una expresión como "varíe *x* e *y* a 1 y 3, a 1 y 4, a 1 y 5, a 2 y 3, a 2 y 4, o a 2 y 5, respectivamente", es el interlocutor quien tiene que hacer todas las variaciones.

Pues bien, podemos tratar la secuenciación de expresiones exigidas por el adverbio "respectivamente" apelando a que la manera occidental de leer supone después lo que va a la derecha, secuencialmente. Como la secuenciación exigida por el adverbio es válida por pedazos, podemos despedazar la apelación a suponer después lo que va a la derecha, saltando en la escritura de un renglón a otro cuando necesitemos saltar en la expresión de un pedazo secuenciado a otro. Tal propuesta no es nueva: para abreviar las representaciones de independencias mutuas, faltas de independencias mutuas y dependencias entre variables, durante milenios se ha escrito tablas. "Varíe *x* e *y* a 1 y 3, a 1 y 4, a 1 y 5, a 2 y 3, a 2 y 4, o a 2 y 5, respectivamente", por ejemplo, se abrevia según la tabla de la figura 12 (u otra parecida).

x	*y*
1	3
1	4
1	5
2	3
2	4
2	5

Fig. 12: Una tabla

CC BY NC ND

La figura 13 termina de dar la clave: los renglones de la tabla de la figura 12 son como escenas para los mismos actores (*x* e *y*) en varias actitudes alternativas (1 o 2 en el caso de *x*; 3, 4 o 5 en el de *y*).

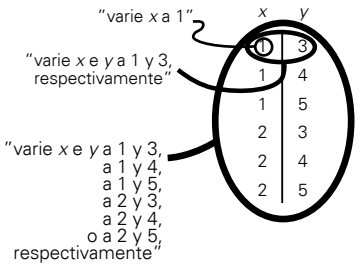


Fig. 13: Clave

Cuando las tablas se refieren a independencias mutuas, faltas de independencias mutuas o dependencias entre más variables, tienden a ocupar muchos renglones; es el caso, por ejemplo, de las tablas que representan a la falta de independencia mutua entre las longitudes de los lados de un rectángulo y el área correspondiente: las tablas para multiplicar, que aportan una solución radical.

Para determinar rudimentariamente las áreas de los rectángulos y las longitudes de sus lados, marcamos éstos a intervalos regulares y cuadriculamos aquéllas según las marcas. Contando los intervalos establecemos las longitudes, y contando los cuadrados establecemos las áreas. Si contamos según la manera occidental de leer, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, resulta bastante cuerdo anotar los totales en los extremos derechos inferiores, al final de las cuentas. Y si repetimos lo anterior para varios rectángulos superpuestos, el resultado muestra el aspecto de la tabla para multiplicar de la figura 14, donde las longitudes han sido omitidas por pereza, aprovechando que coinciden con las primeras áreas.

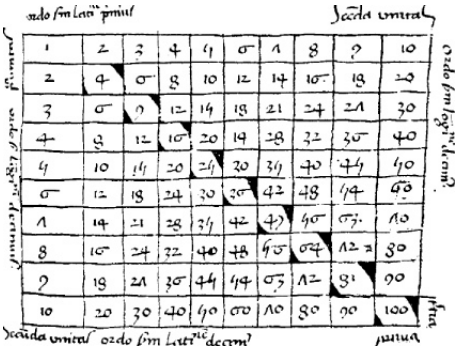


Fig. 14: Tabla para multiplicar europea de fines del siglo 15

La falta de independencia mutua queda de manifiesto en forma apretada: los estados de una longitud se ubican en el borde superior, de izquierda a derecha; los de la otra longitud se ubican en el izquierdo, de arriba hacia abajo; y los del área se ubican dentro del rectángulo, bajo los de la primera longitud, en la columna correspondiente, y al lado de los que interesan de la otra longitud, en el renglón adecuado.

Las tablas con esa fisonomía han sido generalizadas para representar a otras faltas de independencias mutuas (entre tres o más variables).

Intercambiando ubicaciones, "varíe *x* a 1 e *y* a 3" nos pide lo mismo que "varíe *y* a 3 y *x* a 1"; además, "varíe *x* a 1 e *y* a 3; o varíe *x* a 1 e *y* a 4;..." nos pide lo mismo que "varíe *x* a 1 e *y* a 4; o varíe *x* a 1 e *y* a 3;...". Por consiguiente, hay varias secuen-

CC BY NC ND

ciaciones posibles para abreviar la representación de una independencia mutua, una falta de independencia mutua o una dependencia, y la tabla correspondiente se puede escribir de varias maneras.

Aquí debemos dejar constancia que, para la escritura de una tabla correspondiente a una dependencia con orientación conocida, existe una manera convenida: la columna derecha (la última en la tradición occidental), si la tabla se parece a la figura 12, o el interior del rectángulo, si se parece a la figura 14, debe dedicarse a la variable dependiente.

Una labor de siglos indujo tablas para sumar, restar, multiplicar y dividir imposibles de escribir completas. Por esa imposibilidad surgieron maneras de formarlas a pedido, y de pedirlas con fórmulas.

Actualmente, damos por sabidos: una tabla parcial para sumar (donde el "o" implícito pide un renglón único pero que puede ser ajeno a la tabla); un método para completarla (con renglones agregables); y el símbolo "+", que pide formar lo que se necesite para sumar, mediante esa tabla parcial y ese método. Para hacer presentes las variables hay varios convenios. Una vez identificadas las tres variables involucradas, digamos *x, z* e *y*, la fórmula para sumar es con una de las primeras a cada lado del símbolo "+": *x+z*. La tercera variable, *y*, se oculta. La excusa es que queda tan restringida porque cada combinación de estados de las otras le permite un estado único, que es como si no tuviera existencia propia y esas otras la engendrasen cada vez. Así se insinúa que la tercera variable depende de las dos primeras. En verdad, ante una expresión como "*x+z*" es el interlocutor quien tiene que hacer todas las variaciones; pero la insinuación se afirma porque, en el uso, la tercera variable, oculta, se varía después que las dos primeras, explícitas, lo que niega a la tercera variable el carácter de dominante. Todo eso introduce un par de ambigüedades primordiales: la secuenciación por la que llamamos "primeras" a las variables *x* y *z*, y "tercera" a la *y* oculta tras *x+z*, es la exigida por el adverbio "respectivamente" para las abreviaturas, y afecta tanto a la tercera variable como a las dos primeras (esto es, a la primera y a la segunda, que, en el uso, se varían sin respetar cuál fue puesta por el adverbio antes y cuál fue puesta después); pero, por lo expuesto aquí, suele fingirse que *x* y *z* son dominantes y que *y* es dependiente (y existe un convenio según el cual, si se trata de representar a una dependencia con orientación conocida mediante la fórmula, la variable oculta debe ser la dependiente); por otro lado, suele usarse "*x+z*" para representar igualmente tanto a la estructura fingidamente causal de variables *x*, *z* e *y* relacionadas por +, como a la variable fingidamente dependiente *y*.

La fórmula para restar es parecida a la fórmula para sumar, con una variable dominante a cada lado del símbolo "-", y sin la dependiente: *x-z*. La fórmula para multiplicar a veces es con una variable dominante a cada lado del símbolo "·", y sin la dependiente: *x·z*; otras veces es con el símbolo "×" en vez del "·": *x×z*; y muy a menudo es sin símbolo: *xz*. La fórmula para dividir a veces es con una variable dominante a cada lado del símbolo ":", sin la dependiente: x:z; otras veces es con el símbolo "/" en vez del ":": x/z; y otras veces es con el símbolo "——" en vez de los anteriores, con una variable dominante sobre ese símbolo y con la otra debajo: $\frac{x}{z}$.

Otra fórmula parecida porque alude a un trío de variables declarando dos, ocultando una y fingiendo una dependencia orientada, es, por ejemplo, la fórmula para elevar a potencia: x^z.

La ocultación de las variables dependientes es cómoda cuando se quiere simplificar el punto de vista dejando de percibir algunas variables. Pero cuando se trata de lo contrario, de recuperar la percepción de algunas variables, esa ocultación es, por supuesto, molesta.

BY NC ND

El símbolo "=", para igualar, permite recuperar las identidades de las variables dependientes. La fórmula completa es con una variable a cada lado del símbolo; por ejemplo: $x=z$. Así, la escritura es muy parecida a la de $x+z$; pero el significado es muy diferente pues "$x=z$" no alude a un trío de variables, sino sólo a un par: a x y z, ambas declaradas. Y a veces se trata de una variable dominante y una dependiente, que se escribe por convenio en el lado izquierdo (al revés que en las tablas); pero a menudo se trata de dos variables con una falta de independencia mutua cuya orientación no se clarifica ni finge.

Otras fórmulas parecidas a $x=z$ porque aluden a pares de variables declarándolas todas y a menudo no fingiendo dependencias orientadas, son, por ejemplo, $x<z$, $x>z$, $x\leq z$, $x\geq z$ y $x\neq z$.

Pero también hay fórmulas que aluden a pares de variables sin declararlas todas, y fingen dependencias; por ejemplo, $\sin(x)$ y $\cos(x)$. En estas fórmulas, se vuelve a ocultar la variable dependiente (con la excusa de antes), y se vuelve a representar igualmente tanto a la estructura causal como a la variable dependiente.

Otras fórmulas parecidas a $\sin(x)$ porque aluden a pares de variables ocultando las dependientes, son, por ejemplo, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$, e^x y $\ln(x)$.

En resumen, actualmente hay por lo menos fórmulas de tres especies: unas que aluden a tríos de variables fingiendo la orientación de la dependencia pero ocultando las variables dependientes (como $x+z$), otras que aluden a pares de variables declarándolas todas pero esquivando la orientación (como $x=z$), y otras que aluden a pares de variables fingiendo la orientación pero ocultando las variables dependientes (como $\sin(x)$).

Para recuperar la variable dependiente y si se la ha ocultado escribiendo $\sin(x)$, o $x+z$, se suele anotar "$y=\sin(x)$", o "$y=x+z$".

No se anota "$y=<x$", con la excusa de que en "$<x$" habría una variable dependiente que no queda restringida a un estado único ante cada estado de la dominante, x. Tampoco se anota "$y=>x$" ni "$y=\neq x$", con excusas parecidas. Tampoco se anota "$y= =x$", aunque en "$=x$" sí podría haber una variable dependiente que queda restringida a un estado único ante cada estado de la dominante, porque se cree ridículo. Y sí se anota "$y=\pm x$", entendiendo que en "$\pm x$" hay una variable dominante y una dependiente restringida a dos estados ante cada estado de la dominante (excepto 0).

Estos son secretos traviesos que niegan la inteligencia a quienes no están en la complicidad. Se agregan a ellos los del uso de paréntesis de tres especies, un poco a la manera de signos de puntuación domésticos, y los de la supresión de paréntesis según convenios.

Hay más. Se acostumbra leer "$x+z$" como "x más z", "$x=z$" como "x es igual que z", y "$\sin(x)$" como "seno de x". La disparidad de lecturas es evidente. En la primera lectura no hay una oración completa, porque el ocultamiento de la variable dependiente amputa un elemento e impide tenderle una relación mediante un verbo; hay sólo una secuencia de nombres de símbolos, en un deletreo. Según esto, en la última lectura se deletrearía; pero no se hace así; no hay una oración completa ni un deletreo; hay una frase sustantiva: la que ha sustituido al nombre propio de la variable dependiente. Según esto, en la primera lectura se frasearía "suma de x y de z"; pero no se hace así. En la lectura intermedia no se frasea "x, igual de z" y, aunque puede deletrearse "x igual z", normalmente se dice una oración completa: "x es igual que z". Es una oración en modo indicativo: una descripción; pero, originariamente, "$x=z$" no describe "x es igual que z" sino pide "iguale x a z" o, mejor,

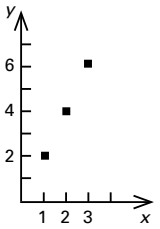
CC BY NC ND

"varíe *z* y *x* (las variables) según la tabla para igualar: a 1 y 1, a 2 y 2, a 3 y 3,... etcétera, respectivamente".

Las tablas y las fórmulas representan abreviadamente a las independencias mutuas, faltas de independencias mutuas y dependencias entre variables, pidiendo al interlocutor que, en ficción a lo menos, se encargue del "alma" de las libertades y restricciones que se imponen las variaciones entre sí.

Así como las tablas pueden ser demasiado largas, las fórmulas pueden ser demasiado pocas.

La asociación de las variables numéricas con longitudes variables, hizo tradicional otra representación: los gráficos cartesianos, de la Geometría variable. Cada uno de tales gráficos consta de: dos líneas de apoyo rectas y graduadas regularmente, una vertical y otra horizontal cruzadas (dos "ejes"); dos escuadras virtuales, que se deslizarían por los ejes, cada una apoyada en un cateto, e intersecarían sus otros catetos; y puntos, líneas o superficies que piden al interlocutor que haga virtualmente las intersecciones sobre ellos, deslizando las escuadras. Así, el interlocutor debe encargarse del "alma" de las libertades y restricciones entre las variaciones.



Para precisar mejor las claves de los gráficos, es conveniente estudiar un caso simple; por ejemplo, la petición "varíe *x* e *y* a 1 y 2, a 2 y 4, o a 3 y 6, respectivamente" que, abreviada, corresponde a una tabla parcial para duplicar. Un gráfico que también abrevia la petición, es el de la figura 15.

Fig. 15: Un gráfico parcial para duplicar

La figura 16 insinúa una clave, con una ubicación virtual de escuadras.

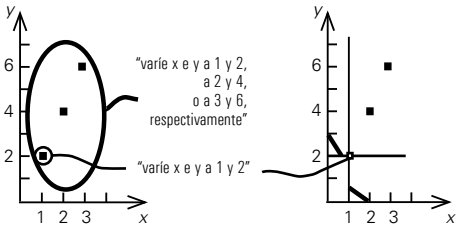
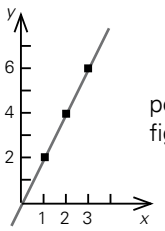


Fig. 16: Una clave con ubicación de escuadras

Una fórmula que abrevia la petición original, es:

$$y = x \cdot 2$$



Esta fórmula es más amplia en la petición de duplicar que el gráfico y la tabla, porque hace una labor de relleno que por lo menos permite pasar al gráfico de la figura 17.

Fig. 17: Un gráfico para duplicar más completo

Pero también permite pensar que alude sólo a las variables *x* e *y* como caso particular de:

$$y = x \cdot z$$

BY NC ND

En la fórmula se puede distinguir una fórmula particular para cada estado de *z*: una para igualar (si *z*=1), una para duplicar (si *z*=2, como antes), otra para triplicar (si *z*=3). Eso sugiere un gráfico para cada estado de *z*. Se los puede dibujar superpuestos, con leyendas apropiadas para no confundirlos. La figura 18 los muestra rellenos respecto a *x*, pero parciales en lo que respecta a *z*.

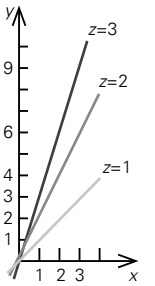


Fig. 18: Tres gráficos parciales para multiplicar, superpuestos

Esa es otra clave de los gráficos. Y aún falta otra más, que exige algún esfuerzo: el gráfico completo requiere tres ejes: uno horizontal para *x*, otro horizontal para *z* y uno vertical para *y*. La figura 19 ilustra el resultado insinuando parte del relleno total, que convierte al gráfico en una superficie rellena de puntos, extendida por el espacio. Pero estamos ante un dibujo, sobre papel, de una situación tridimensional. Eso siempre ocasiona dificultades de entendimiento por la falta de hondura en el papel. Para atenuarlas, la figura tiene, ilícitamente, algo como sombras de líneas en lo que sería el suelo.

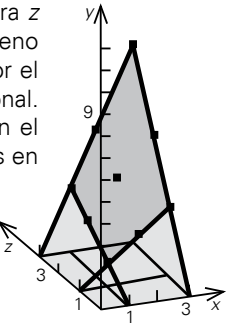


Fig. 19: Un gráfico para multiplicar más completo

Las tablas no son rígidas como las fórmulas, y no se enredan con el número de variables como los gráficos; pero crecen mucho cuando aumentan ese número, la minuciosidad o ambos. A lo menos por eso, suelen sufrir podas, de manera que las tablas disponibles a veces son parciales, advertidamente o no.

En algunos casos, si ha habido poda, podemos remediar el desmoche haciendo interpolaciones mediante gráficos y fórmulas simples, y aceptando que los rellenos son riesgosos.

La simpleza de los gráficos y fórmulas se asegura si se limita el tratamiento a algunas tablas, exigiendo que cada una de éstas cumpla tres condiciones conjuntas:

- que todas sus variables sean numéricas;
- que sus variables dominantes, si son varias, sean independientes entre sí;
- que su variable dependiente sea una y dependa tan estrictamente de las dominantes que, junto a cada combinación de estados de éstas, quede restringida a un estado único.

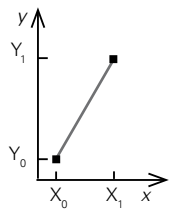
Consideremos la tabla de la figura 20, que cumple esas condiciones, involucra a una variable dominante, *x*, y a una dependiente, *y*, y se supone podada entre renglones.

x	*y*
X0	*Y0*
X1	*Y1*

Fig. 20: Una tabla con una variable dominante y una dependiente

La tabla de la figura 20 demanda dos puntos de vista: se trata de mantener fijos los estados de X_0, X_1, Y_0 e Y_1 y de continuar variando sólo *x* e *y*; de hecho, estamos suponiendo que X_0 y X_1 son estados (invariables) de la variable *x*, mientras Y_0 e Y_1 son estados (invariables) de la variable *y*.

CC BY NC ND



Para interpolar en la tabla, podemos apelar al gráfico de la figura 21.

Fig. 21: Un gráfico para interpolar en la tabla de la figura 20

El gráfico de la figura 21 es en línea recta. Hay varias fórmulas para ella. Una interesante es:

$$y = \frac{X_1 - x}{X_1 - X_0} \cdot Y_0 + \frac{x - X_0}{X_1 - X_0} \cdot Y_1$$

Observemos el comportamiento de las fracciones a medida que x varía hacia X_0 o hacia X_1. La primera se hace 1 cuando $x=X_0$ (habilitando a Y_0 en la suma) y 0 cuando $x=X_1$ (inhabilitando a Y_0). Al revés, la segunda se hace 1 cuando $x=X_1$ (habilitando a Y_1) y 0 cuando $x=X_0$ (inhabilitando a Y_1). Esta es una observación clave.

Ahora consideremos la tabla de la figura 22, que involucra a dos variables dominantes (e independientes entre sí), x_1 y x_2, y a una dependiente, y; y que también se supone podada.

	X_{20}	X_{21}	x_2
X_{10}	Y_{00}	Y_{01}	
X_{11}	Y_{10}	Y_{11}	
x_1			y

Fig. 22: Una tabla con dos variables dominantes y una dependiente

La observación anterior sugiere la fórmula siguiente para interpolar:

$$y = \frac{X_{11} - x_1}{X_{11} - X_{10}} \cdot \frac{X_{21} - x_2}{X_{21} - X_{20}} \cdot Y_{00} + \frac{X_{11} - x_1}{X_{11} - X_{10}} \cdot \frac{x_2 - X_{20}}{X_{21} - X_{20}} \cdot Y_{01}$$
$$+ \frac{x_1 - X_{10}}{X_{11} - X_{10}} \cdot \frac{X_{21} - x_2}{X_{21} - X_{20}} \cdot Y_{10} + \frac{x_1 - X_{10}}{X_{11} - X_{10}} \cdot \frac{x_2 - X_{20}}{X_{21} - X_{20}} \cdot Y_{11}$$

Un gráfico correspondiente es el de la figura 23.

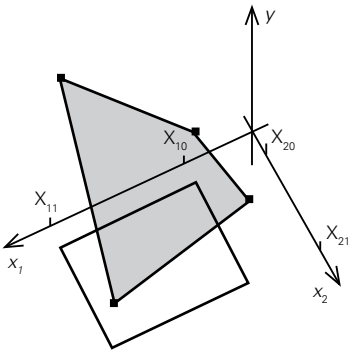


Fig. 23: Un gráfico para interpolar en la tabla de la figura 22

CC BY NC ND

En tablas más largas, tenemos que ubicar primero entre qué estados varían las variables dominantes, y entre qué estados obligan a variar a las dependientes; y, enseguida, tenemos que plantear las fórmulas adecuándolas a esas variaciones.

Pues bien, si una variable depende de otra, ésa depende de otra más, y así sucesivamente, en conjunto, basta una variación ligera en el punto de vista para percibir que la variable dicha al principio queda dependiendo de la citada al final, como en la figura 24.

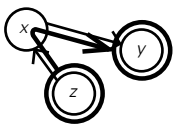


Fig. 24: Estructura causal y variación en el punto de vista

Este tema está en el epicentro técnico porque, para variar diestramente la realidad, hay que conocer qué variables obedecen a la voluntad, qué otras dependen de ellas, qué otras más se someten a estas, y así en lo sucesivo, hasta que la acción se extienda suficientemente. Más: hay que saber lo mejor que se pueda cómo quedan dependiendo las variables que interesa dominar, de las variables que obedecen a la voluntad.

Para encontrar la clave del asunto, veamos la estructura de la figura 24, sin más dependencias que las dos puestas allí, y, sin más abreviaturas que las necesarias para encargarnos de animar dichas dependencias representándolas mediante disyuntivas, supongamos que se trata de: "varíe *z* y *x* a 1 y 2, a 2 y 1, a 3 y 2, o a 3 y 3, respectivamente; y varíe *x* e *y* a 1 y 1, a 2 y 2, a 2 y 3, o a 3 y 2, respectivamente".

Estamos ante un conjunto de dos disyuntivas de cuatro conjuntos de peticiones elementales cada una (en varios puntos de vista), que se puede expresar así: "varíe *z* y *x*, y *x* e *y* a 1 y 2, y 1 y 1; a 1 y 2, y 2 y 2; a 1 y 2, y 2 y 3; a 1 y 2, y 3 y 2; a 2 y 1, y 1 y 1; a 2 y 1, y 2 y 2; a 2 y 1, y 2 y 3; a 2 y 1, y 3 y 2; a 3 y 2, y 1 y 1; a 3 y 2, y 2 y 2; a 3 y 2, y 2 y 3; a 3 y 2, y 3 y 2; a 3 y 3, y 1 y 1; a 3 y 3, y 2 y 2; a 3 y 3, y 2 y 3; o a 3 y 3, y 3 y 2; respectivamente".

Ahora estamos ante una disyuntiva de dieciséis conjuntos de peticiones elementales, en cada uno de los cuales hay dos peticiones respecto a *x*. En algunos de los conjuntos, las dos peticiones respecto a *x* son diferentes de manera que dichos conjuntos resultan irresolubles. Si los eliminamos de la disyuntiva, quedamos ante: "varíe *z* y *x*, y *x* e *y* a 1 y 2, y 2 y 2; a 1 y 2, y 2 y 3; a 2 y 1, y 1 y 1; a 3 y 2, y 2 y 2; a 3 y 2, y 2 y 3; o a 3 y 3, y 3 y 2; respectivamente".

Ahora estamos ante una disyuntiva de seis conjuntos de peticiones elementales, y en cada uno de esos conjuntos hay dos peticiones repetidas respecto a *x*. Si eliminamos las repeticiones (y nos permitimos algunas licencias acerca de los varios puntos de vista), quedamos ante: "varíe *z, x* e *y* a 1, 2 y 2; a 1, 2 y 3; a 2, 1 y 1; a 3, 2 y 2; a 3, 2 y 3; o a 3, 3 y 2; respectivamente".

Si ignoramos *x* para concentrarnos en cómo queda dependiendo *y* de *z*, quedamos ante: "varíe *z* e *y* a 1 y 2; a 1 y 3; a 2 y 1; a 3 y 2; a 3 y 3; o a 3 y 2; respectivamente". Y si eliminamos las repeticiones, quedamos ante: "varíe *z* e *y* a 1 y 2; a 1 y 3; a 2 y 1; o a 3 y 2; a 3 y 3; respectivamente".

Ya está: sabiendo cómo animar la dependencia entre *z* y *x* y la dependencia entre *x* e *y*, hemos descubierto cómo animar la dependencia entre *z* e *y*. Ya sabemos cómo queda dependiendo *y* de *z*.

Habiendo encontrado la clave, podemos rehacer todo con las abreviaturas de las tablas, los gráficos y las fórmulas. Como ejemplo, consideremos el conjunto de dos gráficos de la figura 25, donde la pregunta es, otra vez, cómo queda dependiendo *y* de *w*.

CC BY NC ND

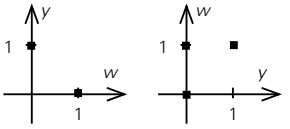


Fig. 25: Un conjunto de dos gráficos iniciales

Al parecer, la respuesta ya estaría en el gráfico izquierdo de la figura 25. Pero la estructura causal, que aparece en la figura 26, basta para sospechar que debemos pensar algo más porque estamos ante la presencia circular de dependencias mutuas entre variables, a la manera de la estructura derecha en la figura 11.

Fig. 26: Estructura causal

En el caso presente, se trata de: "varíe *w* e *y* a 0 y 1, o a 1 y 0, respectivamente; y varíe *y* y *w* a 0 y 0, a 0 y 1, o a 1 y 1, respectivamente"; es decir, de: "varíe *w* e *y*, e *y* y *w* a 0 y 1, y 0 y 0; a 0 y 1, y 0 y 1; a 0 y 1, y 1 y 1; a 1 y 0, y 0 y 0; a 1 y 0, y 0 y 1; o a 1 y 0, y 1 y 1; respectivamente". Hay dos peticiones diferentes respecto a *y* en tres conjuntos de la última disyuntiva, y también hay dos peticiones diferentes respecto a *w* en tres conjuntos (uno de los cuales es uno de los anteriores), de manera que dichos conjuntos resultan irresolubles. Eliminándolos, quedamos ante: "varíe *w* e *y*, e *y* y *w* a 1 y 0, y 0 y 1; respectivamente"; y eliminando las repeticiones terminamos ante: "varíe *w* e *y* a 1 y 0, respectivamente". Así, la respuesta es que a *y* no le quedan estados por los cuales variar dependiendo de *w*, y a *w* tampoco.

Una manera abreviada y tradicional de llegar a esa respuesta gráficamente, consiste en redibujar, sobre el gráfico izquierdo de la figura 25, el gráfico derecho invertido de manera que quede con el eje vertical dedicado a *y* y el horizontal dedicado a *w*, y en quedarse sólo con los puntos de los gráficos que se superponen en ambos. El resultado aparece en la figura 27 y, por supuesto, concuerda con la respuesta anterior.

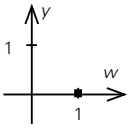


Fig. 27: Gráfico final

En realidad, la diversidad de casos es tan grande, que hay que lidiar con muchos de ellos según aparezcan, manteniendo alguna esperanza en las resoluciones algebraicas (que, si son sólo de inserción de unas fórmulas en otras, no hacen más que insinuar las estructuras ocultando variables dependientes y, si no, nos desbordan con facilidad).

Para aumentar la desazón, estamos suponiendo que la orientación de las dependencias se zanja con el criterio de la imposición voluntaria de estados, complementado con que ninguna variable depende por dos o más dependencias diferentes, y con que ninguna variable domina variando después.

Lo último nos pone frontalmente ante un tema que hasta aquí hemos tratado con demasiada liviandad: la presencia de retardos.

Como está puesto cerca de la figura 7, no cabe dictaminar sencillamente que las variables que varían después son dependientes, porque, según ese dictamen, las dos estructuras de la figura nos resultan indistinguibles si en la izquierda *x* obedece a *z* con algún retardo e *y* obedece a *x* con un retardo parecido, mientras en la derecha *x* obedece a *z* con el mismo retardo e *y* obedece a *z* con un retardo doble; y la confusión es peor si las variaciones se hacen cíclicas o se detienen, porque entonces se torna difícil notar qué ocurre después y qué, antes.

BY NC ND

Pero ese argumento merece algunas explicaciones. Redibujemos la figura 7 según la 28.

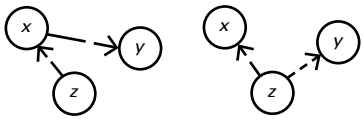


Fig. 28: Dos estructuras causales de tres variables (*x, y* y *z*) y dos dependencias (*z* dominando, *x* dependiendo y dominando, o dependiendo, e *y* dependiendo), con retardos (desdibujados)

Lo que pretendemos insinuar mediocremente en el caso izquierdo de la figura 28, es que *x* depende de *z*, e *y* depende de *x*; esto es, que *x* e *y* son efectos de *z* y *x*, respectivamente; pero son efectos retardados: *x, y* y *z* varían secuencialmente (esto es, evolucionan escena a escena), y en cualquier etapa (esto es, escena) *x* depende más de cómo estaba *z* en la anterior, que de cómo está en la presente, e *y* depende más de cómo estaba *x* en la anterior, que de cómo está en la presente. Parecidamente, lo que pretendemos insinuar en el caso derecho de la figura 28, es que *x* e *y* son efectos retardados de *z*: en cualquier etapa (escena), *x* depende más de cómo estaba *z* en la anterior, que de cómo está en la presente, e *y* depende más de cómo estaba *z* en la anterior a la anterior, que de cómo está en la presente o estaba en la anterior.

Podemos mejorar un poco las insinuaciones procurando desmontar en las dependencias los retardos que pudieran incluir, y lo demás. Para ello, formalicemos como "retardo *dt*" a una igualación retardada en *dt*; esto es, a una dependencia según la cual una variable dependiente y otra dominante evolucionan de manera que el estado de la dependiente en cualquier escena iguala al que tenía la dominante en la escena anterior (entendiendo que la separación temporal entre ambas escenas es, precisamente, *dt*); o, dicho al revés, el estado de la dominante en cualquier escena presente será igualado por el de la dependiente en la escena siguiente.

Con esa formalización y como ejemplo, podemos volver a dibujar la figura 28 según la 29, suponiendo que los retardos son los señalados y que (1) se repite en ambos casos. Entonces *x* queda dependiendo de *z* por igual en ambos casos, incondicionalmente, mientras *y* queda dependiendo de *z* por igual en ambos, con la condición de que la dependencia (3) en el caso derecho equivalga al conjunto de las dependencias (1) y (2) en el izquierdo.

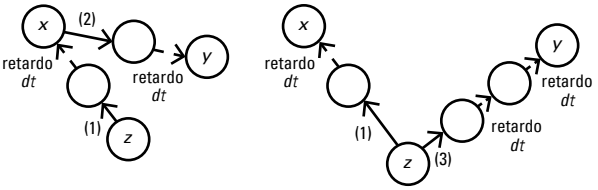


Fig. 29: Dos estructuras causales de tres variables (*x, y* y *z*) y dos dependencias (*z* dominando, *x* dependiendo y dominando, o dependiendo, e *y* dependiendo), con retardos (desdibujados)

Pero, para mejorar en definitiva las insinuaciones, debemos hacernos cargo de que estamos ante variables que evolucionan variando secuencialmente.

Volvamos, pues, a las secuencias y tomemos como ejemplo a una variable de la figura 29; en particular, tomemos a la variable dominante en el retardo cuya variable dependiente es *x*, y llamémosla *a*.

Si llamamos A_1 al primer estado de *a*, A_2 al segundo, y en general A_k al *k*-ésimo (donde *k* es un número entero), podemos representar a la evolución de *a* con la secuencia de la figura 30 (que no es una estructura causal, sino temporal).

CC BY NC ND

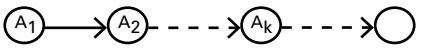


Fig. 30: Evolución de la variable a, en secuencia de estados

En la secuencia de la figura 30, los estados A_k y A_m son diferentes por ser uno el *k*-ésimo y el otro el *m*-ésimo (para $k \neq m$); pero quizás sean tan parecidos en todo lo demás, que se los puede confundir.

Si se tratara de una variable *t* en que cualquier estado T_k y cualquier estado T_m tienen negado parecerse de esa manera (para $k \neq m$), tal variable serviría como medida del tiempo.

Desde ahora y hasta el fin de este libro, supongamos que *dt* es el retardo que media entre los estados consecutivos de las secuencias representativas de todas las variables que evolucionan temporalmente, que *t* es una variable que evoluciona y sirve como medida oficial del tiempo, y que $T_k = k \cdot dt$ para cualquier *k* que es un número entero (de manera que, efectivamente, cualquier T_k y cualquier T_m tienen negado parecerse para $k \neq m$).

En tal circunstancia, podemos representar a la evolución de *t* con la secuencia de la figura 31.

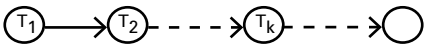


Fig. 31: Evolución de la variable *t*, en secuencia de estados

También podemos representar a la evolución de *t* y *a*, conjuntamente, con la secuencia de la figura 32.

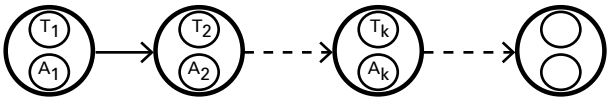


Fig. 32: Evolución conjunta de las variables *t* y *a*, en secuencia de estados

T_1	A_1
T_2	A_2
...	...
T_k	A_k
...	...

También podemos representar a esa evolución con la lista vertical de la figura 33 (apelando a la manera occidental de leer hacia abajo).

Fig. 33: Evolución de *t* y *a*, en lista vertical de estados

También podemos representar a la evolución con la tabla de la figura 34.

t	*a*
dt	A_1
$2 \cdot dt$	A_2
...	...
$k \cdot dt$	A_k
...	...

Fig. 34: Evolución de *t* y *a*, en tabla

Y también podemos representar a la evolución con el gráfico de la figura 35 (donde $A_2 = A_k$ como ilustración de los parecidos posibles).

BY NC ND

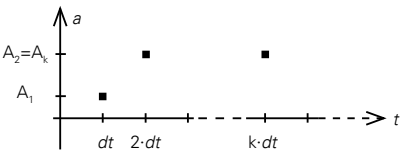


Fig. 35: Evolución de *t* y *a*, en gráfico

Es notorio que la tabla y el gráfico de las figuras 34 y 35 corresponden a "varíe *t* y *a* a *dt* y A_1, o a $2 \cdot dt$ y A_2,... o a $k \cdot dt$ y A_k,... , respectivamente", y que el "o" faculta para hacer las variaciones sin preocupación por las secuencias indicadas recientemente. Y también es notorio que podemos hacer tablas y gráficos parecidos para la evolución conjunta de *t* y cualquier otra variable que evoluciona parecidamente (incluyendo *t*).

Esto último merece un comentario: como en las tablas estamos dedicando las columnas izquierdas a *t* y las derechas a las otras variables, como en los gráficos estamos dedicando los ejes horizontales a *t* y los verticales a las otras variables, y como existe el vicio de llamar "variable independiente" a *t* y "variables dependientes" a las otras, pudiera parecer que pretendemos erigir al tiempo en dominante de todas las variables que evolucionan; pero la pretensión no es ésa: desdibujamos la causalidad.

Dejemos, pues, el asunto, retornemos a la figura 29, y tomemos como ejemplo a la variable *x*.

Si $a=A_1$ cuando $t=dt$, entonces $x=A_1$ cuando $t=2 \cdot dt$ como resultado de la igualación retardada en *dt*; y si $x=X_2$ cuando $t=2 \cdot dt$ por denominación, entonces $X_2=A_1$. Parecidamente, $X_3=A_2$, $X_k=A_{k-1}$, $X_{k+1}=A_k$, etcétera.

De hecho, fórmulas como esas dos últimas son las más habituales para representar a una igualación retardada como la de la figura 29 cuya variable dominante es *a* y cuya variable dependiente es *x*:

$$X_k = A_{k-1}$$

$$X_{k+1} = A_k$$

Según las fórmulas, $X_2=A_1$, $X_3=A_2$, $X_{k+1}=A_k$, etcétera; luego, la evolución conjunta de *t* y *x* debiese ser la de la figura 36, donde es notorio que falta X_1 ($=A_0$) por desconocimiento de A_0.

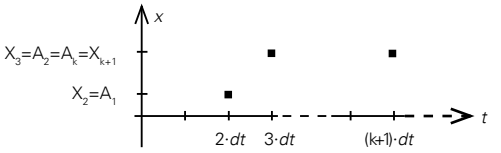


Fig. 36: Evolución de *t* y *x*, en gráfico

Supongamos, por ejemplo, que (1), (2) y (3) de la figura 29 corresponden respectivamente a:

$a = 0.5 \cdot z$

$b = x$

$c = 0.5 \cdot z$

Para el caso izquierdo:

CC BY NC ND

$$Y_k = B_{k-1}$$
$$B_{k-1} = X_{k-1}$$
$$X_{k-1} = A_{k-2}$$
$$A_{k-2} = 0.5 \cdot Z_{k-2}$$

y, para el derecho:

$$Y_k = C_{k-2}$$
$$X_k = A_{k-1}$$
$$C_{k-2} = 0.5 \cdot Z_{k-2}$$
$$A_{k-1} = 0.5 \cdot Z_{k-1}$$

Luego, para ambos:

$$Y_k = 0.5 \cdot Z_{k-2}$$
$$X_k = 0.5 \cdot Z_{k-1}$$

Así, si imponemos la evolución de *z*, podemos predecir, también por ejemplo, las evoluciones de *x* e *y* en ambos casos de la figura 29 mediante la tabla de la 37.

t	*z*	*x*	*y*
0	0		
dt	1	0	
2·*dt*	2	0.5	0
3·*dt*	3	1	0.5
4·*dt*	3	1.5	1
5·*dt*	2	1.5	1.5
6·*dt*	1	1	1.5
7·*dt*	0	0.5	1
8·*dt*	-1	0	0.5
9·*dt*	-2	-0.5	0
10·*dt*	-3	-1	-0.5
11·*dt*	-3	-1.5	-1
...			

Fig. 37: Tabla para los casos de la figura 29

Las dificultades de cómputo para predecir las evoluciones en estructuras causales con retardos, aumentan con el número de retardos. Para aliviarlas, conviene estructurar temporalmente los cómputos notando que algunos deben hacerse antes que otros, por los datos necesarios en ellos; es decir, conviene estructurar métodos de computación.

Los métodos (algoritmos, procedimientos, programas, recetas) son estructuras temporales cuyas etapas, honrando la voluntad y la capacidad de acción del interlocutor, son de peticiones hechas mediante formas verbales imperativas. Los métodos de computación son de la misma especie.

BY NC ND

Algunas de sus etapas, cuyo aspecto podemos suponer como "...→…" donde los puntos suspensivos dan cabida a un número en el lado izquierdo de la flecha y a una variable en el lado derecho, piden: "enseguida, varíe la variable derecha al número izquierdo"; por ejemplo, "0→*x*". Otras etapas, cuyo aspecto podemos suponer como "...→…" donde los puntos suspensivos dan cabida a una variable en el lado izquierdo y a otra en el derecho, piden: "averigüe el estado de la variable izquierda tras la última etapa del método en que varió, y enseguida varíe la variable derecha a ese estado"; por ejemplo, "*x*→*y*". Otras, cuyo aspecto podemos suponer como "...→…" donde los puntos suspensivos dan cabida a la fórmula de una dependencia estricta en el lado izquierdo y a una variable en el derecho, piden: "averigüe los estados de las variables dominantes de la fórmula izquierda tras las últimas etapas del método en que variaron, compute el estado de la variable dependiente oculta en esa fórmula según aquellos estados, y enseguida varíe la variable derecha al estado de tal variable dependiente oculta"; por ejemplo, "2·*x*→*y*". Otras, cuyo aspecto podemos suponer como "→…" donde los puntos suspensivos dan cabida a una variable en el lado derecho, piden: "averigüe un número o el estado de una variable, fuera de las etapas del método, y enseguida varíe la variable derecha a ese número o estado"; dicho otro modo: "lea el número o estado, afuera, y varíe la variable a lo leído"; por ejemplo, "→*x*". Y otras, cuyo aspecto podemos suponer como "…→" donde los puntos suspensivos dan cabida a una variable, en el lado izquierdo, piden: "averigüe el estado de la variable izquierda tras la última etapa en que varió, y enseguida varíe a ese estado alguna variable fuera de las etapas del método"; dicho de otro modo: "averigüe el estado de la variable, y escriba lo averiguado, afuera"; por ejemplo, "*y*→".

Así, las peticiones se parecen a las de las fórmulas habituales; pero tienen flechas (→) en lugar de símbolos para igualar (=), y esa es una diferencia decisiva. Comparemos, por ejemplo, "2·*x*→*y*" con "2·*x*=*y*"; "2·*x*=*y*" pide "varíe *x* e *y* a 1 y 2, o a 2 y 4,… respectivamente, según la tabla para duplicar"; en cambio, "2·*x*→*y*" pide "averigüe el estado de *x* tras la última etapa en que varió, pero no varíe *x*; compute el estado de (la variable dependiente oculta en) 2·*x* y enseguida (apenas pueda después de lo anterior) varíe *y* al estado de 2·*x*".

Las peticiones se han alejado del Álgebra, se han contagiado con la causalidad y, con sus flechas, delatan a las variables dependientes: en la etapa "2·*x*→*y*", *y*, que debe variar después, no puede ser dominante.

La versatilidad de las etapas de computación propuestas, es notable. Pero, cuando las transiciones sólo son capaces de originar secuencias puras, los métodos pueden resultar largos por repetición de etapas iguales. Para abreviar, los métodos de computación permiten plantear transiciones de retorno.

Una desgracia evidente entonces es que, con las transiciones de retorno, no sabemos cuándo finalizar. Para disipar tal desgracia, los métodos de computación permiten plantear transiciones condicionadas por descripciones que, estando válidas, franquean dichas transiciones y, estando inválidas, las niegan.

Con tranquilidad, podemos anotar las descripciones condicionantes al lado de las transiciones condicionadas por ellas; pero la notación misma merece algunas dudas: tradicionalmente, se anota fórmulas como las habituales, cuyo carácter es más imperativo que indicativo; vale decir, pese a que se trata más de peticiones que de descripciones.

Aprovechando que en las etapas nos estamos descolgando de las peticiones habituales y estamos usando fórmulas con flechas en lugar de símbolos para igualar, donde podemos notar el descuelgue, hagamos el desaguisado tradicional: en las transiciones anotemos fórmulas como las habituales interpretándolas, no como

CC BY NC ND

peticiones, sino como descripciones de sus cumplimientos presuntos; por ejemplo, no interpretemos "y=x" como "varíe x e y a 0 y 0, o a 1 y 1,… respectivamente, según la tabla para igualar" ni, más brevemente, como "iguale y y x", sino como "y y x están iguales", que puede considerarse como válida o inválida según los estados de x e y tras las últimas etapas del método en que variaron.

Este será otro secreto travieso que negará la inteligencia a quienes no estén en la complicidad.

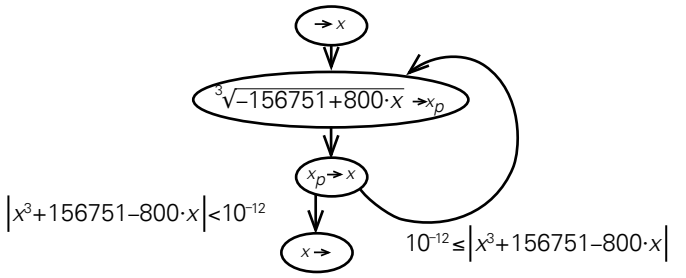


Fig. 38: Método de computación (para resolver "$1{\cdot}x^3$=800·x-156751")

Hay tal abundancia de posibilidades con lo que hemos expuesto, que lo mejor es dejar el tema abierto tras añadir lo siguiente. Los métodos de computación son estructuras temporales y no estructuras causales: en ellos no se trata de variar la petición de una etapa y de observar acaso varía o estamos obligados a variar otra petición (posterior o anterior), aunque la variación de aquella petición pudiera variar lo escrito al ejecutar un método, y la validez de las descripciones condicionantes domina al franqueo de las transiciones condicionadas. Además, los métodos de computación tampoco son estructuras espaciales, aunque hay aspectos que tientan a transitar entre los sustantivos "transición" y "tránsito", y por eso se suele hablar de "diagramas de flujo", como si en los métodos hubiese algo que viaja, derramado, por las transiciones y etapas. Cuando las transiciones de los métodos son tales que sus estructuras temporales son secuencias puras, es fácil imaginar algún viajero pasando de un recinto a otro, entrando en cada uno, encontrando en él una misión que cumplir, y saliendo de él con la misión cumplida. Sin embargo, cuando existen transiciones de retorno, hay que enfrentar varios viajeros entrando en algún recinto y un solo viajero saliendo del recinto; y hay que esforzarse un poco alegando que los varios viajeros son uno solo, que entra en tiempos distintos por dos pasadas distintas y sale en tiempos distintos por una misma pasada. Y en la figura 38, el alegato puede repetirse para el segundo recinto y acomodarse para el tercero, alegando que allí entra algo por una pasada y sale por una de dos, alternativamente y según sean las condiciones del tránsito. Pero hay métodos (fuera de este libro) que permiten transiciones no sólo entre pares de etapas, como aquí, sino también entre tríos o conjuntos mayores, conjunta y no alternativamente. En ellos podríamos imaginar, no un viajero solo, en singular, sino viajantes más plurales. Entonces se nos pone más difícil la imaginación.

Hablemos ahora del derrame plural por las estructuras espaciales.

Si los viajeros son muchos más que los recintos, mucho más barato que conocer en qué recinto se halla cada viajero, es conocer cuántos viajeros hay en cada recinto. Eso, por supuesto, presupone que los viajeros nos son tan parecidos, que los podemos confundir con toda impunidad.

Apeguémonos a ese último presupuesto y conocimiento, que es lo que hacemos, por ejemplo, ante el agua.

BY NC ND

Imaginemos un estanque cilíndrico de eje de simetría vertical (un recinto espacial), y un caudal de masa de agua *q*. En particular, imaginemos los cuatro casos de la figura 39.

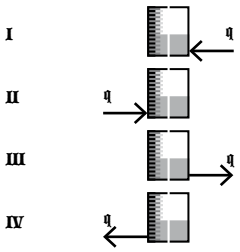


Fig. 39: Cuatro casos con un estanque y un caudal

No es difícil conjeturar los comportamientos siguientes:

I. el nivel de agua en el estanque aumentará cada vez más, porque el volumen de agua aumentará cada vez más, porque la masa de agua aumentará cada vez más por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del lado derecho al estanque;

II. el nivel aumentará como en I, porque el volumen aumentará como en I, porque la masa aumentará como en I por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del lado izquierdo al estanque;

III. el nivel disminuirá cada vez más, porque el volumen disminuirá cada vez más, porque la masa disminuirá cada vez más por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del estanque al lado derecho;

IV. el nivel disminuirá como en III, porque el volumen disminuirá como en III, porque la masa disminuirá como en III por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del estanque al lado izquierdo.

La figura 40 esboza estructuras espaciales bastante evidentes, donde los círculos y las flechas con extremos en las fronteras de los círculos procuran representar a los estanques, como recintos, y a los viajes de las masas fluyentes por las pasadas disponibles, respectivamente.

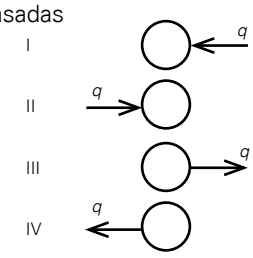


Fig. 40: Estructuras espaciales de los cuatro casos con un estanque y caudal

Si dibujamos otro estanque en el extremo suelto de cada flecha de la figura 40, sólo nos quedan los dos casos diferentes que la figura 41 muestra en el lado izquierdo, con sus estructuras espaciales en el derecho.

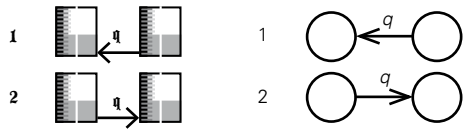


Fig. 41: Dos casos con dos estanques y un caudal

Tampoco es difícil conjeturar los comportamientos siguientes:

1. el nivel de agua en el estanque izquierdo aumentará cada vez más (porque el

CC BY NC ND

volumen aumentará cada vez más, porque la masa aumentará cada vez más), y el nivel del derecho disminuirá cada vez más (porque el volumen disminuirá cada vez más, porque la masa disminuirá cada vez más), por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del estanque derecho al izquierdo;

2. el nivel en el estanque izquierdo disminuirá cada vez más (porque el volumen disminuirá cada vez más, porque la masa disminuirá cada vez más), y el nivel del derecho aumentará cada vez más (porque el volumen aumentará cada vez más, porque la masa aumentará cada vez más), por causa del caudal *q*, que es un flujo de masa viajante del estanque izquierdo al derecho.

Si agregamos otro caudal, surgen los cuatro casos diferentes que la figura 42 muestra en el lado izquierdo, con sus estructuras espaciales en el derecho.

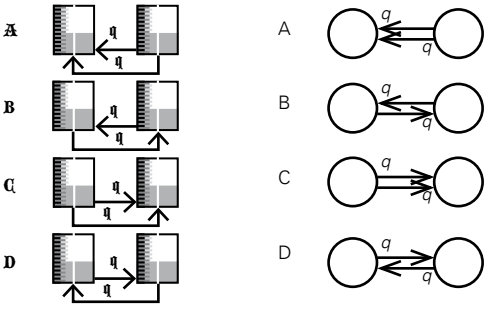


Fig. 42: Cuatro casos con dos estanques y dos caudales

Tampoco es difícil conjeturar los comportamientos siguientes:

A. el nivel de agua en el estanque izquierdo aumentará doblemente cada vez más (porque el volumen aumentará así, porque la masa aumentará así), y el nivel en el derecho disminuirá doblemente cada vez más (porque el volumen disminuirá así, porque la masa disminuirá así), por causa de los dos caudales *q*, que son dos flujos de masa viajantes del estanque derecho al izquierdo;

B. los niveles en ambos estanques se mantendrán (porque los volúmenes se mantendrán, porque las masas se mantendrán), por causa de los dos caudales *q*, uno que es un flujo de masa viajante del estanque derecho al izquierdo, y otro que es un flujo de masa viajante del izquierdo al derecho;

C. el nivel en el estanque izquierdo disminuirá doblemente cada vez más (porque el volumen disminuirá así, porque la masa disminuirá así), y el nivel en el derecho aumentará doblemente cada vez más (porque el volumen aumentará así, porque la masa aumentará así), por causa de los dos caudales *q*, que son dos flujos de masa viajantes del estanque izquierdo al derecho;

D. los niveles en ambos estanques se mantendrán (porque los volúmenes se mantendrán, porque las masas se mantendrán), por causa de los dos caudales *q*, uno que es un flujo de masa viajante del estanque izquierdo al derecho, y otro que es un flujo de masa viajante del derecho al izquierdo.

Y tampoco es difícil conjeturar los comportamientos para más estanques y caudales, suponiendo que éstos no se atropellan mutuamente.

Pero, ¿por qué hemos expuesto tan largamente las conjeturas? ¿Por qué, para el caso 1 de la figura 41, por ejemplo, no hemos predicho simplemente "el nivel de agua en el estanque izquierdo aumentará cada vez más, y el nivel en el derecho disminuirá cada vez más, por causa del flujo de nivel viajante del estanque derecho al izquierdo"? Porque las masas fluyen; y los niveles, no.

BY NC ND

Hagamos, del caso 1 de la figura 41, los dos casos de la 43, suponiendo que el área transversal de uno de los estanques es el doble de la del otro.

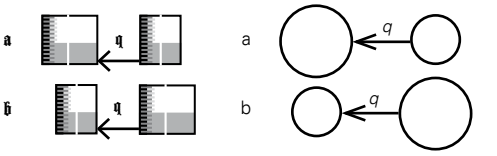


Fig. 43: Dos casos

En el caso a, desde hace siglos las reglas y balanzas indican que el aumento de nivel de agua en el estanque izquierdo es la mitad de la disminución de nivel en el derecho; y, sin embargo, el aumento de masa en el izquierdo es igual que la disminución de masa en el derecho.

En el caso b, las mediciones indican que el aumento de nivel en el izquierdo es el doble de la disminución de nivel en el derecho; y, sin embargo, el aumento de masa en el izquierdo es igual que la disminución de masa en el derecho.

Ahí está la clave.

Para asentarla un poco más, imaginemos que, en vez de agua (líquida), usamos aire (gaseoso). En el caso a, el aumento de nivel de aire en el estanque izquierdo es nulo (si el estanque no cede): el aire llega hasta el techo; en el derecho, también; más: el aumento de volumen de aire en el estanque izquierdo también es nulo; y en el derecho, también; sin embargo, el aumento de masa de aire en el izquierdo no es nulo, y es igual que la disminución de masa en el derecho. En el caso b, el aumento de nivel en el estanque izquierdo, la disminución de nivel en el derecho, el aumento de volumen en el izquierdo y la disminución de volumen en el derecho, son nulos; sin embargo, el aumento de masa de aire en el izquierdo no es nulo, y es igual que la disminución de masa en el derecho.

¿Y para qué sirve la clave? Sirve para la sensatez de las cuentas.

Contamos lo que tenemos pasándolo de un recinto a otro: de aquél donde está lo por contar, a aquél donde está lo contado. Para el paso, movemos real o fingidamente lo que estamos contando, los recintos o una combinación. Y para la sensatez de las cuentas, esperamos que lo por contar vaya disminuyendo tanto como va aumentando lo contado, hasta que estemos listos.

Lo último pide que lo que estamos contando dure por lo menos lo que dura la cuenta. Y si vamos a contar viajeros en una pasada específica todo el tiempo, lo ideal es que tales viajeros sean tan eternos (duraderos, perdurables, perennes, permanentes, perpetuos), en sus existencias más que en sus viajes, como el tiempo mismo: así, si no hay más pasadas y no nos equivocamos contando, no caben causas imprevistas que nos hagan desconfiar de que conocemos cuántos viajeros tenemos en los recintos de los extremos de la pasada.

La clave está, pues, en lo dicho antes, y la eternidad de lo que viaja (la masa, no el volumen ni el nivel) se reconoce en que el aumento en uno de dos recintos con una pasada entre ellos, siempre es igual que la disminución en el otro, de manera que, mirando todo como un solo recinto, la cuenta total da siempre lo mismo.

Para diagnosticar los aumentos o las disminuciones, podemos restar las cuentas en etapas diferentes, con un retardo *dt* entre medio: si la resta es positiva, ha habido aumento; y si es negativa, ha habido disminución. Pero, si las que aumentan o disminuyen son cantidades de viajeros eternos en recintos, podemos hacer algo mejor que sólo restar: podemos dividir las restas por el retardo, para diagnosticar, además, los flujos de dichos viajeros, porque así la resta en el numerador delata el aumento o la disminución, debidos exclusivamente al caudal, y el retardo en el denominador

CC BY NC ND

delata el tiempo neto en que han ocurrido el caudal y el aumento o la disminución; por ejemplo, en cualquiera de los cuatro casos de la figura 39, podemos diagnosticar lo siguiente:

$$Q_k = \left| \frac{M_k - M_{k-1}}{dt} \right|$$

donde Q_k es el estado de q cuando $t=k\cdot dt$, M_k es el de m cuando $t=k\cdot dt$, M_{k-1} es el de m cuando $t=(k-1)\cdot dt$, q es el caudal de masa, en [kg s^{-1}], y m es la masa en el estanque, en [kg].

Más aún: con esta fórmula:

$$Q_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{dt}$$

podemos decidir si el caudal es de masa fluyente hacia adentro del estanque o hacia afuera de él, sin mirar las flechas de la figura 39, por el signo del diagnóstico: si el signo es positivo, ha habido aumento y, consecuentemente, el caudal es de masa fluyente hacia adentro; si el signo es negativo, el caudal es de masa fluyente hacia afuera.

Por cierto, estamos dando por supuesto que, en el retardo, *dt* es positivo y, si el caudal evoluciona lentamente, podemos usar un retardo positivo grande; pero si el caudal evoluciona más rápidamente y queremos diagnosticarlo bien, necesitamos usar un retardo positivo más pequeño (más parecido a 0), que no nos oculte las variaciones. En general, tenemos que tolerar errores de diagnóstico y decidir *dt* haciéndolo tender a 0 lo suficiente para que dichos errores se mantengan en lo tolerado. Eso, que desborda al libro como muchos otros temas, es asunto del Cálculo y se anota con esta fórmula:

$$q = \frac{dm}{dt}$$

donde se da por entendido que *dm* es la resta entre estados de *m* en dos estados del tiempo, que *dt* es la resta entre esos dos estados del tiempo, y que esta segunda resta asegura que los errores de diagnóstico de *q* según la fórmula, se mantienen en lo tolerado.

Con esa anotación se dice que *q* es la derivada de *m* y que la fórmula anterior es una aproximación para la derivada mientras no esté claro que *dt* asegura lo dicho. Más: se dice que *dm/dt* es la derivada de *m* y que, como ella, cualquier *dx/dt* es la derivada de *x*, sin más condiciones que la variabilidad evolutiva de *x*; por ejemplo, se dice que *dh/dt* es la derivada de *h*, donde *h* es el nivel de agua, en [m], sin considerar la clave anterior que hace diferentes a *h* y *m* de manera decisiva para este capítulo.

Volviendo a *m* y *q*, conviene hacer notar que las fórmulas expuestas para el diagnóstico de *q* contravienen la causalidad, por un ingrediente imprevisto al suponer que la orientación de las dependencias se zanja con el criterio de la imposición voluntaria de estados, complementado con que ninguna variable depende por dos o más dependencias diferentes y con que ninguna variable domina variando después.

Rescatemos el sustantivo "acumulación" (acopio, almacenamiento), que alude al paso de viajeros (como *m*, idealmente eternos) hacia o desde recintos, y a su existencia en ellos.

Con ese rescate es fácil formular lo que sigue para predecir *m*:

BY NC ND

$$M_{k+1} = M_k + Q_k \cdot dt$$

donde M_{k+1} es el estado de m cuando $t=(k+1)\cdot dt$, M_k es el de m cuando $t=k\cdot dt$, Q_k es el de q cuando $t=k\cdot dt$, m es la masa en el estanque, en [kg], y q es el caudal de masa entrante netamente, en [kg s^{-1}].

Si la masa evoluciona lentamente, podemos usar un retardo positivo grande; pero si evoluciona más rápidamente y queremos predecirla bien, necesitamos usar un retardo positivo más parecido a 0, que no nos oculte las variaciones. En general, tenemos que tolerar errores de predicción y decidir dt haciéndolo tender a 0 lo suficiente para que dichos errores se mantengan en lo tolerado. Eso también es asunto del Cálculo y se anota con esta fórmula:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau$$

Con esa anotación se dice que m es la integral de q, que la fórmula anterior es la aproximación de Leonhard Euler (1707-1783) para la integral mientras no esté claro que dt asegura lo dicho, y que cualquier $y(0) + \int_0^t x(\tau) \cdot d\tau$ es la integral de x, sin más condiciones que la variabilidad evolutiva de x.

Hay que advertir que, según las aproximaciones expuestas:

$$M_{k+1} = M_k + Q_k \cdot dt$$

$$Q_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{dt}$$

luego, $M_{k+1} = M_k + \frac{M_k - M_{k-1}}{dt} \cdot dt$

luego, $M_{k+1} = 2 \cdot M_k - M_{k-1}$

y luego, $\left| M_{k+1} - 2 \cdot M_k + M_{k-1} \right| = 0$

Esto, que no necesita ser válido del todo con las aproximaciones, nos da un criterio para dar por finalizado el afán por hacer tender dt a 0: la validez de una descripción como:

$$\left| M_{k+1} - 2 \cdot M_k + M_{k-1} \right| < 10^{-12}$$

donde 10^{-12} está allí sólo como ejemplo.

Pues bien, las fórmulas que concuerdan con la causalidad son las expuestas para la predicción de m, no las expuestas para diagnosticar q.

Imaginemos tres recintos mutuamente excluyentes pero colindantes, cada uno con masa y conectado a los otros dos por aberturas que dejan pasar caudales de masa según la figura 44. Las aberturas han sido dibujadas como pasarelas sólo para enfatizar la estructura espacial; $m_1(t)$, $m_2(t)$ y $m_3(t)$ representan respectivamente a las masas en los recintos 1, 2 y 3, en [kg]; $q_{1,2}(t)$, $q_{1,3}(t)$ y $q_{2,3}(t)$ representan respectivamente a un caudal de masa simultáneamente saliente del recinto 1 y entrante al 2, a otro caudal de masa simultáneamente saliente del recinto 1 y entrante al 3, y a un tercer caudal de masa simultáneamente saliente del recinto 2 y entrante al 3, en [kg s^{-1}].

CC BY NC ND

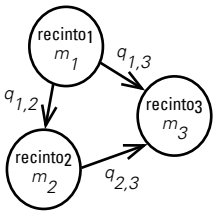


Fig. 44: Estructura espacial

Considerando la figura 44 y los párrafos anteriores, es fácil formular lo siguiente para los recintos 1, 2 y 3, respectivamente:

$$m_1(t) = m_1(0) + \int_0^t \left(-q_{1,2}(\tau) - q_{1,3}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$m_2(t) = m_2(0) + \int_0^t \left(q_{1,2}(\tau) - q_{2,3}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_3(t) = m_3(0) + \int_0^t \left(q_{1,3}(\tau) + q_{2,3}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

que corresponde a la estructura causal de la figura 45 si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho.

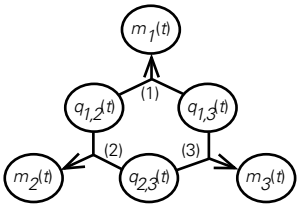


Fig. 45: Estructura causal

Pero la estructura causal de la figura 45 es dudable pues cada una de las 3 ecuaciones contiene 3 variables que evolucionan; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las ecuaciones, se puede plantear 3^3 (=27) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente al formulado recién.

La tabla de la figura 46 insinúa los 27 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente, numerándolos de I a XXVII y sugiriendo las variables despejadas en los lados izquierdos de sus ecuaciones. I es el formulado antes.

BY NC ND

	(1)	(2)	(3)
I	m_1	m_2	m_3
II	m_1	m_2	$q_{1,3}$
III	m_1	m_2	$q_{2,3}$
IV	m_1	$q_{1,2}$	m_3
V	m_1	$q_{1,2}$	$q_{1,3}$
VI	m_1	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$
VII	m_1	$q_{2,3}$	m_3
VIII	m_1	$q_{2,3}$	$q_{1,3}$
IX	m_1	$q_{2,3}$	$q_{2,3}$
X	$q_{1,2}$	m_2	m_3
XI	$q_{1,2}$	m_2	$q_{1,3}$
XII	$q_{1,2}$	m_2	$q_{2,3}$
XIII	$q_{1,2}$	$q_{1,2}$	m_3
XIV	$q_{1,2}$	$q_{1,2}$	$q_{1,3}$
XV	$q_{1,2}$	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$
XVI	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$	m_3
XVII	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$	$q_{1,3}$
XVIII	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$	$q_{2,3}$
XIX	$q_{1,3}$	m_2	m_3
XX	$q_{1,3}$	m_2	$q_{1,3}$
XXI	$q_{1,3}$	m_2	$q_{2,3}$
XXII	$q_{1,3}$	$q_{1,2}$	m_3
XXIII	$q_{1,3}$	$q_{1,2}$	$q_{1,3}$
XXIV	$q_{1,3}$	$q_{1,2}$	$q_{2,3}$
XXV	$q_{1,3}$	$q_{2,3}$	m_3
XXVI	$q_{1,3}$	$q_{2,3}$	$q_{1,3}$
XXVII	$q_{1,3}$	$q_{2,3}$	$q_{2,3}$

Fig. 46: Tabla

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

IX, XIII, XIV, XV, XVIII, XX, XXIII, XXVI y XXVII tienen una variable despejada en los lados izquierdos de 2 ecuaciones y, con ello, suponen que una variable depende de otras según dos dependencias (por ejemplo, IX tiene $q_{2,3}$ en los lados izquierdos de (2) y (3)). Así, no son cuerdos causalmente.

X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XIV, XXV, XXVI y XXVII tienen un caudal saliente despejado en el lado izquierdo de (1) y otro en el derecho, sin despejar (por ejemplo, X tiene $q_{1,2}$ en el lado izquierdo de (1) y $q_{1,3}$ en el derecho). Así, no son ecuánimes ni cuerdos causalmente, lo cual se acentúa en cuan-to surgen más pasadas.

II, III, V, VI, VIII, IX, XI, XII, XIV, XV, XVII, XVIII, XX, XXI, XXIII, XXIV, XXVI y XXVII tienen un caudal entrante despejado en el lado izquierdo de (3) y otro en el derecho,

CC BY NC ND

sin despejar (por ejemplo, II tiene $q_{1,3}$ en el lado izquierdo de (3) y $q_{2,3}$ en el derecho). Así, tampoco son ecuánimes ni cuerdos causalmente.

IV y VII dejan de ser ecuánimes y cuerdos causalmente, en cuanto surgen más pasadas.

De los 27 sistemas de ecuaciones, 26 no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que mantiene la ecuanimidad y la cordura causal: I; es decir, el formulado.

Hablando de viajeros eternos, no es cuerdo plantear que un flujo a través de la frontera de un recinto depende de los otros flujos a través de ella y, por derivación, de la cantidad en el recinto, sino que la cantidad depende por integración de todos los flujos.

Ese era el ingrediente imprevisto de la causalidad.

Ahora podemos preocuparnos acerca de los movimientos de los viajeros y embarcarnos en el desarrollo siguiente.

Imaginemos un cuerpo y una fuerza horizontal *f*, de repulsión o atracción. Exhaustivamente, imaginemos los ocho casos de la figura 47, que sugiere repulsiones mediante flechas en forma de lanza y atracciones mediante flechas en forma de garfio. En los casos I, II, V y VI (con las flechas apuntando adentro del cuerpo), el cuerpo es repelido o atraído; en los casos III, IV, VII y VIII (con las flechas apuntando afuera del cuerpo), el cuerpo repele o atrae.

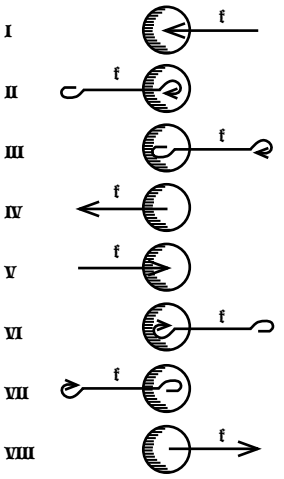


Fig. 47: Ocho casos con un cuerpo y una fuerza

En palabras, la figura 47 sugiere que:

I. el cuerpo es repelido hacia la izquierda por algo en el lado derecho;
II. es atraído hacia la izquierda por algo en el lado izquierdo;
III. atrae hacia la izquierda algo en el lado derecho;
IV. repele hacia la izquierda algo en el lado izquierdo;
V. es repelido hacia la derecha por algo en el lado izquierdo;
VI. es atraído hacia la derecha por algo en el lado derecho;
VII. atrae hacia la derecha algo en el lado izquierdo;

CC BY NC ND

VIII. repele hacia la derecha algo en el lado derecho.

No es difícil conjeturar los comportamientos siguientes, y verificarlos, por ejemplo, observando apartadamente algunos ejercicios musculares hechos a bordo de botes en aguas quietas y sin vientos:

I, II, VII, VIII. el cuerpo se moverá hacia la izquierda si estaba quieto, más rápido hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda, o más despacio hacia la derecha si se movía hacia la derecha;

III, IV, V, VI. se moverá hacia la derecha si estaba quieto, más rápido hacia la derecha si se movía hacia la derecha, o más despacio hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda.

Suponiendo que cada cuerpo se mueve por la diferencia entre un momentum eterno hacia la izquierda (izquierdista) y otro hacia la derecha (derechista), que se alojan circunstancialmente en el cuerpo y pueden viajar, tampoco es difícil aventurar que:

I, II, VII, VIII. el cuerpo se moverá de manera más izquierdista (equivalentemente, menos derechista), porque su momentum neto será así después de recibir un momentum izquierdista por la derecha, o después de recibir un momentum izquierdista por la izquierda, o después de entregar un momentum derechista por la izquierda, o después de entregar un momentum derechista por la derecha;

III, IV, V, VI. se moverá de manera más derechista, porque su momentum neto será así después de entregar un momentum izquierdista por la derecha, o después de entregar un momentum izquierdista por la izquierda, o después de recibir un momentum derechista por la izquierda, o después de recibir un momentum derechista por la derecha.

Y reconociendo que lo anterior corresponde sólo a una escena de una evolución, tampoco es difícil concluir que:

I, II, VII, VIII. el cuerpo se moverá de manera cada vez más izquierdista, porque su momentum neto será así por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum izquierdista viajante de la derecha al cuerpo, o un flujo de momentum izquierdista viajante de la izquierda al cuerpo, o un flujo de momentum derechista viajante del cuerpo a la izquierda, o un flujo de momentum derechista viajante del cuerpo a la derecha;

III, IV, V, VI. se moverá de manera más derechista, porque su momentum neto será así por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum izquierdista viajante del cuerpo a la derecha, o un flujo de momentum izquierdista viajante del cuerpo a la izquierda, o un flujo de momentum derechista viajante de la izquierda al cuerpo, o un flujo de momentum derechista viajante de la derecha al cuerpo.

La figura 48 intenta ilustrar las explicaciones usando flechas largas con extremos en las fronteras de los círculos para representar a los viajes de los momenta fluyentes por las pasadas disponibles, y flechas cortas bajo las letras *f* para sugerir el carácter izquierdista o derechista de tales momenta. Las explicaciones son, así, de estructuras espaciales.

CC BY NC ND

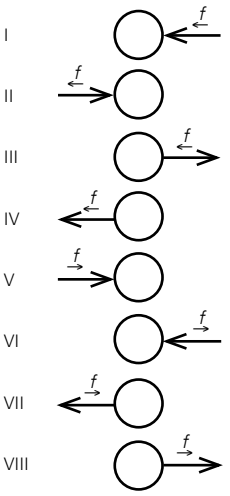


Fig. 48: Estructuras espaciales de los ocho casos con un cuerpo y una fuerza

Si dibujamos otro cuerpo en el extremo suelto de cada flecha de la figura 48, sólo nos quedan los cuatro casos diferentes que la 49 muestra en el lado izquierdo, con sus estructuras espaciales en el derecho.

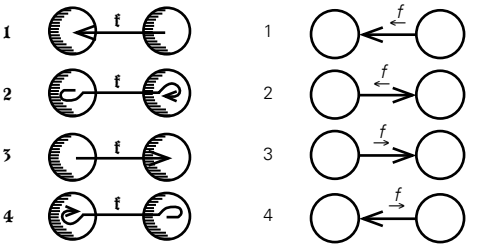


Fig. 49: Cuatro casos con dos cuerpos y una fuerza

En palabras:

1. el cuerpo derecho repele hacia la izquierda al izquierdo (y el izquierdo es repelido así por el derecho); ambos se alejarán mutuamente si estaban a distancia constante, se alejarán más rápido si se alejaban, o se acercarán más despacio si se acercaban; el izquierdo se moverá hacia la izquierda si estaba quieto, más rápido hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda, o más despacio hacia la derecha si se movía hacia la derecha; el derecho se moverá hacia la derecha si estaba quieto, más rápido hacia la derecha si se movía hacia la derecha, o más despacio hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda; el cuerpo izquierdo se moverá de manera cada vez más izquierdista y el derecho, más derechista, porque sus momenta netos serán así por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum izquierdista viajante del cuerpo derecho al izquierdo;

2. el izquierdo atrae hacia la izquierda al derecho; ambos se acercarán mutuamente si están a distancia constante, se acercarán más rápido si se acercaban, o se alejarán más despacio si se alejaban; el izquierdo se moverá hacia la derecha si estaba quieto, más rápido hacia la derecha si se movía hacia la derecha,

BY NC ND

o más despacio hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda; el derecho se moverá hacia la izquierda si estaba quieto, más rápido hacia la izquierda si se movía hacia la izquierda, o más despacio hacia la derecha si se movía hacia la derecha; el cuerpo izquierdo se moverá de manera cada vez más derechista y el derecho, más izquierdista, porque sus momenta netos serán así por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum izquierdista viajante del cuerpo izquierdo al derecho;

3. el izquierdo repele hacia la derecha al derecho; ambos se moverán como en 1, porque sus momenta netos serán como en 1 por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum derechista viajante del cuerpo izquierdo al derecho;

4. el derecho atrae hacia la derecha al izquierdo; ambos se moverán como en 2, porque sus momenta netos serán como en 2 por causa de la fuerza *f*, que es un flujo de momentum derechista viajante del derecho al izquierdo.

No es difícil conjeturar los comportamientos para más cuerpos y fuerzas, incluyendo en éstas a las de aguas borrascosas, vientos, roces y pesos, y suponiendo que tales fuerzas (como las lanzas y garfios iniciales) no se vulneran mutuamente.

La descomposición en componentes rectilíneas perpendiculares, y el deslizamiento rectilíneamente horizontal o vertical de escuadras en el seguimiento de los gráficos, se parecen sin duda y permiten resumir los movimientos rectilíneos. Escojamos el primer caso de la figura 49. La idea de la descomposición autoriza a suponerlo como un análisis en una sola dirección. A su vez, eso autoriza a generalizarlo según el lado izquierdo de la figura 50, con la flecha del momentum fluyente, bajo la letra *f*, inclinada de cualquier manera. Esto último se acostumbra simbolizar según el lado derecho de la figura 50, dibujando sobre la *f* una flecha hacia la derecha y diciendo que *f* es un vector. Así el cuarto caso de la figura 49 (cuya flecha bajo la *f* era hacia la derecha por mera coincidencia) se incorpora al de la 50.

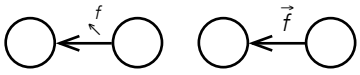


Fig. 50: Generalización

Por supuesto, podríamos hacer una labor parecida a la de la flecha del momentum fluyente con la flecha del viaje del momentum fluyente, que tiene sus extremos en las fronteras de los círculos; pero no lo haremos porque nos obligaría a hablar más allá de los vectores.

Los momenta se pueden descomponer en componentes rectilíneas y perpendiculares entre sí, y se diagnostican computando cada uno de sus componentes como producto de la masa y de la componente respectiva de la velocidad.

Hablemos de componentes y hagamos, de la generalización de la figura 50, los dos casos de la 51, donde se trata de suponer que uno de los cuerpos es el doble del otro; o, más pedestremente, que uno en realidad son dos parecidos al otro, pero puestos en conjunto por un cambio en el punto de vista espacial.

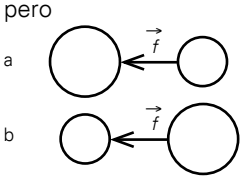


Fig. 51: Dos casos

En el caso a, si la fuerza $\vec{f}$ es un flujo de momentum eterno que viaja del cuerpo pequeño al grande, en realidad viaja de un cuerpo a dos, todos parecidos, y debiera disminuir el momentum de aquel uno tanto como aumenta el de estos dos, en total; pero el aumento en cada uno de estos dos, que debieran repartírselo, debiera ser la mitad de la disminución en aquel uno. Las mediciones indican que el aumento de

CC BY NC ND

velocidad del cuerpo grande es la mitad de la disminución de la del pequeño, y sugieren, por consiguiente, que la velocidad resulta de un reparto de momentum.

En el caso b, si la fuerza $\vec{f}$ es un flujo de momentum eterno que viaja del cuerpo grande al pequeño, en realidad viaja de dos cuerpos a uno, todos parecidos, y debiera disminuir el momentum de aquellos dos, en total, tanto como aumenta el de este uno; pero el aumento en este uno debiera ser el doble de la disminución en cada uno de aquellos dos, que debieran repartírsela. Las mediciones indican que el aumento de la velocidad del cuerpo pequeño es el doble de la disminución de la del grande, y sugieren, consistentemente, que la velocidad resulta de un reparto de momentum.

Pero, al hablar aquí de cuerpos parecidos, ¿de qué parecido hablamos?

No es del parecido de forma ni del de tamaño, porque no da lo mismo repeler o atraer una bola de fierro hueca y otra parecida en forma y tamaño, pero maciza.

Y precisamente ahí debiera estar la respuesta: las dos bolas son atraídas por la Tierra y la atracción, que corresponde a la fuerza de peso o, mejor, que delata a la masa, es lo que manifiesta la diferencia decisiva entre ellas, y puede manifestar un parecido igualmente decisivo, por ejemplo, entre la bola maciza y otro cuerpo de forma y tamaños distintos.

Hablamos del parecido de masa.

Ya está. ¿Qué es, entonces, un cuerpo como los que estamos mencionando? Es un recinto espacial, según algún punto de vista; y puede tener acumulados momenta y masas. La velocidad del cuerpo (total) depende del momentum neto y de la masa (totales), por reparto (división); el momentum neto depende de las fuerzas entrantes netamente, por acumulación; y la masa depende de los caudales de masa entrantes netamente, también por acumulación:

$$\vec{V}_k = \vec{P}_k \big/ M_k$$

$$\vec{P}_{k+1} = \vec{P}_k + \vec{F}_k \cdot dt$$

$$M_{k+1} = M_k + Q_k \cdot dt$$

o, mejor:

$$\vec{v}(t) = \vec{p}(t) \big/ m(t)$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) + \int_0^t \vec{f}(\tau) \cdot d\tau$$

$$m(t) = m(0) + \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau$$

donde t es el tiempo, en [s]; $\vec{v}$ es la velocidad del cuerpo, en [m s^{-1}], $\vec{p}$ es su momentum neto, en [N s], m es su masa, en [kg], $\vec{f}$ es la fuerza entrante netamente en él, en [N], y q es el caudal entrante netamente en él, en [kg s^{-1}].

La figura 52 propone estructuras espaciales y causales para los primeros casos de la 43 y de la 51, como ejemplos. En la figura 52, m, q, V, h, $\vec{p}$, $\vec{f}$ y $\vec{v}$ sugieren una masa, en [kg], un caudal, en [kg s^{-1}], un volumen, en [m^3], un nivel, en [m], un momentum, en [N s], una fuerza, en [N], y una velocidad, en [m s^{-1}], respectivamente,

CC BY NC ND

e *i* y *d* refieren esas variables al estanque o cuerpo izquierdo y al estanque o cuerpo derecho, respectivamente.

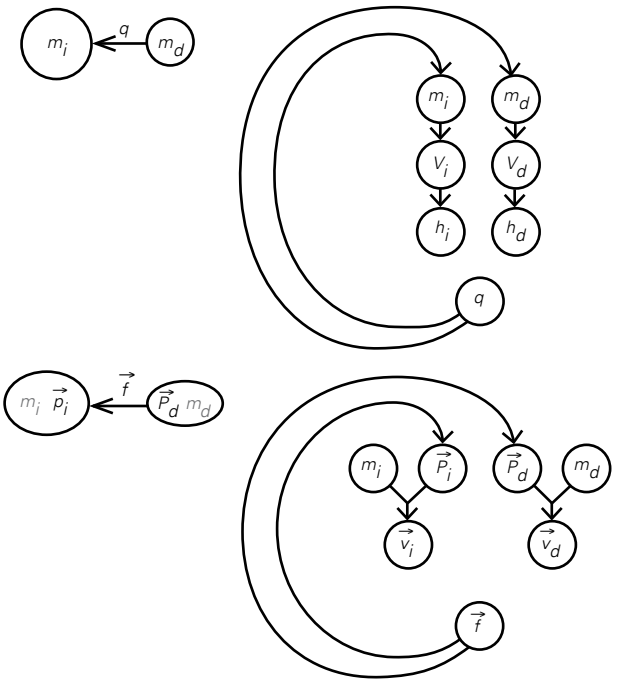


Fig. 52: Estructuras espaciales (en el lado izquierdo) y causales (en el derecho) de los primeros casos de la figura 43 (arriba) y 51 (abajo)

Cerca de la figura 47, lo propuesto para verificar los comportamientos de los cuerpos repelidos o atraídos mediante lanzas o garfios es observar, apartadamente, algunos ejercicios musculares hechos a bordo de botes; no es actuar en esos ejercicios. El asunto está en que nuestros músculos y sentidos son de nuestros cuerpos, y, si repelemos o atraemos otros cuerpos, vemos que ellos se mueven, y, más, que casi todo el universo se mueve (aunque no como dichos cuerpos); pero no vemos que nos movemos nosotros, y, sin embargo, por momentos, percibimos algunos indicios cinéticos en nosotros mismos. Resumiendo, está en que, según nuestra visión, con el acto de repulsión o atracción parecen haber nacido momenta (no eternos) en los cuerpos repelidos o atraídos, y en casi todo el universo, sin concesiones nuestras; en que nuestros indicios cinéticos concuerdan más (pero al revés) con el nacimiento presunto de los momenta que con nuestra visión; en que ese nacimiento presunto no concuerda con las presunciones de los otros actores del ejercicio, ni con las de los observadores; y en que las presunciones de los observadores concuerdan mucho más entre sí que las nuestras y las de los otros actores. Ese dilema induce a pensar en ilusiones, a buscar algún absolutismo cercano a los observadores para corregir lo ilusorio, y a perfilar e incluso bautizar a los observadores más confiables, que se los considera varios, se los llama observadores inerciales, se les otorga permiso para mantener velocidades constantes entre sí, y se les exige afinamientos de las observaciones cuando son rápidos.

Computando (la mitad de) el producto de la masa y el cuadrado de la magnitud de la velocidad de un cuerpo, se diagnostican viajeros eternos (energías) que se

CC BY NC ND

alojan circunstancialmente en el cuerpo (como energías cinéticas) y pueden viajar constituyendo flujos (potencias) a otros cuerpos o sus inmediaciones (como energías cinéticas o potenciales).

Etcétera.

Hay caudales de masa (flujos de masa), fuerzas (flujos de momentum) y potencias (flujos de energía) dominando a masas, momenta y energías (eternos), respectivamente y por acumulación. Hay masas dominando a volúmenes y niveles, y masas y momenta dominando a velocidades. Y hay variables dominando a caudales de masa, fuerzas o potencias. Hagámoslas aparecer en diversos casos y abusando un poco: reiniciando todo en cada caso.

BY NC ND

3.0

AGUA EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES)

En la Italia de fines del siglo 16 y principios del 17, Galileo Galilei (1564-1642) estudió los efectos de disminuir los roces en las caídas de algunos cuerpos terrestres y extrapoló la cinemática de las caídas libres de todo roce, cerca del mar. Según esa extrapolación, para un cuerpo cualquiera en caída libre mientras transcurre el tiempo t, en [s], la velocidad vertical $v(t)$, en [m s^{-1}] hacia abajo, y la posición vertical $y(t)$, en [m] hacia abajo desde una referencia, resultan ser, respectivamente:

$$v(t) = v(0) + 9.8 \cdot t$$

$$y(t) = y(0) + v(0) \cdot t + \frac{9.8}{2} \cdot t^2$$

donde $v(0)$ es la velocidad inicialmente, en [m s^{-1}] hacia abajo, e $y(0)$ es la posición inicialmente, en [m] hacia abajo desde la referencia.

Con eso es fácil deducir la velocidad del cuerpo según su posición, si se lo deja caer desde la referencia de manera que $v(0)=0$ e $y(0)=0$: despejando t en la primera ecuación, insertando el despeje en la segunda y despejando v:

$$v(t) = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot y(t)}$$

Poco tiempo después, habiendo estudiado los escritos de Galilei, Evangelista Torricelli (1608-1647) propuso que la velocidad de un líquido cualquiera al salir de un recipiente perforado por un orificio resulta ser (casi) la que tendría si se lo deja caer libremente desde la superficie que muestra en el recipiente hasta el orificio (cancelándose los rebotes internos, unos contrarios y otros favorables):

$$v(t) = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot h(t)}$$

donde $h(t)$ es el nivel de la superficie del líquido desde el orificio, en [m].

Así, para que aparezca ese nivel dominando al caudal de líquido saliente $q_o(t)$, en [kg s^{-1}], sólo falta notar que:

$$q_o(t) = \rho \cdot A \cdot v(t) = \rho \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot h(t)} = K \cdot \sqrt{h(t)}$$

donde ρ es la densidad del líquido, en [kg m^3], y A es el área de paso por el orificio, en [m^2].

Imaginemos, pues, un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio.

CC BY NC ND

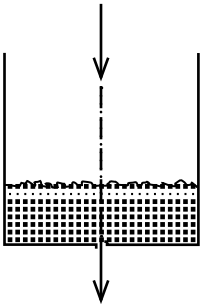


Fig. 1: Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

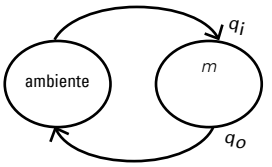


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m] hacia arriba:

$$h\left(t\right)=\frac{V\left(t\right)}{\pi\cdot R^2} \tag{1}$$

$V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]; R es el radio del estanque, en [m]:

$$V\left(t\right)=\frac{m\left(t\right)}{\rho} \tag{2}$$

$$R=1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m\left(t\right)=m\left(0\right)+\int_0^t\left(q_i\left(\tau\right)-q_o\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$$\rho=1000 \tag{5}$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m\left(0\right)=3140 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q_i\left(t\right)=\begin{cases}0.500 & \text{si } 0\le t<1800\\ 0.733 & \text{si } 1800\le t<19800\\ 0.600 & \text{si } 19800\le t\end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

CC BY NC ND

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \qquad (8)$$

K es un coeficiente de salida del agua, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (9)$$

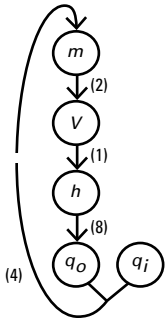


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (6) y (9) no contienen ninguna variable que evoluciona: (7) contiene 1; (1), (2) y (8) contienen 2 cada una; (4), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(9).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(4) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(9), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(9).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integración en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m inicial, q_i, R, ρ, K, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(9) como:

$$R = \ldots \qquad (3')$$

$$\rho = \ldots \qquad (5')$$

$$K = \ldots \qquad (9')$$

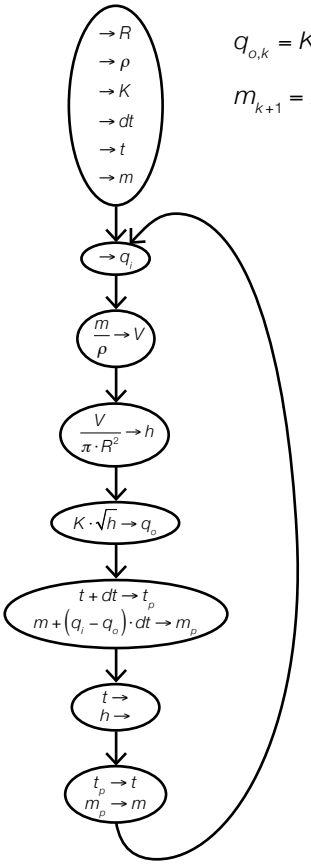
$$m_0 = \ldots \qquad (6')$$

$$q_{i,k} = \ldots \qquad (7')$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \qquad (2')$$

$$h_k = \frac{V_k}{\pi \cdot R^2} \qquad (1')$$

CC BY NC ND



$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \tag{8'}$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k}\right) \cdot dt \tag{4'}$$

Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

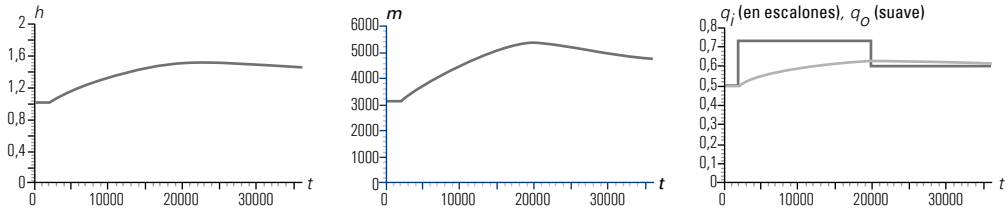


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (8), (1) y (2):

BY NC ND

$$\frac{dm(t)}{dt} = -K \cdot \sqrt{\frac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho}} + q_i(t) \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro del estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (2):

$$h(t) = \frac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} \qquad \text{(a2)}$$

Apéndice acerca de los argumentos respecto a (1)-(9) y la causalidad.

(1), (2), (4), (7) y (8) contienen las variables que evolucionan insinuadas por la figura A1.

(1)	(2)	(4)	(7)	(8)
h	V	m	q_i	q_o
V	m	q_i		h
		q_o		

Fig. A1: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (1) se puede despejar h o V, en (2) V o m,… y en (8) q_o o h; no que en (1), (2), (4), (7) y (8), respectivamente, se pueden despejar h, V, m, q_i y q_o, o algo más)

La figura A1 garantiza que, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de la ecuación que la contiene, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(9).

Descartando despejar cualquier caudal de masa donde una masa debe depender por integración de todos los caudales, la situación se reduce según insinúa la figura A2.

(1)	(2)	(4)	(7)	(8)
h	V	m	q_i	q_o
V	m			h

Fig. A2: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

La figura A2 garantiza que los sistemas de ecuaciones cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3$ (=8).

Descartando despejar m y q_i repetidamente, la situación se reduce según insinúa la figura A3.

(1)	(2)	(4)	(7)	(8)
h	V	m	q_i	q_o
V				h

Fig. A3: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

CC BY NC ND

Descartando despejar *V* repetidamente, la situación se reduce según insinúa la figura A4.

(1)	(2)	(4)	(7)	(8)
h	V	m	q_i	q_o
				h

Fig. A4: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Y descartando despejar *h* repetidamente, la situación se reduce según insinúa la figura A5.

(1)	(2)	(4)	(7)	(8)
h	V	m	q_i	q_o

Fig. A5: Variables que pueden despejarse atendiendo a la causalidad

La figura A5 garantiza que sólo hay 1 sistema de ecuaciones cuerdo causalmente: (1)-(9).

Tácitamente, este libro repite garantías parecidas tras sus argumentos majaderos respecto a otros sistemas de ecuaciones y la causalidad.

CC BY NC ND

4.0

AGUA EN UN ESTANQUE CÓNICO CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un estanque cónico con eje de simetría vertical y con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio.

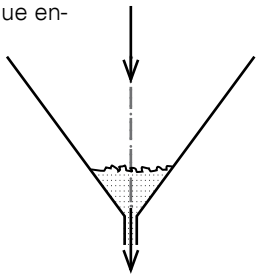


Fig. 1: Agua en un estanque cónico con eje vertical

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

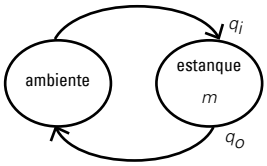


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]:

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2}} \tag{1}$$

$V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]; H_T es la altura total del estanque, en [m]; R_T es el radio del estanque para esa altura, en [m]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \tag{2}$$

$$H_T = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$R_T = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{5}$$

$$\rho = 1000 \tag{6}$$

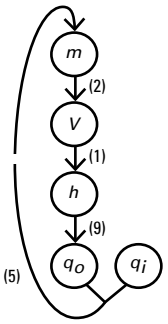
CC BY NC ND

m(0) es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 1047 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_i(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si } 0 \le t < 1800 \\ 0.733 & \text{si } 1800 \le t < 19800 \\ 0.600 & \text{si } 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{9}$$



K es un coeficiente de salida del agua, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (6), (7) y (10) no contienen ninguna variable que evoluciona: (8) contiene 1; (1), (2) y (9) contienen 2 cada una; (5), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(5) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integración en (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m inicial, q_i, H_T, R_T, ρ, K, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(10) como:

CC BY NC ND

$$H_T = \ldots \quad (3')$$

$$R_T = \ldots \quad (4')$$

$$\rho = \ldots \quad (6')$$

$$K = \ldots \quad (10')$$

$$m_0 = \ldots \quad (7')$$

$$q_{i,k} = \ldots \quad (8')$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \quad (2')$$

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_k \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2}} \quad (1')$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \quad (9')$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k}\right) \cdot dt \quad (5')$$

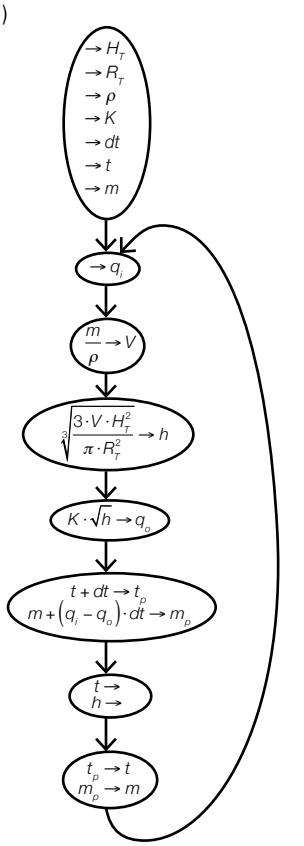


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

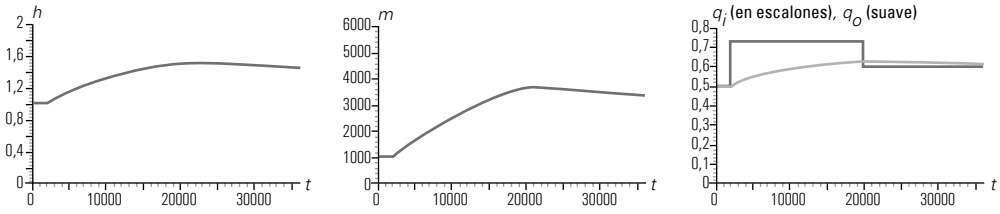


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (5) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (5) e insertando (9), (1) y (2):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -K \cdot \sqrt[6]{\frac{3 \cdot m(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2 \cdot \rho}} + q_i(t) \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro del estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (2):

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2 \cdot \rho}} \qquad \text{(a2)}$$

Apéndice acerca de la Geometría para (1)

Si h es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; R es el radio del estanque para ese nivel, en [m]; H_T es la altura total del estanque, en [m]; R_T es el radio del estanque para esta altura, en [m]; a es el área de la superficie superior del agua, en [m^2]; V es el volumen del agua, en [m^3]:

$$R = \frac{R_T}{H_T} \cdot h$$

$$a = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \frac{R_T^2}{H_T^2} \cdot h^2$$

$$V = \int_0^h a \cdot dx = \int_0^h \pi \cdot \frac{R_T^2}{H_T^2} \cdot x^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{R_T^2}{H_T^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$V = \int_0^h a \cdot dx = \int_0^h \pi \cdot \frac{R_T^2}{H_T^2} \cdot x^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{R_T^2}{H_T^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

CC BY NC ND

5.0

AGUA EN UN ESTANQUE ESFÉRICO (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un estanque esférico con agua que entra sueltamente por arriba, a través de un orificio amplio, reposa y sale por abajo a través de otro orificio.

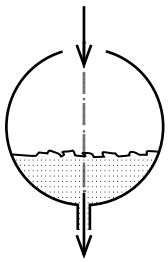


Fig. 1: Agua en un estanque esférico

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa en el fondo, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

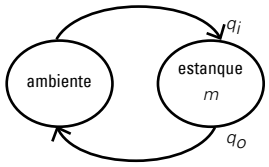


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].
$h(t)$ es el nivel del agua, en [m]:

$$h(t) = R \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(1 - \frac{3 \cdot V(t)}{2 \cdot \pi \cdot R^3} \right) - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right) \quad (1)$$

R es el radio del estanque, en [m]; $V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]:

$$R = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (2)$$

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \quad (3)$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$\rho = 1000 \quad (5)$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 2035 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

CC BY NC ND

$$q_i(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si} \quad 0 \le t < 1800 \\ 0.733 & \text{si} \quad 1800 \le t < 19800 \\ 0.600 & \text{si} \quad 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{8}$$

K es un coeficiente de salida del agua, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

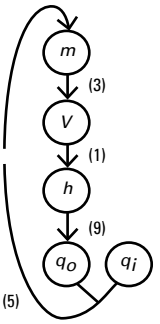


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (5), (6) y (9) no contienen ninguna variable que evoluciona: (7) contiene 1; (1), (3) y (8) contienen 2 cada una; (4), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(9).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(4) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(9), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(9).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integración en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m inicial, q_i, R, ρ, K, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(9) como:

$$R = \ldots \tag{2'}$$

$$\rho = \ldots \tag{5'}$$

$$K = \ldots \tag{9'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$q_{i,k} = \ldots \tag{7'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{3'}$$

BY NC ND

$$h_k = R \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(1 - \frac{3 \cdot V_k}{2 \cdot \pi \cdot R^3} \right) - \frac{2}{3} \cdot \pi \right) \right) \qquad (1')$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \qquad (8')$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k} \right) \cdot dt \qquad (4')$$

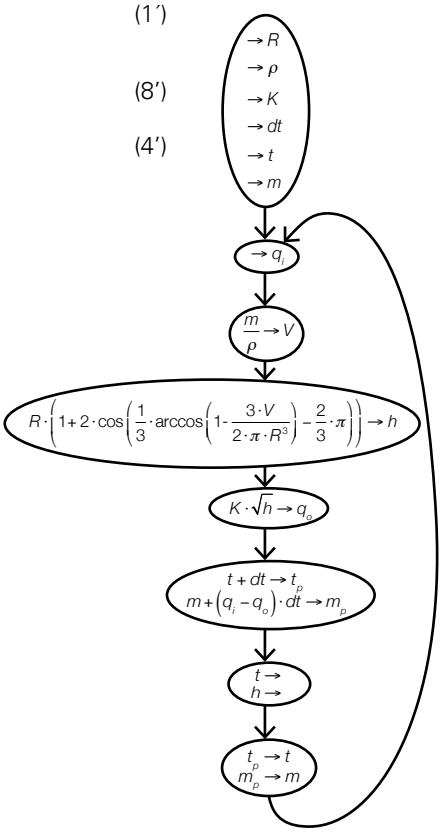


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

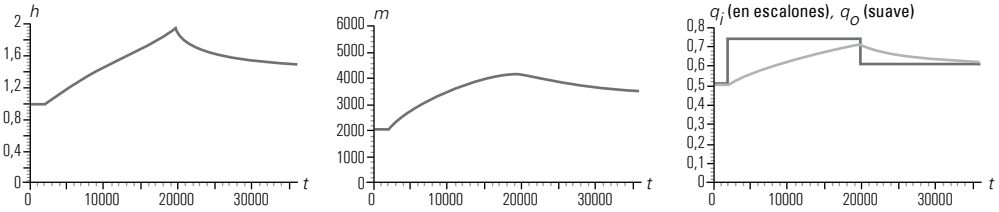


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (8), (1) y (3):

BY NC ND

$$\frac{dm(t)}{dt} = -K \cdot \sqrt{R \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(1 - \frac{3 \cdot m(t)}{2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho}\right) - \frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right)} + q_i(t) \quad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro del estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (3):

$$h(t) = R \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(1 - \frac{3 \cdot m(t)}{2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho}\right) - \frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right) \quad \text{(a2)}$$

Apéndice acerca de la Geometría para (1)

Si *d* es la distancia vertical desde el centro del estanque esférico hasta la superficie superior del agua, en [m]; *h* es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; *R* es el radio del estanque, en [m]; *r* es el radio de la superficie superior del agua, en [m]; *a* es el área de esa superficie, en [m^2]; *V* es el volumen del agua, en [m^3]:

$$d = h - R$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$a = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(R^2 - d^2\right)$$

$$V = \int_{-R}^{d} a \cdot dx = \int_{-R}^{d} \pi \cdot \left(R^2 - x^2\right) \cdot dx = \pi \cdot \left(R^2 \cdot d - \frac{d^3}{3} + \frac{2 \cdot R^3}{3}\right)$$

La última ecuación puede replantearse como una cúbica:

$$\left(\frac{d}{R}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{d}{R}\right) + 4 \cdot \left(\frac{V}{V_T}\right) - 2 = 0 \quad \text{donde} \quad V_T = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

y la resolución algebraica de ecuaciones cúbicas fue dilucidada en la Italia del siglo 16 por Nicolo Fontana ("Tartaglia", 1505-1557) y Girolamo Cardano (1501-1576), usando una contribución anterior de Scipione dal Ferro (1495-1526).

Supongamos:

$$\frac{d}{R} = \alpha + \beta$$

Entonces:

$$\frac{d}{R} = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad \alpha^3 + \beta^3 + 3 \cdot \left(\alpha \cdot \beta - 1\right) \cdot \left(\alpha + \beta\right) + 4 \cdot \left(\frac{V}{V_T}\right) - 2 = 0$$

Ahora, supongamos:

$$\frac{d}{R} = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad \alpha \cdot \beta - 1 = 0$$

Entonces:

BY NC ND

$$\frac{d}{R}=\alpha+\beta \quad \text{y} \quad \beta=\frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \alpha^3+\beta^3+4\cdot\frac{V}{V_T}-2=0$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+4\cdot\frac{V}{V_T}-2=0$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \left(\alpha^3\right)^2+\left(4\cdot\frac{V}{V_T}-2\right)\cdot\alpha^3+1=0$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \;\text{y}\; \alpha^3=\frac{-\left(4\cdot\frac{V}{V_T}-2\right)\pm\sqrt{\left(4\cdot\frac{V}{V_T}-2\right)^2-4}}{2}$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \alpha^3=1-2\cdot\frac{V}{V_T}\pm i\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{V}{V_T}\cdot\left(1-\frac{V}{V_T}\right)}$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad \alpha=\sqrt[3]{A}\cdot e^{i\cdot(\theta+2\cdot n\cdot\pi)/3}$$

$$\text{y} \quad A=\left|1-2\cdot\frac{V}{V_T}\pm i\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{V}{V_T}\cdot\left(1-\frac{V}{V_T}\right)}\right|=1$$

$$\text{y} \quad \theta=\pm\arccos\frac{1-2\cdot\frac{V}{V_T}}{1}=\pm\arccos\left(1-2\cdot\frac{V}{V_T}\right)$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=e^{i\cdot(\theta+2\cdot n\cdot\pi)/3}+e^{-i\cdot(\theta+2\cdot n\cdot\pi)/3} \;\text{y}\; \theta=\pm\arccos\left(1-2\cdot\frac{V}{V_T}\right)$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=2\cdot\cos\left(\theta+2\cdot n\cdot\pi\right) \;\text{y}\; \theta=\pm\arccos\left(1-2\cdot\frac{V}{V_T}\right)$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=2\cdot\cos\left(\frac{\arccos\left(1-2\cdot\frac{V}{V_T}\right)+2\cdot n\cdot\pi}{3}\right)$$

$$\text{luego} \quad \frac{d}{R}=2\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(1-\frac{3\cdot V}{2\cdot\pi\cdot R^3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$$

La ecuación cúbica tiene sólo una raíz real entre –1 y 1, ya que su derivada no es 0 (exceptuando el caso en que V/V_T=1/2, cuyas raíces son -√3, 0 y √3). Por consiguiente, según evaluaciones simples, para –1< d/R<1:

$$\frac{d}{R}=2\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(1-\frac{3\cdot V}{2\cdot\pi\cdot R^3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\pi\right)=\frac{h-R}{R}$$

$$\text{luego} \quad h=R\cdot\left(1+2\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(1-\frac{3\cdot V}{2\cdot\pi\cdot R^3}\right)-\frac{2}{3}\cdot\pi\right)\right)$$

CC BY NC ND

6.0

AGUA EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría horizontal; con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio.

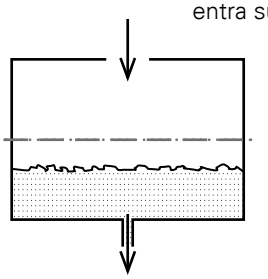


Fig. 1: Agua en un estanque cilíndrico con eje horizontal

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

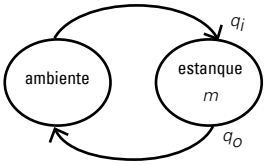


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]:

$$h\left(t\right)\approx R\cdot\left(1+1.5\cdot\left(\frac{V\left(t\right)}{\pi\cdot l\cdot R^2}-\frac{1}{2}\right)+0.6\cdot\left(\frac{V\left(t\right)}{\pi\cdot l\cdot R^2}-\frac{1}{2}\right)^3+5\cdot\left(\frac{V\left(t\right)}{\pi\cdot l\cdot R^2}-\frac{1}{2}\right)^5\right) \tag{1}$$

R es el radio del estanque, en [m]; $V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]; l es la longitud axial del estanque, en [m];

$$R=1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$V\left(t\right)=\frac{m\left(t\right)}{\rho} \tag{3}$$

$$l=5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

CC BY NC ND

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{5}$$

$$\rho = 1000 \tag{6}$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0)=7850 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_i(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si } 0 \le t < 1800 \\ 1.00 & \text{si } 1800 \le t < 19800 \\ 0.600 & \text{si } 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{9}$$

K es un coeficiente de salida del agua, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

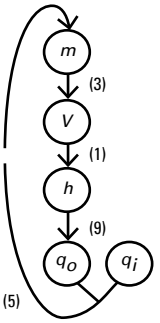


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (4), (6), (7) y (10) no contienen ninguna variable que evoluciona: (8) contiene 1; (1), (3) y (9) contienen 2 cada una; (5), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(5) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integración en (5);

BY NC ND

si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m inicial, q_i, *R, l,* ρ, *K, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(10) como:

$$R = \ldots \tag{2'}$$

$$l = \ldots \tag{4'}$$

$$\rho = \ldots \tag{6'}$$

$$K = \ldots \tag{10'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{7'}$$

$$q_{i,k} = \ldots \tag{8'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{3'}$$

$$h_k = R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \tag{1'}$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \tag{9'}$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k} \right) \cdot dt \tag{5'}$$

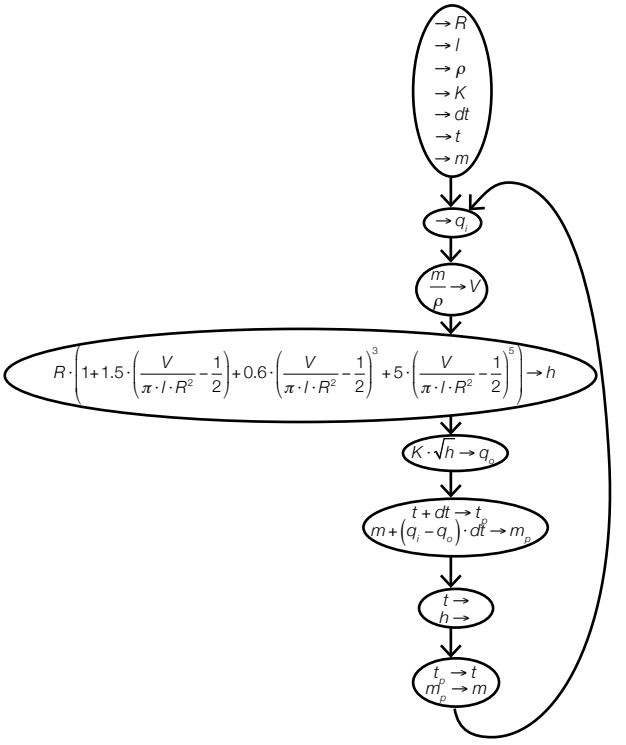


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

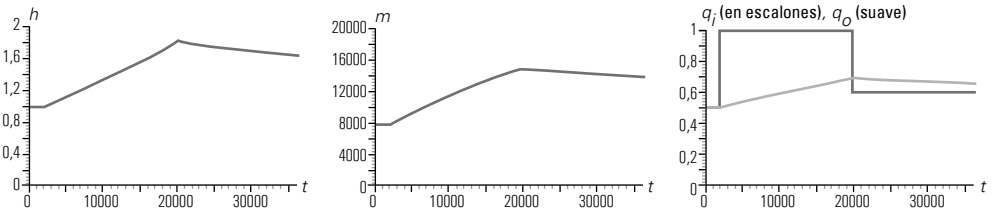


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (5) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (5) e insertando (9), (1) y (3):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -K \cdot \sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right)^5\right)} + q_i(t)$$

(a1)

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro del estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (3):

$$h(t) = R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2}\right)^5\right)$$

(a2)

Apéndice acerca de la Geometría para (1)

Si *d* es la distancia vertical desde el centro del estanque hasta la superficie superior del agua, en [m]; *h* es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; *R* es el radio del estanque, en [m]; *r* es la mitad de la longitud transversal de la superficie superior del agua, en [m]; *l* es el longitud axial de esa superficie, en [m]; *a* es el área de esa superficie, en [m2]; *V* es el volumen del agua, en [m^3]:

$$d = h - R$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$a = 2 \cdot r \cdot l = 2 \cdot \sqrt{R^2 - d^2} \cdot l$$

BY NC ND

$$V = \int_{-R}^{d} a \cdot dx = \int_{-R}^{d} 2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot l \cdot dx$$

$$= 2 \cdot l \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right) \Bigg|_{-R}^{d}$$

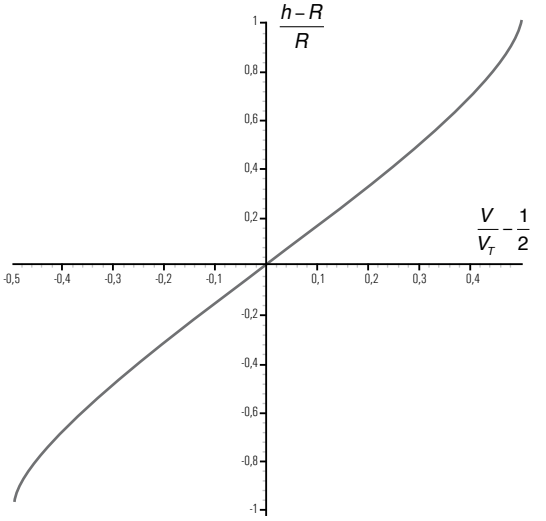
$$= l \cdot R^2 \cdot \left(\arcsin\left(\frac{d}{R}\right) + \frac{d}{R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

luego $\arcsin\left(\frac{d}{R}\right) + \frac{d}{R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2} = \pi \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right)$

y $V_T = \pi \cdot l \cdot R^2$

Es muy difícil despejar *h* algebraicamente.

Por eso, valgan el gráfico de (*h*-*R*)/*R* versus (V/V_T-1/2) y la aproximación por polinomio (ideada según el gráfico), que siguen:



$$\frac{h-R}{R} \approx 1.5 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right)^5$$

y $V_T = \pi \cdot l \cdot R^2$

Con esa aproximación los errores para (*h*-*R*)/*R* quedan entre -0.02 y 0.02 (±1% del total), por lo que podemos suponer:

$$h \approx R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V}{V_T} - \frac{1}{2}\right)^5 \right)$$

y $V_T = \pi \cdot l \cdot R^2$

CC BY NC ND

7.0

AGUA EN UNA REPRESA [2] (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos una represa en el curso de un río cordillerano.

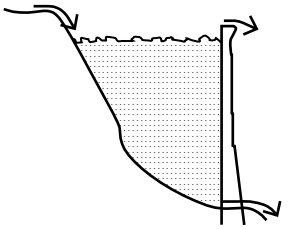


Fig. 1: Agua en una represa

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa en la represa, suponiendo que a ésta se le extrae un caudal para regadío, (casi) en el extremo inferior, y se le permite desbordarse, en el superior.

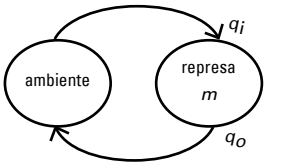


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].
$h(t)$ es la altura del agua, en [m]:

$$h(t) \approx 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot V^{0.55}(t) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{1}$$

$V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \tag{2}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro de la represa, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_{or}(\tau) - q_{od}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{3}$$

$$\rho = 1000 \tag{4}$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente a la represa, en [kg s^{-1}]; $q_{or}(t)$ es el caudal de agua que viaja de la represa al ambiente, para regadío, en [kg s^{-1}]; $q_{od}(t)$ es el caudal de agua que viaja de la represa al ambiente, por desborde, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 3.0 \cdot 10^{12} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

[2] Recorte de: J. Glaría, B. Irarrázaval y J. Yuz, 2000, Simulación simplificada de una represa hidroeléctrica, *Informe interno.Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.*

CC BY NC ND

$$q_i(t) \approx \begin{cases} 4.6\cdot10^5 & \text{si } 0 \le t < 0.27\cdot10^7 \\ 3.3\cdot10^5 & \text{si } 0.27\cdot10^7 \le t < 0.51\cdot10^7 \\ 2.3\cdot10^5 & \text{si } 0.51\cdot10^7 \le t < 0.78\cdot10^7 \\ 2.4\cdot10^5 & \text{si } 0.78\cdot10^7 \le t < 1.03\cdot10^7 \\ 4.4\cdot10^5 & \text{si } 1.03\cdot10^7 \le t < 1.30\cdot10^7 \\ 4.7\cdot10^5 & \text{si } 1.30\cdot10^7 \le t < 1.56\cdot10^7 \\ 4.8\cdot10^5 & \text{si } 1.56\cdot10^7 \le t < 1.83\cdot10^7 \\ 4.7\cdot10^5 & \text{si } 1.83\cdot10^7 \le t < 2.10\cdot10^7 \\ 4.2\cdot10^5 & \text{si } 2.10\cdot10^7 \le t < 2.36\cdot10^7 \\ 4.5\cdot10^5 & \text{si } 2.36\cdot10^7 \le t < 2.63\cdot10^7 \\ 5.8\cdot10^5 & \text{si } 2.63\cdot10^7 \le t < 2.89\cdot10^7 \\ 5.9\cdot10^5 & \text{si } 2.89\cdot10^7 \le t < 3.15\cdot10^7 \end{cases}$$

(por ejemplo, mes a mes) (6)

$$q_{or}(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } h(t) < 1 \\ 6.3\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 0 \le t < 0.27\cdot10^7 \\ 7.2\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 0.27\cdot10^7 \le t < 0.51\cdot10^7 \\ 7.1\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 0.51\cdot10^7 \le t < 0.78\cdot10^7 \\ 6.2\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 0.78\cdot10^7 \le t < 1.03\cdot10^7 \\ 5.4\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 1.03\cdot10^7 \le t < 1.30\cdot10^7 \\ 3.5\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 1.30\cdot10^7 \le t < 1.56\cdot10^7 \\ 1.8\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 1.56\cdot10^7 \le t < 1.83\cdot10^7 \\ 1.0\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 1.83\cdot10^7 \le t < 2.10\cdot10^7 \\ 1.9\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 2.10\cdot10^7 \le t < 2.36\cdot10^7 \\ 3.3\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 2.36\cdot10^7 \le t < 2.63\cdot10^7 \\ 4.2\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 2.63\cdot10^7 \le t < 2.89\cdot10^7 \\ 5.4\cdot10^5 & \text{si } 1 \le h(t) \text{ y } 2.89\cdot10^7 \le t < 3.15\cdot10^7 \end{cases}$$

(por ejemplo, ídem) (7)

$$q_{od}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(t) < H_T \\ K\cdot\sqrt{h(t) - H_T} & \text{si } H_T \le h(t) \end{cases} \quad (8)\ ^3$$

[3] Probablemente, sería mejor

$$q_{od}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(t) < H_T \\ K'\cdot\sqrt{\left(h(t) - H_T\right)^3} & \text{si } H_T \le h(t) \end{cases}$$

porque el área de pasada para el desborde no es constante sino proporcional a la altura del desborde mismo.

CC BY NC ND

K es un coeficiente de salida del agua por desborde, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; H_T es la altura total de la represa, en [m]:

$K = 2.5 \cdot 10^7$ (por ejemplo) (9)

$H_T = 20$ (por ejemplo) (10)

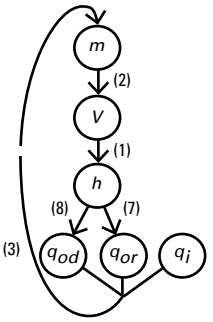


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (9) y (10) no contienen ninguna variable que evoluciona: (6) contiene 1; (1), (2), (7) y (8) contienen 2 cada una; (3), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 6 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^4 \cdot 4^1$ (=64) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(3) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 4 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 64 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^4$ (=16).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 16 sistemas de ecuaciones restantes, 15 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integral en (3); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m inicial, q_i, ρ, K, H_T, una referencia para q_{or}, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(10) como:

$\rho = \ldots$ (4′)

$K = \ldots$ (9′)

$H_T = \ldots$ (10′)

$m_0 = \ldots$ (5′)

$q_{i,k} = \ldots$ (6′)

CC BY NC ND

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{2'}$$

$$h_k = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot V_k^{0.55} \tag{1'}$$

$$q_{od,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_k < H_T \\ K \cdot \sqrt{h_k - H_T} & \text{si} \quad H_T \le h_k \end{cases} \tag{8'}$$

$$q_{or,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_k < 1 \\ q_{or,ref,k} & \text{si} \quad 1 \le h_k \end{cases} \tag{7'}$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{or,k} - q_{od,k}\right) \cdot dt \tag{3'}$$

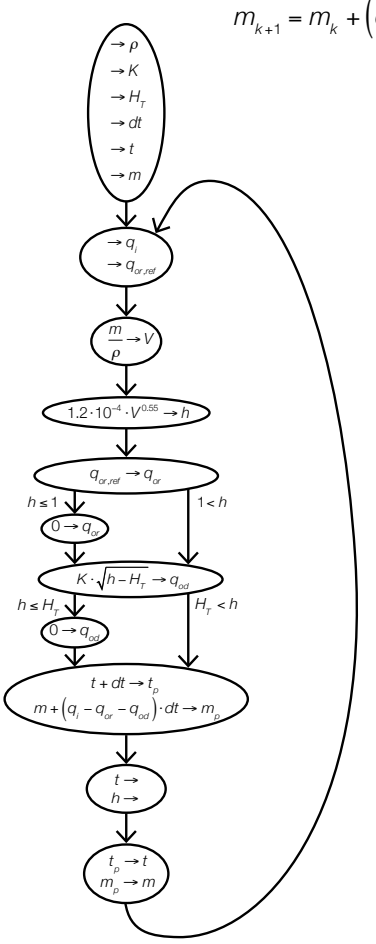


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1000 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 5.

BY NC ND

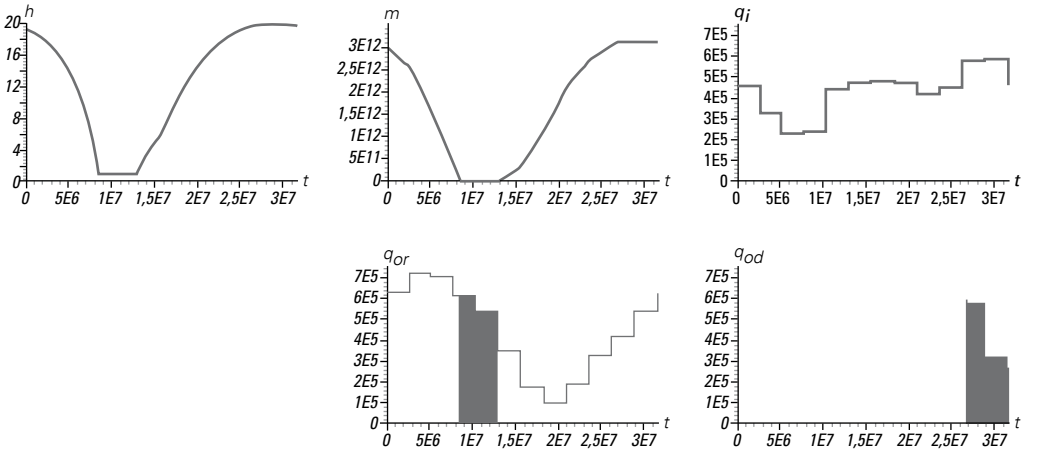


Fig. 5: Predicciones

Pero estos resultados piden algunas precisiones; en particular, por la presencia de partes ennegrecidas en los gráficos de $q_{or}(t)$ y de $q_{od}(t)$.

Tales partes son ennegrecidas por oscilaciones cuya frecuencia es tan alta como permite *dt*, que no es una característica de (1)-(10) sino de la aproximación de Euler para la integración en (3).

En el gráfico de $q_{or}(t)$, la duración de la parte ennegrecida (por oscilaciones) coincide con la de $h(t)$ cerca de 1. Las oscilaciones se entienden si el caudal para regadío es extraído a esa altura mediante una bomba que se encuentra alternativamente con agua por extraer y sin ella tras haberla extraído. Pero lo que no se entiende bien es que haya un retardo dt=1000 entre una alternativa y otra. Seguramente, el retardo debiese ser menor; por ejemplo, dt=20. El problema está en que un retardo así es demasiado oneroso cuando la computación se extiende hasta $t=3.2\cdot10^7$.

En el gráfico de $q_{od}(t)$, por su parte, la duración de la parte ennegrecida coincide con la de $h(t)$ cerca de 20. El caso es que ahí las oscilaciones no se entienden bien si el caudal es de desborde. Es posible que haya una fluctuación en el desborde, pero no con la violencia mostrada en el gráfico, que resulta de un retardo dt=1000 con el cual es difícil dilucidar cuándo empieza el desborde y cuándo acaba. Seguramente, el retardo debiese ser menor; por ejemplo, dt=20. Otra vez, el problema está en que un retardo así es demasiado oneroso.

La conveniencia de hacer corto el retardo en dos circunstancias y de mantenerlo largo en el resto, aconseja variar *dt*, por ejemplo, según sugiere la figura 6.

BY NC ND

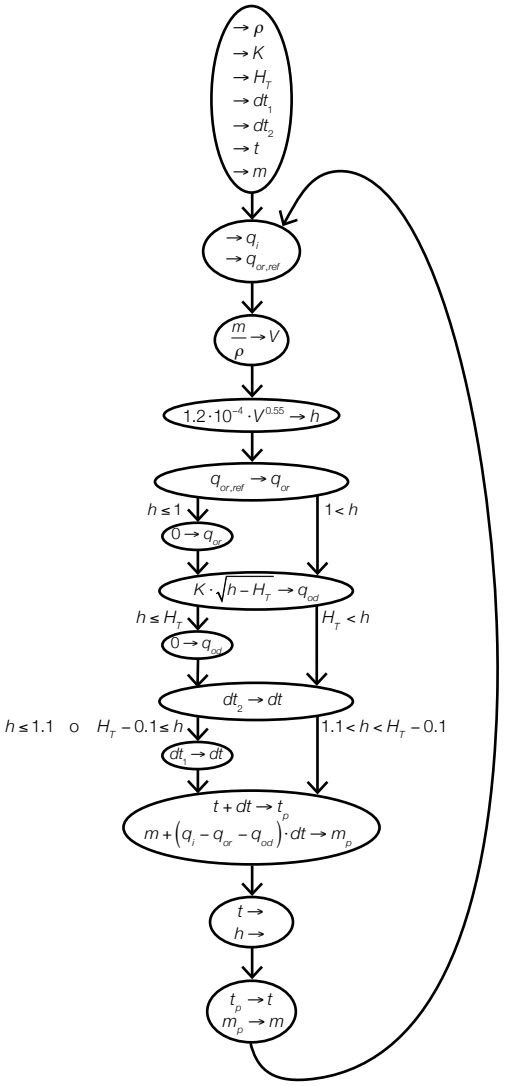
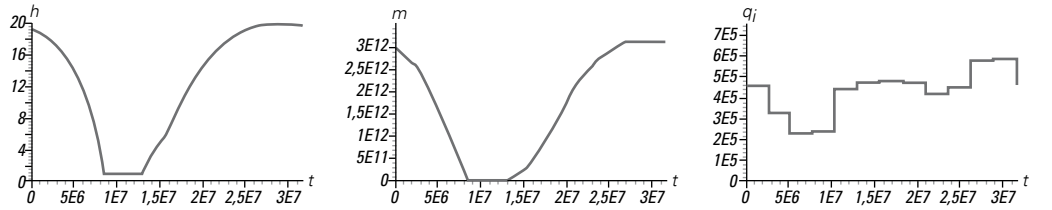


Fig. 6: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, dt_1=20, dt_2=1000 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 7 (según la cual habría problemas de regadío en abril y mayo, cuando la lluvia y el deshielo no alcanzarían para rellenar bien la represa, y habría desborde en noviembre y diciembre).



BY NC ND

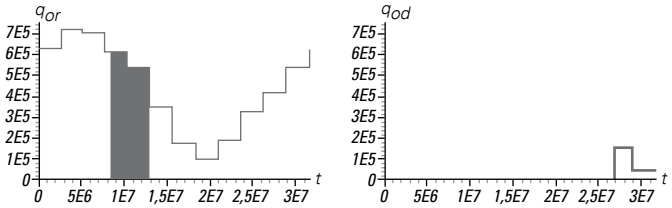


Fig. 7: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (3) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (3) e insertando (7), (8), (1) y (2):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\begin{cases} 0 & \text{si } m(t) \le 1.35\cdot 10^7 \cdot H_T^{1.82}\cdot \rho \\ K\cdot\sqrt{1.2\cdot 10^{-4}\cdot\left(\frac{m(t)}{\rho}\right)^{0.55}} - H_T\cdot\rho & \text{si } 1.35\cdot 10^7\cdot H_T^{1.82}\cdot\rho < m(t) \end{cases}$$
$$-\begin{cases} 0 & \text{si } m(t) < 1.35\cdot 10^7\cdot\rho \\ q_{or,ref} & \text{si } 1.35\cdot 10^7\cdot\rho \le m(t) \end{cases} + q_i(t)$$

(a1)

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro de la represa, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (2):

$$h(t) = 1.2\cdot 10^{-4}\cdot\left(\frac{m(t)}{\rho}\right)^{0.55} \qquad \text{(a2)}$$

CC BY NC ND

8.0
AGUA EN UN ESTANQUE CON FORMA CALCULADA A PROPÓSITO (MASAS Y CAUDALES)

En un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que reposa y sale por abajo, a través de un orificio, el nivel del agua desciende. Hace milenios, los humanos empezaron a usar descensos como ese para medir el tiempo. Así, los estanques de la especie sugerida se convirtieron en cronómetros de agua ("clepsidras") [4] que, entre muchas aplicaciones, sirvieron para acotar los discursos públicos (y a veces, humanamente, para acortar los de los adversarios mediante algunos escamoteos).

Tales cronómetros, manejados honestamente, tropiezan con que el descenso del nivel del agua no es uniforme en el transcurso del tiempo, como puede apreciarse comparando lo que ocurre en varios de ellos hechos iguales pero llenados con masas de agua distintas. Eso entorpece la cronometría.

Como el nivel del agua en cualquier estanque depende del volumen del agua y de la forma del estanque, hay por lo menos una solución para uniformar el descenso del nivel: emplear otros estanques, con formas calculadas a propósito.

Imaginemos un estanque con agua que reposa y sale por abajo a través de un orificio. Sea un estanque con eje de simetría vertical y sea v la velocidad de descenso elegida para la superficie superior del agua dentro del estanque, en [m s^{-1}] hacia abajo.

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque, en [m]:

$$h(t) = f(V(t))$$

$V(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) - \int_0^t q_o(\tau) \cdot d\tau$$

$$\rho = \ldots$$

$m(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

[4] Mientras dura el descenso en una clepsidra, el nivel h es una variable en que cualquier estado H_k y cualquier estado H_m tienen negado parecerse mucho (para $k \neq m$). Así, según las premisas de este libro, el nivel sirve como medida del tiempo. Cuando se acaba el descenso en una clepsidra, se puede usar el de otra para continuar la medición. Y, en breve, se puede idear los cronómetros de arena que, entre otras ventajas, se pueden usar solitaria y recurrentemente dándolos vuelta.

CC BY NC ND

$$m(0) = \ldots$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)}$$

K es el coeficiente de salida, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = \ldots$$

Algebraicamente:

$$\begin{aligned} -v &= \frac{dh(t)}{dt} \\ &= \frac{\frac{dV(t)}{dt}}{\frac{dV(t)}{dh(t)}} \\ &= \frac{d\frac{m(t)}{\rho}}{\frac{dt}{\pi \cdot R^2(h(t))}} \\ &= \frac{\frac{dm(t)}{dt}}{\rho \cdot \pi \cdot R^2(h(t))} \\ &= \frac{-q_o(t)}{\rho \cdot \pi \cdot R^2(h(t))} \\ &= \frac{-K \cdot \sqrt{h(t)}}{\rho \cdot \pi \cdot R^2(h(t))} \end{aligned}$$

luego $$R(h(t)) = \sqrt{\frac{K}{\rho \cdot \pi \cdot v}} \cdot \sqrt[4]{h(t)}$$

donde $R(h(t))$ es el radio transversal que encuentra la superficie superior del agua dentro del estanque, según donde se halla, en [m].

Esa fórmula decide la forma que el estanque debiera tener, en torno a su eje de simetría vertical, para que la velocidad de descenso de la superficie superior del agua dentro de él sea v.

Imaginemos, pues, un estanque con eje de simetría vertical y esa forma; y con agua que reposa y sale por abajo a través de un orificio.

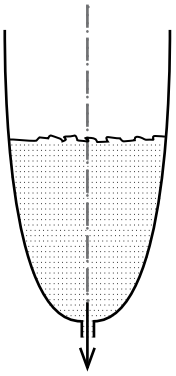


Fig. 1: Agua en un estanque con forma calculada a propósito

CC BY NC ND

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

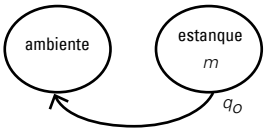


Fig. 2: Estructura espacial

Otra vez, *t* es el tiempo, en [s].

h(*t*) es el nivel del agua dentro del estanque, en [m]:

$$h(t) = \alpha \cdot V^{2/3}(t) \tag{1}$$

α es un coeficiente de forma, en [m^{-1}]; *V*(*t*) es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]:

$$\alpha = 0.707 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \tag{3}$$

m(*t*) es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) - \int_0^t q_o(\tau) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$\rho = 1000 \tag{5}$$

m(0) es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 4760 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{7}$$

K es el coeficiente de salida, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.101 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

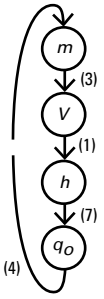


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (5), (6) y (8) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (3), (4) y (7) contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 4 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^4 (=16) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(8).

BY NC ND

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(4) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 16 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(8), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(8).

Si nos interesa la evolución de *h*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *m* inicial, α, ρ, *K*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(8) como:

$$\alpha = \ldots \tag{2'}$$

$$\rho = \ldots \tag{5'}$$

$$K = \ldots \tag{8'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{3'}$$

$$h_k = \alpha \cdot V_k^{2/3} \tag{1'}$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \tag{7'}$$

$$m_{k+1} = m_k - q_{o,k} \cdot dt \tag{4'}$$

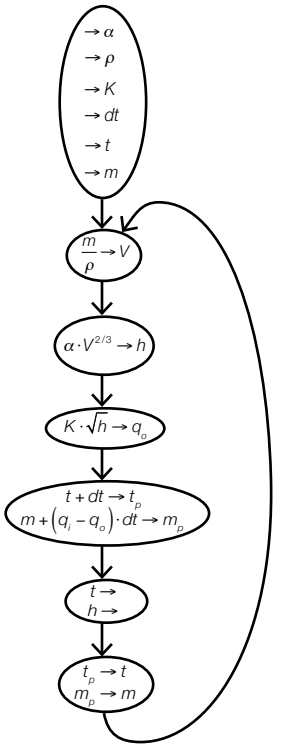


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

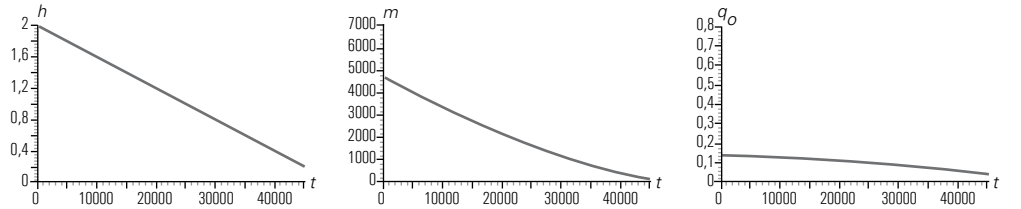


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (1) y (3):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -K \cdot \sqrt{\alpha \cdot \left(\frac{m(t)}{\rho} \right)^{2/3}} \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua que reposa en el estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (3):

$$h(t) = \alpha \cdot \left(\frac{m(t)}{\rho} \right)^{2/3} \qquad \text{(a2)}$$

Al respecto, derivando (a2) en insertando (a1):

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot K \cdot \alpha^{3/2}$$

Apéndice acerca de la Geometría para (1)

Si $R(h)$ es el radio transversal que encuentra la superficie superior del agua dentro del estanque, según donde se halla, en [m]; K es el coeficiente de salida, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; v es la velocidad de descenso definida para la superficie superior del agua dentro del estanque, en [m s^{-1}] hacia abajo; V es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]; y:

$$R(h) = \sqrt{\frac{K}{\rho \cdot \pi \cdot u}} \cdot \sqrt[4]{h}$$

entonces:

CC BY NC ND

$$V = \int_0^h \pi \cdot R^2(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^h \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{K}{\rho \cdot \pi \cdot v}} \cdot \sqrt[4]{x} \right)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{K}{\rho \cdot v} \cdot \int_0^h x^{1/2} \cdot dx$$

$$= \frac{K}{\rho \cdot v} \cdot \frac{2}{3} \cdot h^{3/2}$$

luego $h = \alpha \cdot V^{2/3}$ y $\alpha = \left(\frac{3 \cdot \rho \cdot u}{2 \cdot K} \right)^{2/3}$

CC BY NC ND

9.0

AGUA EN DOS ESTANQUES CILÍNDRICOS, UNO CON EJE VERTICAL Y OTRO CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos dos estanques cilíndricos, uno con eje de simetría vertical y otro con eje de simetría horizontal; cada uno con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio; y ambos conectados mutuamente por una cañería que permite el paso de agua entre sus extremos inferiores.

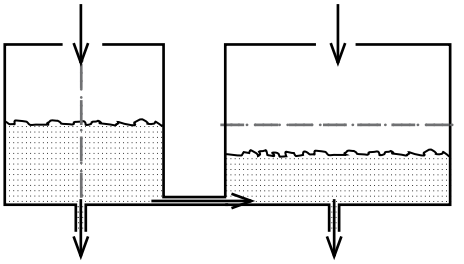


Fig. 1: Agua en dos estanques cilíndricos, uno con eje vertical y otro con eje horizontal

Interesa predecir la evolución del caudal de agua que viaja por la cañería, suponiendo que los niveles del agua nunca desbordan a los estanques.

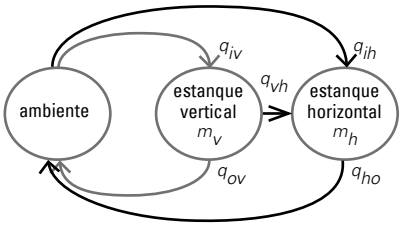


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$q_{vh}(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque con eje vertical al estanque con eje horizontal, por la cañería, en [kg s^{-1}]:

$$q_{vh}(t) = K_{vh} \cdot \sqrt{|h_v(t) - h_h(t)|} \cdot \operatorname{sgn}(h_v(t) - h_h(t)) \quad (1)$$

K_{vh} es un coeficiente de paso de masa por la cañería, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; $h_v(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque con eje vertical, en [m]; $h_h(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque con eje horizontal, en [m]:

$$K_{vh} = 0.200 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (2)$$

$$h_v(t) = \frac{V_v(t)}{\pi \cdot R_v^2} \quad (3)$$

CC BY NC ND

$$h_h(t) \approx R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \tag{4}$$

$V_v(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque con eje vertical, en [m^3]; R_v es el radio del estanque con eje vertical, en [m]; R_h es el radio del estanque con eje horizontal, en [m]; l es la longitud axial del estanque con eje horizontal, en [m]; $V_h(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque con eje horizontal, en [m^3]:

$$V_v(t) = \frac{m_v(t)}{\rho} \tag{5}$$

$$R_v = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$R_h = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$l = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$V_h(t) = \frac{m_h(t)}{\rho} \tag{9}$$

$m_v(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque con eje vertical, en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; $m_h(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque con eje horizontal, en [kg]:

$$m_v(t) = m_v(0) + \int_0^t \left(q_{iv}(\tau) - q_{vo}(\tau) - q_{vh}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$\rho = 1000 \tag{11}$$

$$m_h(t) = m_h(0) + \int_0^t \left(q_{vh}(\tau) + q_{ih}(\tau) - q_{ho}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$m_v(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque con eje vertical inicialmente, en [kg]; $q_{iv}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente a ese estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{vo}(t)$ es el caudal de agua que viaja de ese estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $m_h(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque con eje horizontal inicialmente, en [kg]; $q_{ih}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente a este estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{ho}(t)$ es el caudal de agua que viaja de este estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m_v(0) = 3140 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$q_{iv}(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si } 0 \le t < 1800 \\ 0.733 & \text{si } 1800 \le t < 19800 \\ 0.600 & \text{si } 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$q_{vo}(t) = K_v \cdot \sqrt{h_v(t)} \tag{15}$$

$$m_h(0) = 7850 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

CC BY NC ND

$$q_{ih}(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si} \quad 0 \le t < 21800 \\ 1.00 & \text{si} \quad 21800 \le t < 39800 \\ 0.600 & \text{si} \quad 39800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$q_{ho}(t) = K_h \cdot \sqrt{h_h(t)} \tag{18}$$

K_v es un coeficiente de salida del agua del estanque con eje vertical, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; K_h es un coeficiente de salida del agua del estanque con eje horizontal, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K_v = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$K_h = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

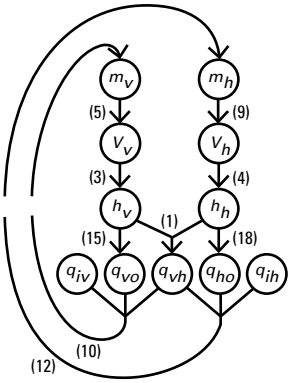


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (6), (7), (8), (11), (13), (16), (19) y (20) no contienen ninguna variable que evoluciona: (14) y (17) contienen 1 cada una; (3), (4), (5), (9), (15) y (18) contienen 2; (1), 3; (10) y (12), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 11 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^6 \cdot 3^1 \cdot 4^2$ (=3072) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(20).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(10) y (12) tienen las masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 4 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 3072 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(20), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^6 \cdot 3^1$ (=192).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 192 sistemas de ecuaciones restantes, 191 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

BY NC ND

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(20).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (10) y (12); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_v inicial, m_h inicial, q_{iv}, q_{ih}, K_{vh}, R_v, R_h, l, ρ, K_v, K_h, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(20) como:

$$K_{vh} = \ldots \tag{2'}$$

$$R_v = \ldots \tag{6'}$$

$$R_h = \ldots \tag{7'}$$

$$l = \ldots \tag{8'}$$

$$\rho = \ldots \tag{11'}$$

$$K_v = \ldots \tag{19'}$$

$$K_h = \ldots \tag{20'}$$

$$m_{v,0} = \ldots \tag{13'}$$

$$m_{h,0} = \ldots \tag{16'}$$

$$q_{iv,k} = \ldots \tag{14'}$$

$$q_{ih,k} = \ldots \tag{17'}$$

$$V_{v,k} = \frac{m_{v,k}}{\rho} \tag{5'}$$

$$V_{h,k} = \frac{m_{h,k}}{\rho} \tag{9'}$$

$$h_{v,k} = \frac{V_{v,k}}{\pi \cdot R_v^2} \tag{3'}$$

$$h_{h,k} \approx R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V_{h,k}}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V_{h,k}}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V_{h,k}}{\pi \cdot l \cdot R_h^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \tag{4'}$$

$$q_{vo,k} = K_v \cdot \sqrt{h_{v,k}} \tag{15'}$$

$$q_{vh,k} = K_{vh} \cdot \sqrt{\left| h_{v,k} - h_{h,k} \right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(h_{v,k} - h_{h,k} \right) \tag{1'}$$

$$q_{ho,k} = K_h \cdot \sqrt{h_{h,k}} \tag{18'}$$

$$m_{v,k+1} = m_{v,k} + \left(q_{iv,k} - q_{vo,k} - q_{vh,k} \right) \cdot dt \tag{10'}$$

$$m_{h,k+1} = m_{h,k} + \left(q_{vh,k} + q_{ih,k} - q_{ho,k} \right) \cdot dt \tag{12'}$$

CC BY NC ND

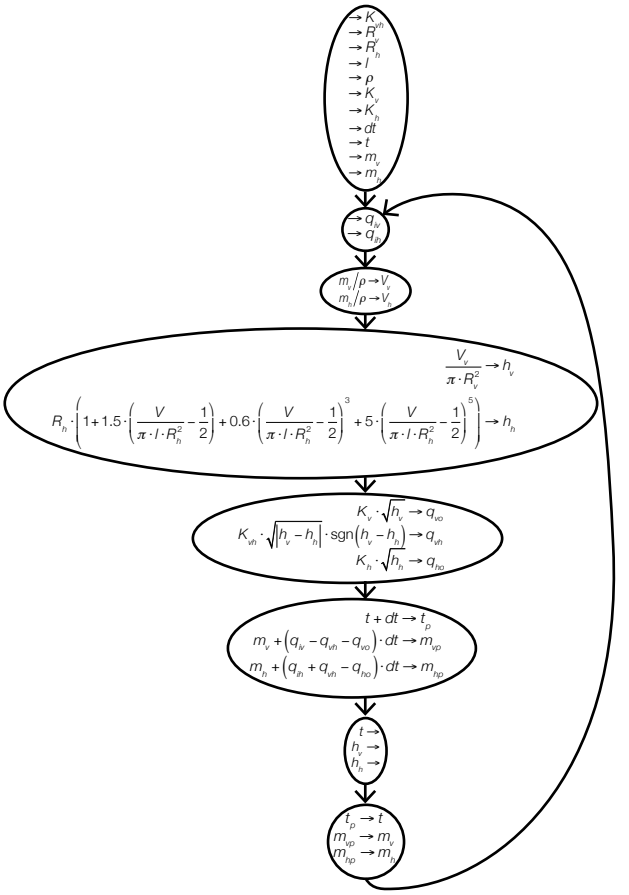


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

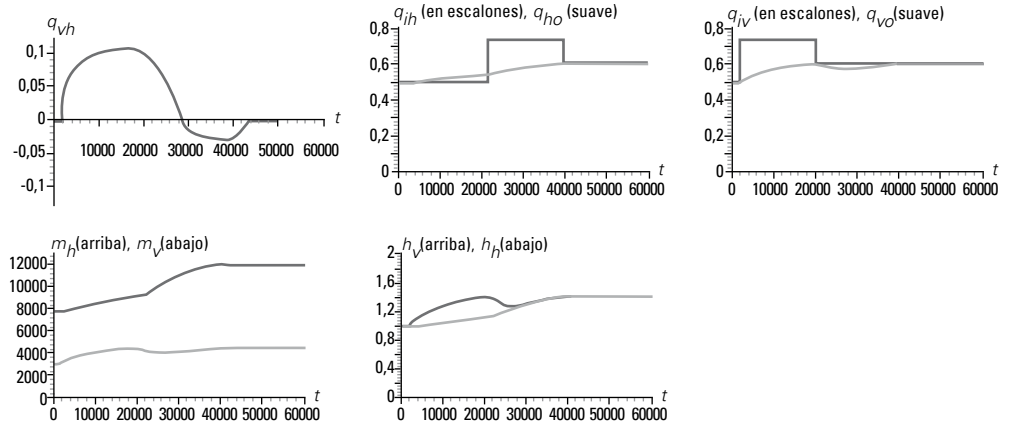


Fig. 5: Predicciones

BY NC ND

Aprovechando el carácter de (10) y (12) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (10) e insertando (15), (1), (3), (4), (5) y (9), y derivando (12) e insertando (1), (18), (3), (4), (5) y (9):

$$\frac{dm_v(t)}{dt} = -K_v \cdot \sqrt{\frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho}} - K_{vh} \cdot \left(\sqrt{\left| \frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right) \right) + q_{iv}(t) \tag{a1}$$

$$\frac{dm_h(t)}{dt} = -K_h \cdot \sqrt{\frac{m_h(t)}{\pi \cdot R_h^2 \cdot \rho}} + K_{vh} \cdot \left(\sqrt{\left| \frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right) \right) + q_{ih}(t) \tag{a2}$$

Si nos interesa la evolución del caudal de agua que viaja por la cañería, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) e insertando (3), (4), (5) y (9):

$$q_{vh}(t) = K_{vh} \cdot \left(\sqrt{\left| \frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{m_v(t)}{\pi \cdot R_v^2 \cdot \rho} - R_h \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{m_h(t)}{\pi \cdot l \cdot R_h^2 \cdot \rho} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \right) \right) \tag{a3}$$

CC BY NC ND

10.0

AGUA EN DOS ESTANQUES CILÍNDRICOS CON EJES VERTICALES, A LA MANERA DE KTESIBIOS (MASAS Y CAUDALES)

En un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que reposa y sale por abajo, a través de un orificio, el nivel del agua desciende con un descenso que no es uniforme en el transcurso del tiempo. Eso entorpece la cronometría si se quiere usar el nivel del agua como medida del tiempo.

Por cierto, para uniformar el descenso se puede cambiar el estanque por algún otro con forma calculada a propósito. Pero para calcular bien esa forma se requiere algunos conocimientos.

Durante el siglo 3 a. C., Ktesibios (285-247 a. C.) ideó otra solución: insertar en el orificio de salida del estanque original, un extremo puntiagudo de un flotador dispuesto en un estanque parecido pero más pequeño, que recibe el agua saliente, la deja reposar y la deja salir a su vez.

Analicemos la idea.

Imaginemos dos estanques cilíndricos con ejes de simetría verticales, cada uno con agua que entra por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio; pero uno de los estanques es más pequeño, está puesto debajo del otro, recibe como caudal entrante al saliente del grande y mantiene un flotador con extremo puntiagudo inserto en la salida de aquél.

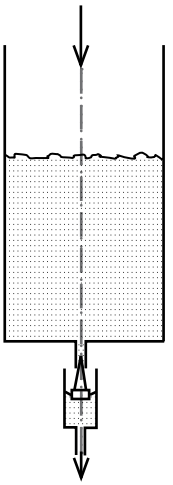


Fig. 1: Agua en dos estanques cilíndricos verticales dispuestos a la manera de Ktesibios

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa en el estanque grande, suponiendo que los niveles nunca desbordan a los estanques.

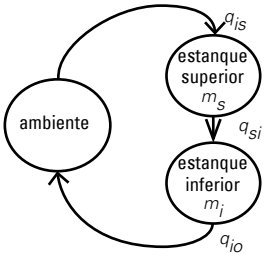


Fig. 2: Estructura espacial

CC BY NC ND

t es el tiempo, en [s].

$h_s(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque superior, desde su extremo inferior, en [m]:

$$h_s\left(t\right) = \frac{V_s\left(t\right)}{\pi \cdot R_s^2} \tag{1}$$

$V_s(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque superior, en [m^3]; R_s es el radio de ese estanque, en [m]:

$$V_s\left(t\right) = \frac{m_s\left(t\right)}{\rho} \tag{2}$$

$$R_s = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$m_S(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque superior, en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$$m_s\left(t\right) = m_s\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{is}\left(\tau\right) - q_{si}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$\rho = 1000 \tag{5}$$

$m_s(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque superior inicialmente, en [kg]; $q_{is}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente a ese estanque, en [kg s^{-1}]; $q_{si}(t)$ es el caudal de agua que viaja de ese estanque al inferior, en [kg s^{-1}]:

$$m_s\left(0\right) = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q_{is}\left(t\right) = \begin{cases} 62.8 & \text{si} \quad 0 \le t < 100 \\ 0 & \text{si} \quad 100 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_{si}\left(t\right) = k_{si}\left(t\right) \cdot \sqrt{h_s\left(t\right)} \tag{8}$$

$k_{si}(t)$ es un coeficiente de paso de masa entre el orificio de salida del estanque superior y el flotador del inferior, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$k_{si}\left(t\right) = K \cdot e^{-h_i\left(t\right)/H} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

K es un coeficiente más específico, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]; $h_i(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque inferior, desde su extremo inferior, en [m]; H es un coeficiente de altura del flotador respecto a la cañería, en [m]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$h_i\left(t\right) = \frac{V_i\left(t\right)}{\pi \cdot R_i^2} \tag{11}$$

$$H = 0.05 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$V_i(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque inferior, en [m^3]; R_i es el radio de ese estanque, en [m]:

CC BY NC ND

$$V_i(t) = \frac{m_i(t)}{\rho} \tag{13}$$

$$R_i = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$m_i(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque inferior, en [kg]:

$$m_i(t) = m_i(0) + \int_0^t \left(q_{si}(\tau) - q_{io}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{15}$$

$m_i(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque inferior inicialmente, en [kg]; $q_{io}(t)$ es el caudal de agua que viaja de ese estanque al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$m_i(0) = 2.50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$q_{io}(t) = K_i \cdot \sqrt{h_i(t)} \tag{17}$$

K_i es un coeficiente de salida del agua del estanque inferior, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K_i = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

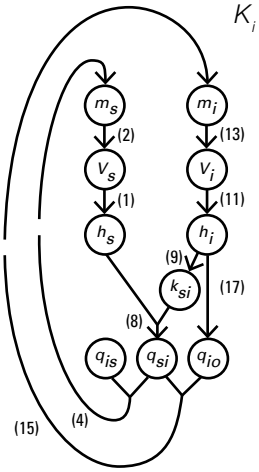


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (6), (10), (12), (14), (16) y (18) no contienen ninguna variable que evoluciona: (7) contiene 1; (1), (2), (9), (11), (13) y (17) contienen 2 cada una; (4), (8) y (15), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^6 \cdot 3^3$ (=1728) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(18).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(4) y (15) tienen las masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 1728 sistemas de ecua-

BY NC ND

ciones equivalentes algebraicamente a (1)-(18), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^6 \cdot 3^1$ (=192).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 192 sistemas de ecuaciones restantes, 191 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(18).

Si nos interesa la evolución de h_s y, por añadidura, la de h_i; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (4) y (15); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, m_i inicial, q_{is}, R_s, ρ, *K*, *H*, R_i, K_i, *dt* y *t* inicial, a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(18) como:

$$R_s = \ldots \qquad (3')$$

$$\rho = \ldots \qquad (5')$$

$$K = \ldots \qquad (10')$$

$$H = \ldots \qquad (12')$$

$$R_i = \ldots \qquad 14')$$

$$K_i = \ldots \qquad (18')$$

$$m_{s,0} = \ldots \qquad (6')$$

$$m_{i,0} = \ldots \qquad (16')$$

$$q_{is,k} = \ldots \qquad (7')$$

$$V_{s,k} = \frac{m_{s,k}}{\rho} \qquad (2')$$

$$V_{i,k} = \frac{m_{i,k}}{\rho} \qquad (13')$$

$$h_{s,k} = \frac{V_{s,k}}{\pi \cdot R_s^2} \qquad (1')$$

$$h_{i,k} = \frac{V_{i,k}}{\pi \cdot R_i^2} \qquad (11')$$

$$k_{si,k} = K \cdot e^{-h_{i,k}/H} \qquad (9')$$

$$q_{si,k} = k_{si,k} \cdot \sqrt{h_{s,k}} \qquad (8')$$

$$q_{io,k} = K_i \cdot \sqrt{h_{i,k}} \qquad (17')$$

$$m_{s,k+1} = m_{s,k} + \left(q_{is,k} - q_{si,k}\right) \cdot dt \qquad (4')$$

$$m_{i,k+1} = m_{i,k} + \left(q_{si,k} - q_{io,k}\right) \cdot dt \qquad (15')$$

CC BY NC ND

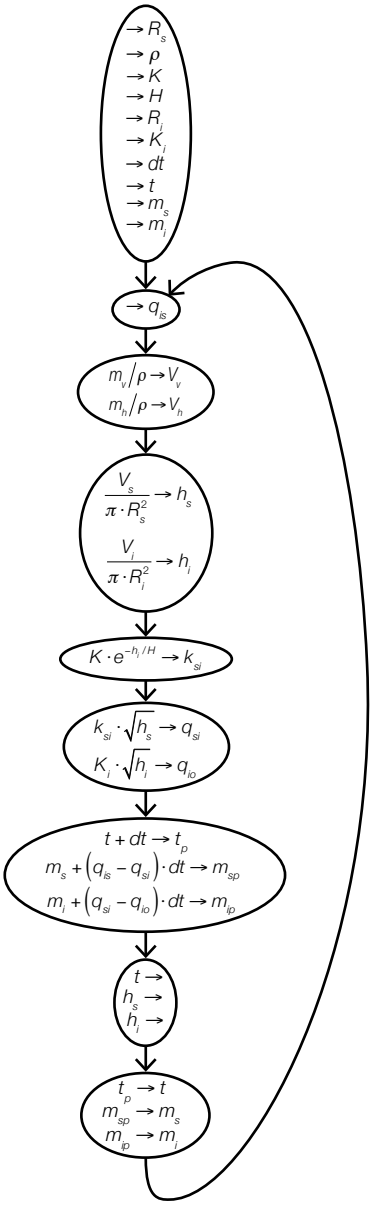


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

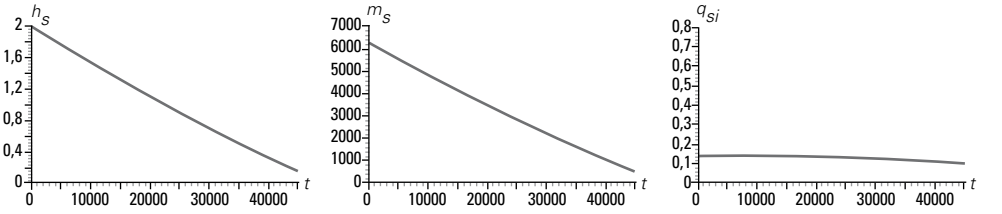


Fig. 5: Predicciones

Lo que ocurriría en ausencia del estanque inferior y su flotador, se puede calcular reemplazando (9) por:

$$k_{si}\left(t\right) = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9'}$$

y desechando (10)-(18).

En esas condiciones, un método parecido al anterior graficó la figura 6.

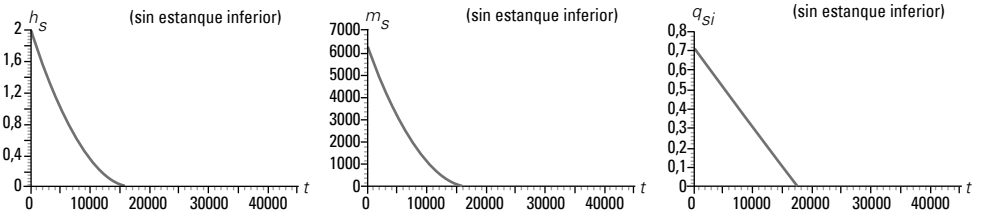


Fig. 6: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y (15) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (8), (9), (1), (11), (2) y (13), y derivando (15) e insertando (8), (17), (9), (1), (11), (2) y (13):

$$\frac{dm_s\left(t\right)}{dt} = -K \cdot e^{-\frac{m_i\left(t\right)}{\pi \cdot R_i^2 \cdot \rho}/H} \cdot \sqrt{\frac{m_s\left(t\right)}{\pi \cdot R_s^2 \cdot \rho}} + q_{is}\left(t\right) \tag{a1}$$

$$\frac{dm_i\left(t\right)}{dt} = -K_i \cdot \sqrt{\frac{m_i\left(t\right)}{\pi \cdot R_i^2 \cdot \rho}} + K \cdot e^{-\frac{m_i\left(t\right)}{\pi \cdot R_i^2 \cdot \rho}/H} \cdot \sqrt{\frac{m_s\left(t\right)}{\pi \cdot R_s^2 \cdot \rho}} \tag{a2}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua que reposa en el estanque grande, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) e insertando (2):

$$h_s\left(t\right) = \frac{m_s\left(t\right)}{\pi \cdot R_s^2 \cdot \upsilon} \tag{a3}$$

CC BY NC ND

11.0

AGUA EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE VERTICAL Y CON FLOTADOR Y VÁLVULA, A LA MANERA DE LOS IBN-MUSA (MASAS Y CAUDALES)

En un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que reposa y sale por abajo, a través de un orificio, el nivel del agua desciende con un descenso que no es uniforme en el transcurso del tiempo.

Para uniformar el descenso, durante el siglo 3 a. C. Ktesibios ideó insertar en los orificios de salida de los estanques, extremos puntiagudos de flotadores dispuestos en estanques parecidos pero más pequeños.

Durante el siglo 1 d. C. Herón de Alejandría (¿10-75?) reemplazó los flotadores con extremos puntiagudos, que actúan dificultando los caudales de agua, por válvulas con flotadores, que pueden llegar a paralizar los caudales. Luego, descartando los estanques pequeños y poniendo los flotadores en los estanques originales, dio a éstos la facultad de detener autónomamente sus propios llenados y vaciados.

Durante el siglo 9, los hermanos Ja-far Muhammad ibn Musa ibn Shakir (¿800?-873), Ahmad ibn Musa ibn Shakir (805-¿873?) y al-Hasan ibn Musa ibn Shakir (¿810?-después de 873), llevaron las ideas de Herón a los abrevaderos.

A fines del siglo 19, varios inventores las llevaron a los estanques de los retretes higiénicos, que se estaban desarrollando.

Imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que entra por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio. La entrada se prolonga por una cañería vertical terminada en una válvula giratoria movida, mediante un brazo, por un flotador apoyado en la superficie superior del agua que reposa.

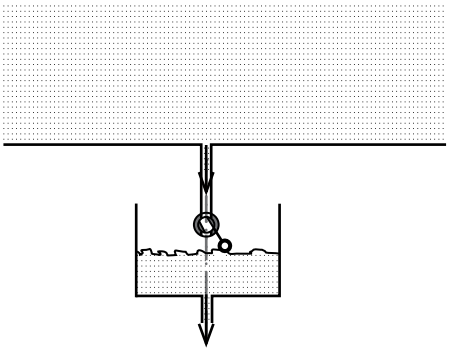


Fig. 1: Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical y con flotador y válvula de entrada, a la manera de Herón y los ibn Musa

Interesa predecir la evolución del nivel del agua que reposa en el fondo, suponiendo que el agua entrante proviene de una represa cuyo nivel permanece bastante quieto.

CC BY NC ND

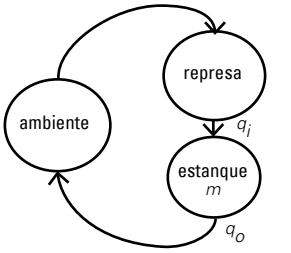


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua dentro del estanque, desde su extremo inferior, en [m]:

$$h(t) = \frac{V(t)}{\pi \cdot R^2} \tag{1}$$

$V(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]; R es el radio transversal del estanque, en [m]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \tag{2}$$

$$R = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$m(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$\rho = 1000 \tag{5}$$

$m(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja de la represa al estanque, por arriba de éste, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 3142 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q_i(t) = k_i(t) \cdot \sqrt{h_r} \tag{7}$$

$$q_o(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h(t) < 0.1 \\ 0 & \text{si} \quad 0.1 \le h(t) \quad \text{y} \quad 0 \le t < 1800 \\ 5 & \text{si} \quad 0.1 \le h(t) \quad \text{y} \quad 1800 \le t < 3600 \\ 0 & \text{si} \quad 0.1 \le h(t) \quad \text{y} \quad 3600 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$k_i(t)$ es el coeficiente de entrada a través de la válvula con el flotador, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]; h_r es la altura desde la válvula hasta la superficie superior del agua dentro de la represa, en [m]:

$$k_i(t) = K \cdot \theta(t) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$h_r = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

CC BY NC ND

K es un coeficiente de entrada más específico, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; $\theta(t)$ es el ángulo desde el horizonte hasta el radio en que se encuentra abatida la válvula con el flotador, hacia abajo, en [rad]:

$$K = 0.85 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad H - h(t) < 0 \\ \arcsin\left(\dfrac{H - h(t)}{B}\right) & \text{si} \quad 0 \le H - h(t) < B \quad \text{(por ejemplo)} \\ \pi / 2 & \text{si} \quad B \le H - h(t) \end{cases} \tag{12}$$

H es la altura desde el extremo inferior del estanque hasta el eje de giro de la válvula con flotador, en [m]; *B* es el brazo desde ese eje de giro hasta el flotador, en [m]:

$$H = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$B = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

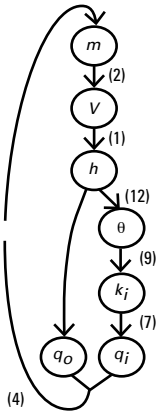


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (6), (10), (11), (13) y (14) no contienen ninguna variable que evoluciona: (8) contiene 1; (1), (2), (7), (9) y (12), 2 cada una; (4), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 7 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^5 \cdot 3^1$ (=96) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(14).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(4) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 96 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(14), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^5$ (=32).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

BY NC ND

De los 32 sistemas de ecuaciones restantes, 31 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(14).

Si nos interesa la evolución de *h*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *m* inicial, *R*, ρ, h_r, *K, H, B*, una referencia para q_o, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(14) como:

$$R = \ldots \tag{3'}$$

$$\rho = \ldots \tag{5'}$$

$$h_r = \ldots \tag{10'}$$

$$K = \ldots \tag{11'}$$

$$H = \ldots \tag{13'}$$

$$B = \ldots \tag{14'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{2'}$$

$$h_k = \frac{V_k}{\pi \cdot R^2} \tag{1'}$$

$$q_{o,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_k < 0.1 \\ q_{o,ref,k} & \text{si} \quad 0.1 \le h_k \end{cases} \tag{8'}$$

$$\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad H - h_k < 0 \\ \arcsin\left(\dfrac{H - h_k}{B}\right) & \text{si} \quad 0 \le H - h_k < B \\ \pi / 2 & \text{si} \quad B \le H - h_k \end{cases} \tag{12'}$$

$$k_{i,k} = K \cdot \theta_k \tag{9'}$$

$$q_{i,k} = k_{i,k} \cdot \sqrt{h_{r,k}} \tag{7'}$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k}\right) \cdot dt \tag{4'}$$

CC BY NC ND

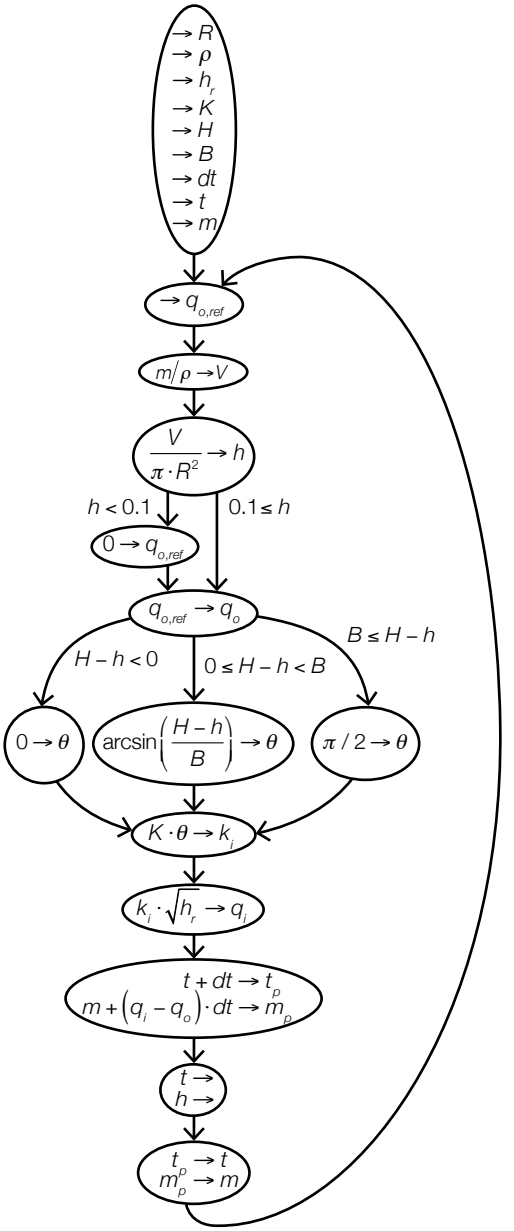


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

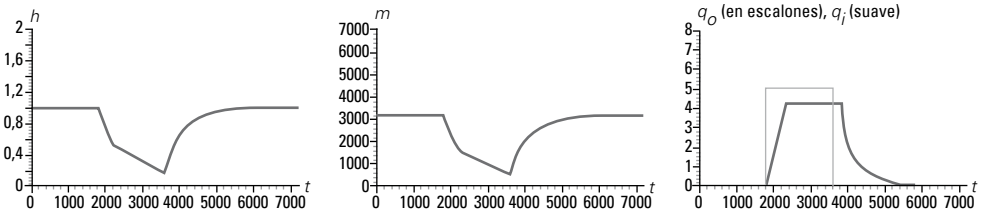


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8), (9), (12), (1) y (2):

$$\frac{dm(t)}{dt} = q_i(t) - \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} < 0.1 \\ q_{o,ref}(t) & \text{si} \quad 0.1 \le \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} \end{cases}$$

$$+ K \cdot \sqrt{h_r} \cdot \begin{cases} 0 & \text{si} \quad H - \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} < 0 \\ \arcsin\left(\dfrac{H - \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho}}{B} \right) & \text{si} \quad 0 \le H - \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} < B \\ \pi / 2 & \text{si} \quad B \le H - \dfrac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} \end{cases} \tag{a1}$$

Si nos interesa la evolución del nivel del agua que reposa en el estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (2):

$$h(t) = \frac{m(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} \tag{a2}$$

CC BY NC ND

12.0

AGUA Y UN POCO DE SOLUTO EN UN ESTANQUE CÓNICO CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un estanque cónico con eje de simetría vertical; con agua que entra por arriba, reposa y sale por abajo a través de un orificio. También entra un poco de un soluto, se disuelve bien en el agua que reposa y sale con ella.

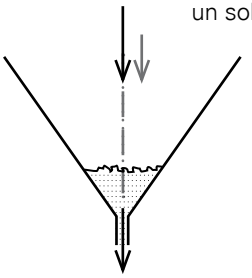


Fig. 1: Agua y un poco de soluto en un estanque cónico con eje vertical

Interesa predecir las evoluciones del nivel de la disolución que reposa y de la fracción de masa de soluto en la disolución, suponiendo que el nivel nunca desborda al estanque y la fracción es tan baja que la densidad de la disolución es casi la del agua.

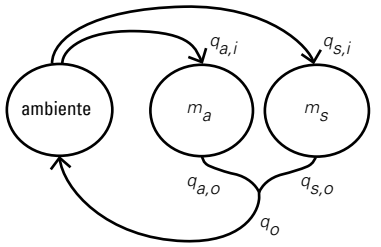


Fig. 2: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel de la disolución que reposa, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; $\gamma(t)$ es la fracción de masa de soluto en la disolución, en [kg (de soluto) kg^{-1} (de disolución)]:

$$h\left(t\right)=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V\left(t\right)\cdot H_T^2}{\pi\cdot R_T^2}} \tag{1}$$

$$\gamma\left(t\right)=\frac{m_s\left(t\right)}{m_a\left(t\right)+m_s\left(t\right)} \tag{2}$$

BY NC ND

$V(t)$ es el volumen de la disolución, en [m^3]; H_T es la altura total del estanque, en [m]; R_T es el radio del estanque para esa altura, en [m]; $m_s(t)$ es la masa en el soluto dentro del estanque, en [kg]; $m_a(t)$ es la masa en el agua, en [kg]:

$$V(t) \approx \frac{m_a(t)}{\rho_a} \tag{3}$$

$$H_T = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$R_T = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$m_s(t) = m_s(0) + \int_0^t \left(q_{s,i}(\tau) - q_{s,o}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{6}$$

$$m_a(t) = m_a(0) + \int_0^t \left(q_{a,i}(\tau) - q_{a,o}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{7}$$

ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; $m_s(0)$ es la masa en el soluto inicialmente, en [kg]; $q_{s,i}(t)$ es el caudal de soluto que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{s,o}(t)$ es el caudal de soluto que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $m_a(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_{a,i}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{a,o}(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$\rho_a = 1000 \tag{8}$$

$$m_s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$q_{s,i}(t) = 0.005 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{36000} t\right)\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$q_{s,o}(t) = \gamma(t) \cdot q_o(t) \tag{11}$$

$$m_a(0) = 1047 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$q_{a,i}(t) = \begin{cases} 0.50 & \text{si } t < 1800 \\ 0.733 & \text{si } 1800 \le t < 19800 \\ 0.60 & \text{si } 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$q_{a,o}(t) = \left(1 - \gamma(t)\right) \cdot q_o(t) \tag{14}$$

$q_o(t)$ es el caudal de disolución que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{15}$$

K es un coeficiente de salida de la disolución, en [kg m$^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

CC BY NC ND

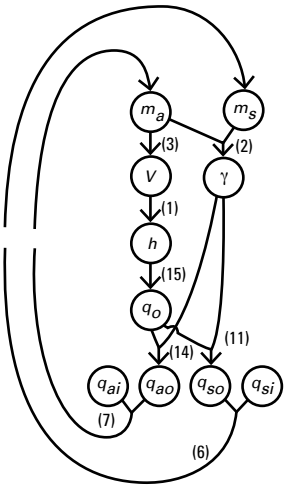


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (8), (9), (12) y (16) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10) y (13) contienen 1 cada una; (1), (3) y (15), 2 cada una; (2), (6), (7), (11) y (14), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^5$ (=1944) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(16).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(6) y (7) tienen las masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en ellas se reducen a los que están planteados y, de los 1944 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(16), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3$ (=216).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 216 sistemas de ecuaciones restantes, 215 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(16).

Si nos interesa la evolución de h y γ; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (6) y (7); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, m_a inicial, $q_{s,i}$ $q_{a,i}$, H_T, R_T, K, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(16) como:

$$H_T = \ldots \quad (4')$$

$$R_T = \ldots \quad (5')$$

$$K = \ldots \quad (16')$$

$$m_{s,0} = \ldots \quad (9')$$

$$m_{a,0} = \ldots \quad (12')$$

BY NC ND

$$\rho_a = 1000 \tag{8'}$$

$$q_{s,i,k} = \ldots \tag{10'}$$

$$q_{a,i,k} = \ldots \tag{13'}$$

$$V_k = \frac{m_{a,k}}{\rho_a} \tag{3'}$$

$$\gamma_k = \frac{m_{s,k}}{m_{a,k} + m_{s,k}} \tag{2'}$$

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_k \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2}} \tag{1'}$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \tag{15'}$$

$$q_{s,o,k} = \gamma_k \cdot q_{o,k} \tag{11'}$$

$$q_{a,o,k} = \left(1 - \gamma_k\right) \cdot q_{o,k} \tag{14'}$$

$$m_{s,k+1} = m_{s,k} + \left(q_{s,i,k} - q_{s,o,k}\right) \cdot dt \tag{6'}$$

$$m_{a,k+1} = m_{a,k} + \left(q_{a,i,k} - q_{a,o,k}\right) \cdot dt \tag{7'}$$

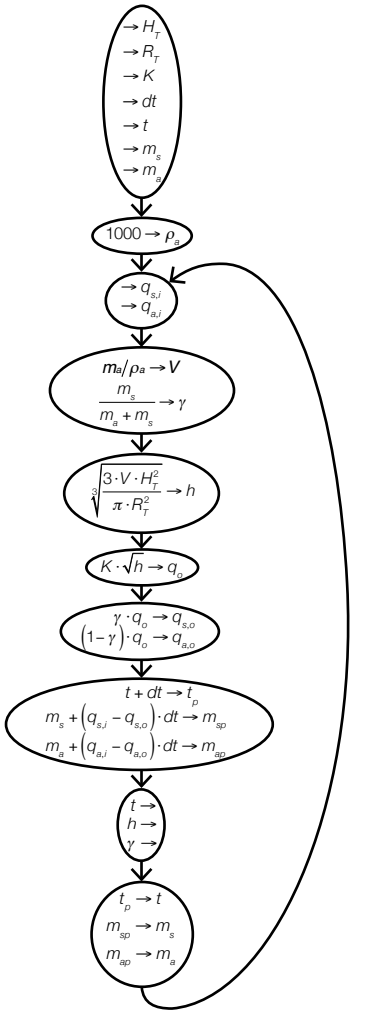


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

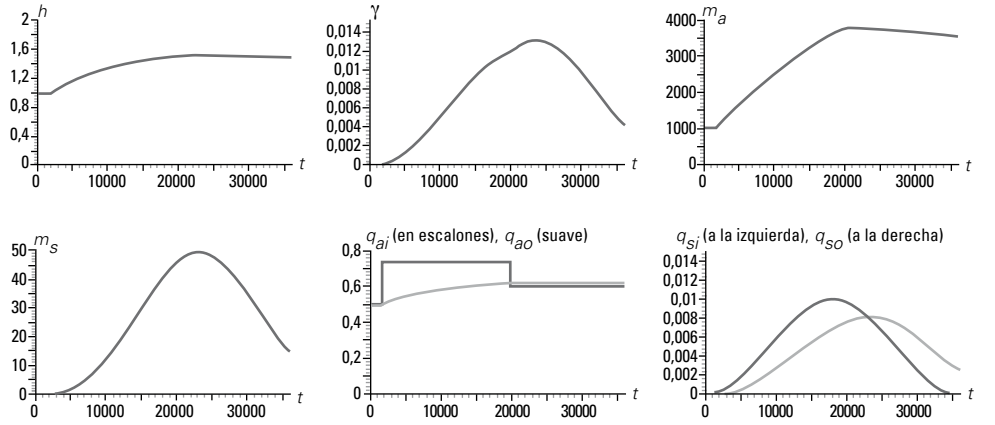


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (6) y (7) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (6) e insertando (11), (2), (15), (1) y (3), y derivando (7) e insertando (14), (2), (15), (1) y (3):

$$\frac{dm_s(t)}{dt} = -\frac{m_s(t)}{m_a(t)+m_s(t)} \cdot K \cdot \sqrt[6]{\frac{3 \cdot m_a(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot \rho_a \cdot R_T^2}} + q_{s,i}(t) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_a(t)}{dt} = -\frac{m_a(t)}{m_a(t)+m_s(t)} \cdot K \cdot \sqrt[6]{\frac{3 \cdot m_a(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot \rho_a \cdot R_T^2}} + q_{a,i}(t) \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesan las evoluciones del nivel de la disolución que reposa y de la fracción de masa de soluto en la disolución, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) e insertando (3), y considerando (2):

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_a(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot \rho_a \cdot R_T^2}} \qquad \text{(a3)}$$

$$\gamma(t) = \frac{m_s(t)}{m_a(t)+m_s(t)} \qquad \text{(a4)}$$

CC BY NC ND

13.0

AGUA Y TIERRA EN UN ESTANQUE PARCIALMENTE CÓNICO Y PARCIALMENTE CILÍNDRICO, CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES)

En varias circunstancias productivas se mezcla a propósito agua y sólidos dentro de estanques; por ejemplo, para lograr mezclas cuyas consistencias faciliten el transporte sin desprendimiento de polvos ni obstrucción de pasadas estrechas.

Imaginemos un estanque parcialmente cilíndrico y parcialmente cónico con eje de simetría vertical; y con agua y tierra molida que entran por arriba, reposan mezcladas (suave pero eficientemente) y salen por un orificio del extremo inferior.

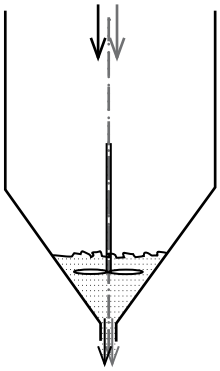


Fig. 1: Agua y tierra en un estanque parcialmente cilíndrico y parcialmente cónico, con eje vertical

Interesa predecir la evolución del nivel de la mezcla que reposa en el fondo, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque, que los volúmenes del agua y la tierra se suman simplemente en la mezcla, y que el caudal de mezcla saliente disminuye en la misma proporción que la fracción de masa de agua en la mezcla (hasta volverse nulo).

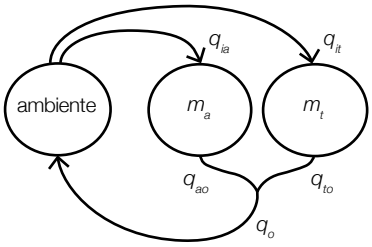


Fig. 2: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]:

CC BY NC ND

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V(t) \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2}} & \text{si} \quad V(t) < \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3} \\ H_T + \dfrac{V(t) - \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3}}{\pi \cdot R_T^2} & \text{si} \quad \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3} \leq V(t) \end{cases} \tag{1}$$

$V(t)$ es el volumen de la mezcla de agua y tierra, en [m^3]; H_T es la altura total de la parte cónica (inferior) del estanque, en [m]; R_T es el radio del estanque para esa altura y todas las superiores, en [m]:

$$V(t) = V_a(t) + V_t(t) \tag{2}$$

$$H_T = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$R_T = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$V_a(t)$ es el volumen del agua dentro de la mezcla, en [m^3]; $V_t(t)$ es el volumen de la tierra dentro de la mezcla, en [m^3]:

$$V_a(t) = \frac{m_a(t)}{\rho_a} \tag{5}$$

$$V_t(t) = \frac{m_t(t)}{\rho_t} \tag{6}$$

$m_a(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ_a es su densidad, en [kg m^{-3}]; $m_t(t)$ es la masa en la tierra dentro del estanque, en [kg]; ρ_t es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m_a(t) = m_a(0) + \int_0^t \left(q_{ia}(\tau) - q_{ao}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$\rho_a = 1000 \tag{8}$$

$$m_t(t) = m_t(0) + \int_0^t \left(q_{it}(\tau) - q_{to}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{9}$$

$$\rho_t = 3200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$m_a(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_{ia}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{ao}(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $m_t(0)$ es la masa en la tierra inicialmente, en [kg]; $q_{it}(t)$ es el caudal de tierra que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{to}(t)$ es el caudal de tierra que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$m_a(0) = 510 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$q_{ia}(t) = \begin{cases} 0.50 & \text{si} \quad t < 7200 \\ 0.25 & \text{si} \quad 7200 \leq t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

CC BY NC ND

$$q_{ao}(t) = q_o(t) \cdot \frac{m_a(t)}{m_a(t) + m_t(t)} \tag{13}$$

$$m_t(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$q_{it}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3600 \\ 0.25 & \text{si } 3600 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$q_{to}(t) = q_o(t) \cdot \frac{m_t(t)}{m_a(t) + m_t(t)} \tag{16}$$

$q_o(t)$ es el caudal de mezcla que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$q_o(t) = k_0(t) \cdot \sqrt{h(t)} \tag{17}$$

$k_0(t)$ es un coeficiente de salida de la mezcla, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$k_0(t) = K_0 \cdot \frac{m_a(t)}{m_a(t) + m_t(t)} \tag{18}$$

K_0 es un coeficiente más específico, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$K_0 = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

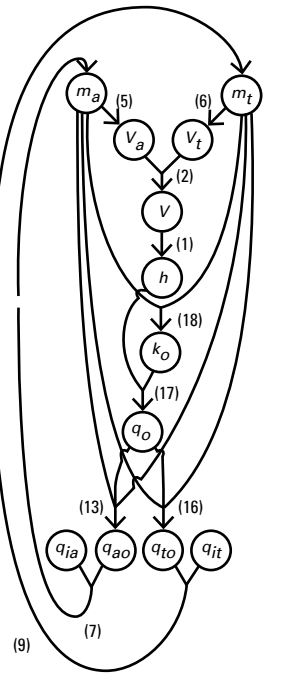


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (8), (10), (11), (14) y (19) no contienen ninguna variable que evoluciona: (12) y (15) contienen 1 cada una; (1), (5) y (6) contienen 2; (2), (7), (9), (17) y (18), 3; (13) y (16), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^2$ (=31104) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(19).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(7) y (9) tienen las masas despejadas en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 31104 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(19), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 42$ (=3456).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 3456 sistemas de ecuaciones restantes, 3455 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(19).

Si nos interesa la evolución de *h*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_a inicial, m_t inicial, q_{ia}, q_{it}, H_T, R_T, ρ_a, ρ_t, K_0, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(19) como:

$$H_T = \ldots \qquad (3')$$

$$R_T = \ldots \qquad (4')$$

$$\rho_a = \ldots \qquad (8')$$

$$\rho_t = \ldots \qquad (10')$$

$$K_0 = \ldots \qquad (19')$$

$$m_{a,0} = \ldots \qquad (11')$$

$$m_{t,0} = \ldots \qquad (14')$$

$$q_{ia,k} = \ldots \qquad (12')$$

$$q_{it,k} = \ldots \qquad (15')$$

$$V_{a,k} = \frac{m_{a,k}}{\rho_a} \qquad (5')$$

$$V_{t,k} = \frac{m_{t,k}}{\rho_t} \qquad (6')$$

$$V_k = V_{a,k} + V_{t,k} \qquad (2')$$

CC BY NC ND

$$h_k = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V_k \cdot H_T^2}{\pi \cdot R_T^2}} & \text{si} \quad V_k < \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3} \\ H_T + \dfrac{V_k - \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3}}{\pi \cdot R_T^2} & \text{si} \quad \dfrac{\pi \cdot R_T^2 \cdot H_T}{3} \le V_k \end{cases} \qquad (1')$$

$$k_{0,k} = K_0 \cdot \frac{m_{a,k}}{m_{a,k} + m_{t,k}} \qquad (18')$$

$$q_{o,k} = k_{0,k} \cdot \sqrt{h_k} \qquad (17')$$

$$q_{ao,k} = q_{o,k} \cdot \frac{m_{a,k}}{m_{a,k} + m_{t,k}} \qquad (13')$$

$$q_{to,k} = q_{o,k} \cdot \frac{m_{t,k}}{m_{a,k} + m_{t,k}} \qquad (16')$$

$$m_{a,k+1} = m_{a,k} + \left(q_{ia,k} - q_{ao,k}\right) \cdot dt \qquad (7')$$

$$m_{t,k+1} = m_{t,k} + \left(q_{it,k} - q_{to,k}\right) \cdot dt \qquad (9')$$

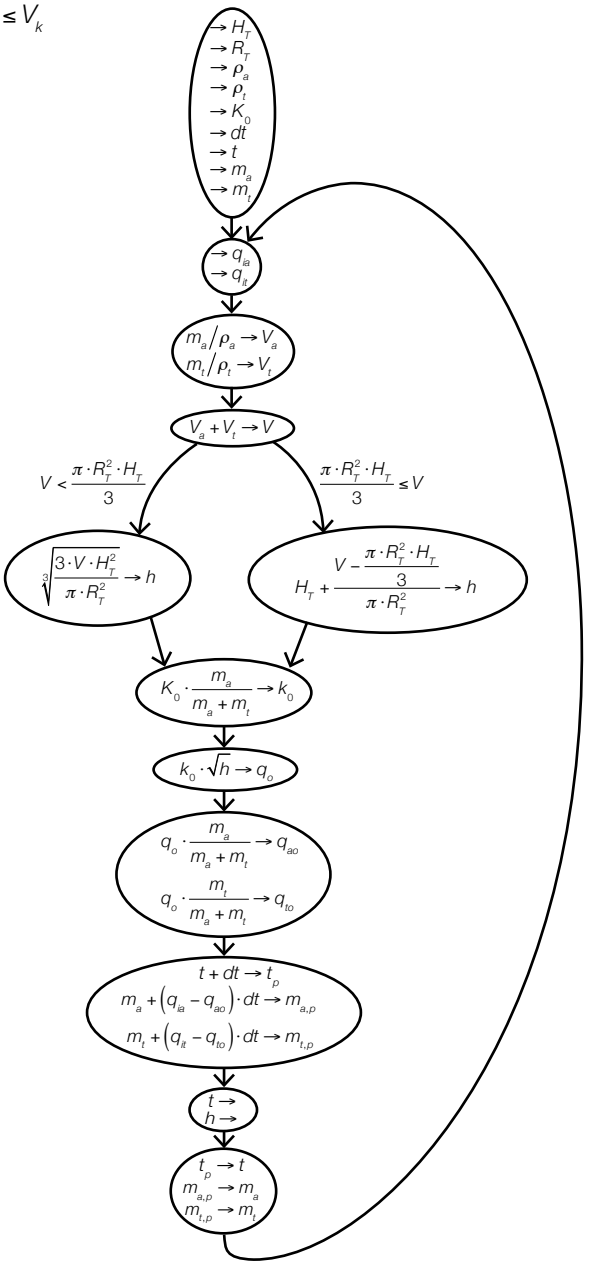


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

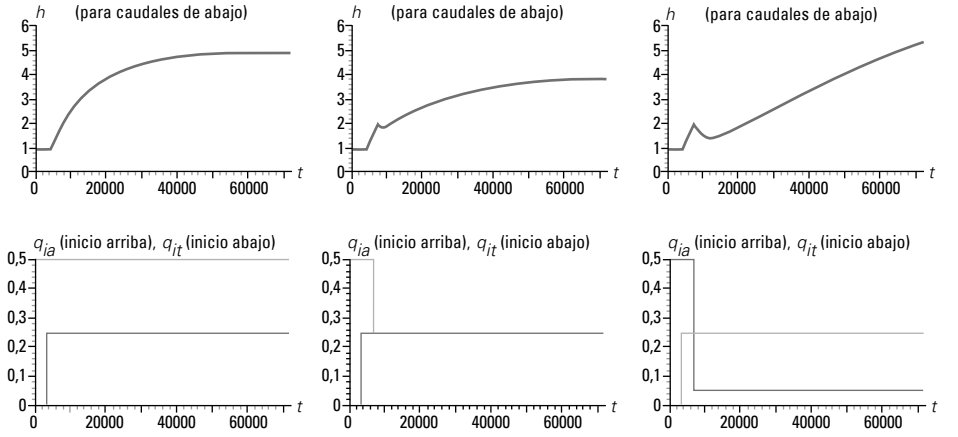


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7) y (9) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (13), (17), (18), (1), (2), (5) y (6), y derivando (9) e insertando (16), (17), (18), (1), (2), (5) y (6):

$$\frac{dm_a(t)}{dt} = -K_0 \cdot \frac{m_a^2(t)}{\left(m_a(t)+m_t(t)\right)^2} \cdot \sqrt{\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}\right)\cdot H_T^2}{\pi\cdot R_T^2}} & \text{si } \dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t} < \dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3} \\ H_T + \dfrac{\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}-\dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3}}{\pi\cdot R_T^2} & \text{si } \dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3} \le \dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t} \end{cases}} + q_{ia}(t) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_t(t)}{dt} = -K_0 \cdot \frac{m_a(t)\cdot m_t(t)}{\left(m_a(t)+m_t(t)\right)^2} \cdot \sqrt{\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}\right)\cdot H_T^2}{\pi\cdot R_T^2}} & \text{si } \dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t} < \dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3} \\ H_T + \dfrac{\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}-\dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3}}{\pi\cdot R_T^2} & \text{si } \dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3} \le \dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t} \end{cases}} + q_{it}(t) \qquad \text{(a2)}$$

CC BY NC ND

Si nos interesa la evolución del nivel del agua dentro del estanque, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) e insertando (2), (5) y (6):

$$h(t)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}\right)\cdot H_T^2}{\pi\cdot R_T^2}} & \text{si}\quad \dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}<\dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3}\\ H_T+\dfrac{\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}-\dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3}}{\pi\cdot R_T^2} & \text{si}\quad \dfrac{\pi\cdot R_T^2\cdot H_T}{3}\le\dfrac{m_a(t)}{\rho_a}+\dfrac{m_t(t)}{\rho_t}\end{cases}$$

(a3)

CC BY NC ND

14.0

AGUA Y TIERRA CON TAMAÑOS DIFERENTES EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO, CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos ahora un estanque cilíndrico con eje de simetría horizontal; y con agua y tierra molida que entran sueltamente por arriba, reposan mezcladas (eficientemente) y salen por un orificio del extremo inferior; pero la molienda ha dejado a la tierra molida compuesta por fragmentos de tamaños diferentes y clasificables en cinco especies: una de fragmentos muy gruesos (digamos, la 1), otra de fragmentos gruesos (digamos, la 2), otra de medianos (la 3), otra de finos (la 4) y otra de muy finos (la 5).

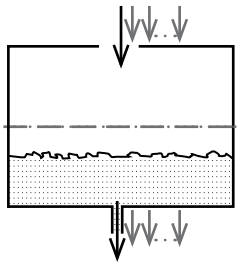


Fig. 1: Agua y tierra con tamaños diferentes en un estanque cilíndrico con eje horizontal

Interesa predecir la evolución de las masas de las diferentes especies de tierra dentro del estanque, suponiendo que el nivel de la mezcla nunca desborda al estanque, que los volúmenes del agua y la tierra se suman simplemente en la mezcla, y que el caudal de mezcla saliente disminuye en la misma proporción que la fracción de masa de agua en la mezcla (hasta volverse nulo).

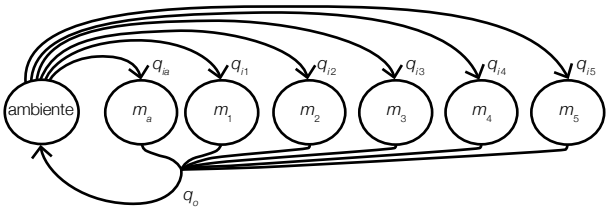


Fig. 2: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_1(t)$ es la masa en la especie 1 dentro del estanque, en [kg]; $m_2(t)$ es la masa en la especie 2, en [kg]; $m_3(t)$ es la masa en la especie 3, en [kg]; $m_4(t)$ es la masa en la especie 4, en [kg]; $m_5(t)$ es la masa en la especie 5, en [kg]:

BY NC ND

$$m_1(t) = m_1(0) + \int_0^t \left(q_{i1}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_1(\tau)}{m_a(\tau) + \sum_{n=1}^{5} m_n(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$m_2(t) = m_2(0) + \int_0^t \left(q_{i2}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_2(\tau)}{m_a(\tau) + \sum_{n=1}^{5} m_n(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_3(t) = m_3(0) + \int_0^t \left(q_{i3}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_3(\tau)}{m_a(\tau) + \sum_{n=1}^{5} m_n(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$m_4(t) = m_4(0) + \int_0^t \left(q_{i4}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_4(\tau)}{m_a(\tau) + \sum_{n=1}^{5} m_n(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$m_5(t) = m_5(0) + \int_0^t \left(q_{i5}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_5(\tau)}{m_a(\tau) + \sum_{n=1}^{5} m_n(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (5)$$

$m_1(0)$ es la masa en la especie 1 dentro del estanque inicialmente, en [kg]; $q_{i1}(t)$ es el caudal de la especie 1 que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de mezcla que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $m_a(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; $m_2(0)$ es la masa en la especie 2 inicialmente, en [kg]; $q_{i2}(t)$ es el caudal de la especie 2 que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]; $m_3(0)$ es la masa en la especie 3 inicialmente, en [kg]; $q_{i3}(t)$ es el caudal de la especie 3 que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]; $m_4(0)$ es la masa en la especie 4 inicialmente, en [kg]; $q_{i4}(t)$ es el caudal de la especie 4 que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]; $m_5(0)$ es la masa en la especie 5 inicialmente, en [kg]; $q_{i5}(t)$ es el caudal de la especie 5 que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]:

$$m_1(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$q_{i1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 6000 \\ 0.005 & \text{si} \quad 6000 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_o(t) = k_0(t) \cdot \sqrt{h(t)} \quad (8)$$

$$m_a(t) = m_a(0) + \int_0^t \left(q_{ia}(\tau) - q_o(\tau) \cdot \frac{m_a(\tau)}{m_a(\tau) + m_t(\tau)} \right) \cdot d\tau \quad (9)$$

$$m_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

CC BY NC ND

$$q_{i2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6000 \\ 0.01 & \text{si } 6000 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$m_3(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$q_{i3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6000 \\ 0.02 & \text{si } 6000 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$m_4(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$q_{i4}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6000 \\ 0.01 & \text{si } 6000 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$m_5(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$q_{i5}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6000 \\ 0.005 & \text{si } 6000 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$k_0(t)$ es un coeficiente de salida de la mezcla, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; $h(t)$ es el nivel del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; $m_a(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_{ia}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]:

$$k_0(t) = K_0 \cdot \frac{m_a(t)}{m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t)} \tag{18}$$

$$h(t) \approx R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V(t)}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \tag{19}$$

$$m_a(0) = 4100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$q_{ia}(t) = 0.40 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

K_0 es un coeficiente más específico, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]; R es el radio del estanque, en [m]; $V(t)$ es el volumen de la mezcla, en [m^3]; l es la longitud axial del estanque, en [m]:

$$K_0 = 0.505 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$R = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$V(t) = V_a(t) + V_t(t) \tag{24}$$

$$l = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$V_a(t)$ es el volumen del agua dentro de la mezcla, en [m^3]; $V_t(t)$ es el volumen de la tierra dentro de la mezcla, en [m^3]:

$$V_a(t) = \frac{m_a(t)}{\rho_a} \tag{26}$$

CC BY NC ND

$$V_t\left(t\right) = \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n\left(t\right)}{\rho_t} \tag{27}$$

ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; ρ_t es la de la tierra, en [kg m^{-3}]:

$$\rho_a = 1000 \tag{28}$$

$$\rho_t = 3200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

El dibujo de la estructura causal es bastante aburrido y se parece suficientemente a los de los casos anteriores si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: m_1 depende de q_{i1}, q_o, m_a, m_2, m_3, m_4 y m_5; m_2, de q_{i2}, q_o, m_a, m_1, m_3, m_4 y m_5; m_3, de q_{i3}, q_o, m_a, m_1, m_2, m_4 y m_5; m_4, de q_{i4}, q_o, m_a, m_1, m_2, m_3 y m_5; m_5, de q_{i5}, q_o, m_a, m_1, m_2, m_3 y m_4; q_o, de k_o y h; m_a, de q_{ia}, q_o, m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5; k_o, de m_a, m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5; h, de V; V, de V_a y V_t; V_a, de m_a; y V_t, de m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (6), (10), (12), (14), (16), (20), (22), (23), (25), (28) y (29) no contienen ninguna variable que evoluciona: (7), (11), (13), (15), (17) y (21) contienen 1 cada una; (19) y (26), 2; (8) y (24), 3; (27), 6; (18), 7; (1), (2), (3), (4), (5) y (9), 8; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 18 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^1 \cdot 7^1 \cdot 8^6$ (=396361728) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(29).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1), (2), (3), (4), (5) y (9) tienen las masas despejadas en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 8 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 396361728 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(29), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^{12} \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^1 \cdot 7^1 \cdot 8^0$ (=1512).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1512 sistemas de ecuaciones restantes, 1511 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(29).

Si nos interesan las evoluciones de m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3), (4), (5) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_1 inicial, m_2 inicial, m_3 inicial, m_4 inicial, m_5 inicial, m_a inicial, q_{i1}, q_{i1}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i4}, q_{ia}, K_o, R, l, ρ_a, ρ_t, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(29) como:

$$K_0 = \ldots \tag{22'}$$

$$R = \ldots \tag{23'}$$

CC BY NC ND

$$l = \ldots \tag{25'}$$

$$\rho_a = \ldots \tag{28'}$$

$$\rho_t = \ldots \tag{29'}$$

$$m_{1,0} = \ldots \tag{6'}$$

$$m_{2,0} = \ldots \tag{10'}$$

$$m_{3,0} = \ldots \tag{12'}$$

$$m_{4,0} = \ldots \tag{14'}$$

$$m_{5,0} = \ldots \tag{16'}$$

$$m_{a,0} = \ldots \tag{20'}$$

$$q_{i1,k} = \ldots \tag{7'}$$

$$q_{i2,k} = \ldots \tag{11'}$$

$$q_{i3,k} = \ldots \tag{13'}$$

$$q_{i4,k} = \ldots \tag{15'}$$

$$q_{i5,k} = \ldots \tag{17'}$$

$$q_{ia,k} = \ldots \tag{21'}$$

$$V_{a,k} = \frac{m_{a,k}}{\rho_a} \tag{26'}$$

$$V_{t,k} = \frac{\sum_{n=1}^{5} m_{n,k}}{\rho_t} \tag{27'}$$

$$V_k = V_{a,k} + V_{t,k} \tag{24'}$$

$$h_k = R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{V_k}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right) \tag{19'}$$

$$k_{0,k} = K_0 \cdot \frac{m_{a,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \tag{18'}$$

$$q_{o,k} = k_{0,k} \cdot \sqrt{h_k} \tag{8'}$$

$$m_{1,k+1} = m_{1,k} + \left(q_{i1,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{1,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \tag{1'}$$

BY NC ND

$$m_{2,k+1} = m_{2,k} + \left(q_{i2,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{2,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \qquad (2')$$

$$m_{3,k+1} = m_{3,k} + \left(q_{i3,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{3,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \qquad (3')$$

$$m_{4,k+1} = m_{4,k} + \left(q_{i4,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{4,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \qquad (4')$$

$$m_{5,k+1} = m_{5,k} + \left(q_{i5,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{5,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \qquad (5')$$

$$m_{a,k+1} = m_{a,k} + \left(q_{ia,k} - q_{0,k} \cdot \frac{m_{a,k}}{m_{a,k} + \sum_{n=1}^{5} m_{n,k}} \right) \cdot dt \qquad (9')$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación también es bastante aburrido y se parece suficientemente a los de los casos anteriores. Simplemente, saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.

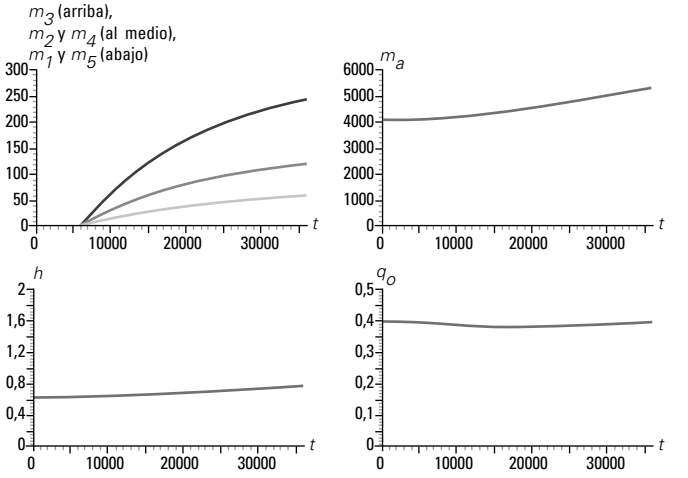


Fig. 3: Predicciones

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (4), (5) y (9) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27); derivando (2) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27); derivando (3) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27); derivando (4) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27); derivando (5) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27); y derivando (9) e insertando (8), (18), (19), (24), (26) y (27):

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = q_{i1}(t) \left(K_0 \cdot \frac{m_a(t) \cdot m_1(t)}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right) \quad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = q_{i2}(t) \left(K_0 \cdot \frac{m_a(t) \cdot m_2(t)}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right) \quad \text{(a2)}$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = q_{i3}(t) \left(K_0 \cdot \frac{m_a(t) \cdot m_3(t)}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right) \quad \text{(a3)}$$

CC BY NC ND

$$\frac{dm_4(t)}{dt} = q_{i4}(t) \left(K_0 \cdot \frac{m_a(t) \cdot m_4(t)}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right)$$

(a4)

$$\frac{dm_5(t)}{dt} = q_{i5}(t) \left(K_0 \cdot \frac{m_a(t) \cdot m_5(t)}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right)$$

(a5)

$$\frac{dm_a(t)}{dt} = q_{ia}(t) \left(K_0 \cdot \frac{\left(m_a(t) \right)^2}{\left(m_a(t) + \sum_{n=1}^{5} m_n(t) \right)^2} - \left(\sqrt{R \cdot \left(1 + 1.5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right) + 0.6 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{m_a(t)}{\rho_a} + \frac{\sum_{n=1}^{5} m_n(t)}{\rho_t}}{\pi \cdot l \cdot R^2} - \frac{1}{2} \right)^5 \right)} \right) \right)$$

(a6)

CC BY NC ND

15.0

TIERRA CON TAMAÑOS DIFERENTES EN UN CILINDRO ROTATORIO, CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES)

Hay muchos dispositivos para moler sólidos (si se quiere, tierras). En particular, hay algunos que consisten en estanques cilíndricos rotatorios, con eje de simetría y giro horizontal, donde se alojan las tierras esperando que la rotación del estanque las vaya volteando y moliendo consigo mismas (quizás con ayuda de bolas metálicas u otros cuerpos duros adicionados a propósito).

Imaginemos, pues, un estanque cilíndrico con eje de simetría y giro horizontal; y con tierra que se aloja dentro compuesta por fragmentos de tamaños diferentes y clasificables en cinco especies: una de fragmentos muy gruesos (digamos, la 1), otra de fragmentos gruesos (digamos, la 2), otra de medianos (la 3), otra de finos (la 4) y otra de muy finos (la 5).

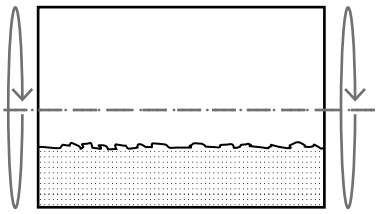


Fig. 1: Tierra en un estanque cilíndrico rotatorio, con eje horizontal

Interesa predecir la evolución de las masas de las diferentes especies de tierra dentro del estanque, ignorando que es posible mantener flujos entrando al estanque y saliendo de él por aberturas adecuadas; esto es, suponiendo que la molienda opera en tandas durante las cuales convierte los fragmentos de tierra muy gruesos en gruesos, medianos, finos y muy finos, los gruesos en medianos, finos y muy finos, los medianos en finos y muy finos, y los finos en muy finos.

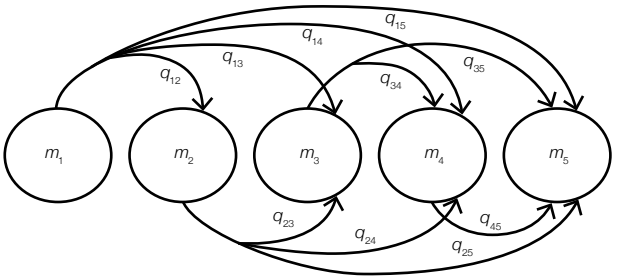


Fig. 2: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_1(t)$ es la masa en la especie 1, en [kg]; $m_2(t)$ es la masa en la especie 2, en [kg];

BY NC ND

$m_3(t)$ es la masa en la especie 3, en [kg]; $m_4(t)$ es la masa en la especie 4, en [kg]; $m_5(t)$ es la masa en la especie 5, en [kg]:

$$m_1(t) = m_1(0) + \int_0^t \left(-q_{12}(\tau) - q_{13}(\tau) - q_{14}(\tau) - q_{15}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$m_2(t) = m_2(0) + \int_0^t \left(q_{12}(\tau) - q_{23}(\tau) - q_{24}(\tau) - q_{25}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_3(t) = m_3(0) + \int_0^t \left(q_{13}(\tau) + q_{23}(\tau) - q_{34}(\tau) - q_{35}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$m_4(t) = m_4(0) + \int_0^t \left(q_{14}(\tau) + q_{24}(\tau) + q_{34}(\tau) - q_{45}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$m_5(t) = m_5(0) + \int_0^t \left(q_{15}(\tau) + q_{25}(\tau) + q_{35}(\tau) + q_{45}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (5)$$

$m_1(0)$ es la masa en la especie 1 inicialmente, en [kg]; $q_{12}(t)$ es el caudal de la especie 1 a la 2, en [kg s^{-1}]; $q_{13}(t)$ es el de la 1 a la 3, en [kg s^{-1}]; $q_{14}(t)$ es el de la 1 a la 4, en [kg s^{-1}]; $q_{15}(t)$ es el de la 1 a la 5, en [kg s^{-1}]; $m_2(0)$ es la masa en la especie 2 inicialmente, en [kg]; $q_{23}(t)$ es el caudal de la especie 2 a la 3, en [kg s^{-1}]; $q_{24}(t)$ es el de la 2 a la 4, en [kg s^{-1}]; $q_{25}(t)$ es el de la 2 a la 5, en [kg s^{-1}]; $m_3(0)$ es la masa en la especie 3 inicialmente, en [kg]; $q_{34}(t)$ es el caudal de la especie 3 a la 4, en [kg s^{-1}]; $q_{35}(t)$ es el l de la 2 a la 3, en [kg s^{-1}]; $m_4(0)$ es la masa en la especie 4 inicialmente, en [kg]; $q_{45}(t)$ es el caudal de la especie 4 a la 5, en [kg s^{-1}]; $m_5(0)$ es la masa en la especie 5 inicialmente, en [kg]:

$$m_1(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$q_{12}(t) = 0.42 \cdot q_1(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_{13}(t) = 0.22 \cdot q_1(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$q_{14}(t) = 0.10 \cdot q_1(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$$q_{15}(t) = 0.26 \cdot q_1(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$m_2(0) = 400 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$

$$q_{23}(t) = 0.66 \cdot q_2(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

$$q_{24}(t) = 0.12 \cdot q_2(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

$$q_{25}(t) = 0.22 \cdot q_2(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$m_3(0) = 80 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$q_{34}(t) = 0.55 \cdot q_3(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (16)$$

$$q_{35}(t) = 0.45 \cdot q_3(t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

BY NC ND

$$m_4\left(0\right) = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$q_{45}\left(t\right) = 1 \cdot q_4\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$m_5\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$q_1(t)$ es el caudal de fragmentos que dejan de pertenecer a la especie 1 por haberse quebrado, en [kg s^{-1}]; $q_2(t)$ es el de los que dejan de pertenecer a la especie 2, en [kg s^{-1}]; $q_3(t)$ es el de los que dejan de pertenecer a la 3, en [kg s^{-1}]; $q_4(t)$ es el de los que dejan de pertenecer a la 4, en [kg s^{-1}]:

$$q_1\left(t\right) = 0.012 \cdot m_1\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$q_2\left(t\right) = 0.007 \cdot m_2\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$q_3\left(t\right) = 0.004 \cdot m_3\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$q_4\left(t\right) = 0.003 \cdot m_4\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

El dibujo de la estructura causal es bastante aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: m_1 depende de q_{12}, q_{13}, q_{14} y q_{15}; m_2, de q_{12}, q_{23}, q_{24} y q_{25}; m_3, de q_{13}, q_{23}, q_{34} y q_{35}; m_4, de q_{14}, q_{24}, q_{34} y q_{45}; m_5, de q_{15}, q_{25}, q_{35} y q_{45}; q_{12}, q_{13}, q_{14} y q_{15}, de q_1; q_{23}, q_{24} y q_{25}, de q_2; q_{34} y q_{35}, de q_3; q_{45}, de q_4; q_1, de m_1; q_2, de m_2; q_3, de m_3; y q_4, de m_4.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (6), (11), (15), (18) y (20) no contienen ninguna variable que evoluciona: (7), (8), (9), (10), (12), (13), (14), (16), (17), (19), (21), (22), (23) y (24) contienen 2 cada una; (1), (2), (3), (4) y (5), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 19 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^{14} \cdot 5^5$ (=51200000) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(24).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1), (2), (3), (4) y (5) tienen las masas despejadas en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 5 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 51200000 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(29), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^{14}$ (=16384).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 16384 sistemas de ecuaciones restantes, 16383 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(24).

Si nos interesan las evoluciones de m_1, m_2, m_3, m_4 y m_5; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3), (4) y (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_1 inicial, m_2 inicial, m_3 inicial, m_4 inicial, m_5 inicial, dt y t inicial a la voluntad del usuario;

CC BY NC ND

entonces, podemos replantear (1)-(24) como:

$$m_{1,0} = \ldots \quad (6')$$

$$m_{2,0} = \ldots \quad (11')$$

$$m_{3,0} = \ldots \quad (15')$$

$$m_{4,0} = \ldots \quad (18')$$

$$m_{5,0} = \ldots \quad (20')$$

$$q_{1k} = 0.012 \cdot m_{1,k} \quad (21')$$

$$q_{2,k} = 0.007 \cdot m_{2,k} \quad (22')$$

$$q_{3,k} = 0.004 \cdot m_{3,k} \quad (23')$$

$$q_{4,k} = 0.003 \cdot m_{4,k} \quad (24')$$

$$q_{12,k} = 0.42 \cdot q_{1,k} \quad (7')$$

$$q_{13,k} = 0.22 \cdot q_{1,k} \quad (8')$$

$$q_{14,k} = 0.10 \cdot q_{1,k} \quad (9')$$

$$q_{15,k} = 0.26 \cdot q_{1,k} \quad (10')$$

$$q_{23,k} = 0.66 \cdot q_{2,k} \quad (12')$$

$$q_{24,k} = 0.12 \cdot q_{2,k} \quad (13')$$

$$q_{25,k} = 0.22 \cdot q_{2,k} \quad (14')$$

$$q_{34,k} = 0.55 \cdot q_{3,k} \quad (16')$$

$$q_{35,k} = 0.45 \cdot q_{3,k} \quad (17')$$

$$q_{45,k} = 1 \cdot q_{4,k} \quad (19')$$

$$m_{1,k+1} = m_{1,k} + \left(-q_{12,k} - q_{13,k} - q_{14,k} - q_{15,k}\right) \cdot dt \quad (1')$$

$$m_{2,k+1} = m_{2,k} + \left(q_{12,k} - q_{23,k} - q_{24,k} - q_{25,k}\right) \cdot dt \quad (2')$$

$$m_{3,k+1} = m_{3,k} + \left(q_{13,k} + q_{23,k} - q_{34,k} - q_{35,k}\right) \cdot dt \quad (3')$$

$$m_{4,k+1} = m_{4,k} + \left(q_{14,k} + q_{24,k} + q_{34,k} - q_{45,k}\right) \cdot dt \quad (4')$$

$$m_{5,k+1} = m_{5,k} + \left(q_{15,k} + q_{25,k} + q_{35,k} + q_{45,k}\right) \cdot dt \quad (5')$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación también es bastante aburrido. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.

CC BY NC ND

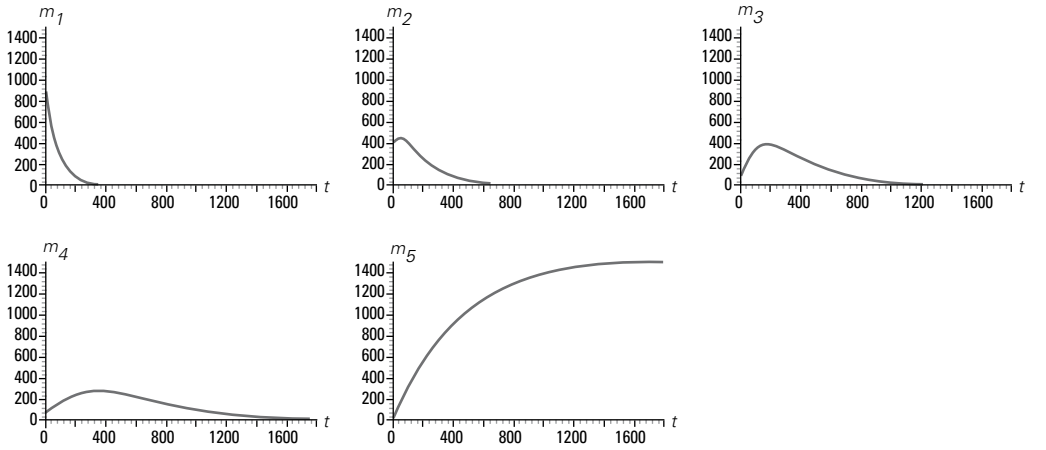


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (4) y (5) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (7), (8), (9), (10) y (21); derivando (2) e insertando (7), (12), (13), (14), (21) y (22); derivando (3) e insertando (8), (12), (16), (17), (21), (22) y (23); derivando (4) e insertando (9), (13), (16), (29), (21), (22), (23) y (24); y derivando (5) e insertando (10), (14), (17), (19), (21), (22), (23) y (24):

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = -0.012 \cdot m_1(t) \quad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 0.00504 \cdot m_1(t) - 0.007 \cdot m_2(t) \quad \text{(a2)}$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = 0.00264 \cdot m_1(t) + 0.00462 \cdot m_2(t) - 0.004 \cdot m_3(t) \quad \text{(a3)}$$

$$\frac{dm_4(t)}{dt} = 0.00120 \cdot m_1(t) + 0.00084 \cdot m_2(t) + 0.0022 \cdot m_3(t) - 0.003 \cdot m_4(t) \quad \text{(a4)}$$

$$\frac{dm_5(t)}{dt} = 0.00312 \cdot m_1(t) + 0.00154 \cdot m_2(t) + 0.0018 \cdot m_3(t) + 0.003 \cdot m_4(t) \quad \text{(a5)}$$

BY NC ND

16.0

AGUA Y SOLUTO A LO LARGO DE UN TUBO CILÍNDRICO CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un tubo cilíndrico con eje de simetría horizontal, que está inmerso en agua y, por dentro, lleva agua con soluto hacia la derecha. El soluto se difunde incluso a través de la pared del tubo, en proporción con la diferencia de fracciones de masa con que se encuentra en la disolución. El tubo está lleno siempre y el soluto es poco siempre, de manera que la densidad de la disolución es casi la del agua. El agua en que está inmerso el tubo es mucha, de manera que se puede ignorar la presencia de soluto en ella.

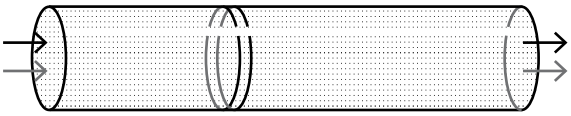


Fig. 1: Agua y soluto en un tubo cilíndrico con eje horizontal

Interesa predecir las evoluciones de las fracciones de masa de soluto en la disolución a lo largo del tubo (inventando en éste rodajas ficticias, quietas, delgadas y presuntamente homogéneas por dentro, y numerándolas de izquierda a derecha).

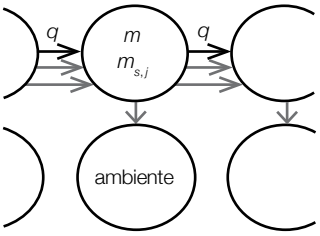


Fig. 2: Estructura espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

t es el tiempo, en [s].

$\gamma j(t)$ es la fracción de masa de soluto en la disolución de la rodaja j, en [kg kg^{-1}]:

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} 0.02 & \text{si } j = 1 \\ \dfrac{m_{s,j}(t)}{m} & \text{si } 1 < j < J \quad \text{(por ejemplo)} \\ 0 & \text{si } j = J \end{cases} \qquad (1)$$

$m_{s,j}(t)$ es la masa en el soluto dentro de la rodaja j, en [kg]; m es la masa en la disolución dentro de cualquier rodaja, en [kg]; J es la cantidad de rodajas:

CC BY NC ND

$$m_{s,j}(t) = m_{s,j}(0) + \int_0^t \left(\begin{array}{l} q(\tau)\cdot\gamma_{j-1}(\tau) - q(\tau)\cdot\gamma_j(\tau) \\ +g_1\cdot\frac{\pi\cdot R^2}{dx}\cdot\left(\gamma_{j-1}(\tau)-\gamma_j(\tau)\right) - g_1\cdot\frac{\pi\cdot R^2}{dx}\cdot\left(\gamma_j(\tau)-\gamma_{j+1}(\tau)\right) \\ -g_2\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot R\cdot dx}{\varepsilon}\cdot\left(\gamma_j(\tau)-0\right) \end{array} \right)\cdot d\tau \quad \text{si} \quad 1<j<J \tag{2}$$

$$m = 1.57 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$J = 7 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$m_{s,j}(0)$ es la masa en el soluto dentro de la rodaja j inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal de agua que viaja hacia la derecha por el tubo, en [kg s^{-1}]; g_1 es la difusividad del soluto por el agua, en [kg s^{-1} m^{-1}]; R es el radio interno del tubo, en [m]; dx es el ancho de las rodajas, en [m]; g_2 es la difusividad del soluto por el tubo, en [kg s^{-1} m^{-1}]; ε es el espesor de la pared del tubo, en [m]:

$$m_{s,j}(0) = 0 \quad \text{si} \quad 1<j<J \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$q(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad t<120 \\ 0.06 & \text{si} \quad 120 \le t < 240 \\ 0 & \text{si} \quad 240 \le t \end{array} \right. \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$g_1 = 0.40 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$R = 0.05 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$dx = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$g_2 = 0.002 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$\varepsilon = 0.005 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

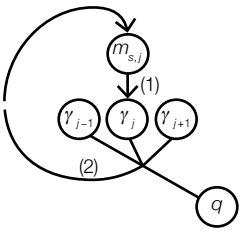


Fig. 3: Estructura causal para una rodaja (si $1<j<J$, si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (7), (8), (9), (10) y (11) no contienen ninguna variable que evoluciona: (6) contiene 1; (1) contiene 2; (2), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 3 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^1 \cdot 6^1$ (=12) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(11).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

CC BY NC ND

(2) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 6 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado (para la rodaja *j*, la *j*-1 y la *j*+1) y, de los 12 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(11), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^1$ (=2).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 2 sistemas de ecuaciones restantes, 1 tiene una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j*, la *j*-1 o la *j*+1), y no es cuerdo causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(11).

Si nos interesa la evolución de γ_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (2); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $m_{s,j}$ inicial, *q, m, J,* g_1, *R, dx,* g_2, ε, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(11) como:

$$m = \ldots \tag{3'}$$

$$J = \ldots \tag{4'}$$

$$g_1 = \ldots \tag{7'}$$

$$R = \ldots \tag{8'}$$

$$dx = \ldots \tag{9'}$$

$$g_2 = \ldots \tag{10'}$$

$$\varepsilon = \ldots \tag{11'}$$

$$m_{s,j,0} = \ldots \quad \text{si} \quad 1 < j < J \tag{5'}$$

$$q_k = \ldots \tag{6'}$$

$$\gamma_{j,k} = \begin{cases} \ldots & \text{si} \quad j = 1 \\ \dfrac{m_{s,j,k}}{m} & \text{si} \quad 1 < j < J \\ \ldots & \text{si} \quad j = J \end{cases} \tag{1'}$$

$$m_{s,j,k+1} = m_{s,j,k} + \left(\begin{array}{l} q_k \cdot \gamma_{j-1,k} - q_k \cdot \gamma_{j,k} \\ +g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(\gamma_{j-1,k} - \gamma_{j,k} \right) - g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(\gamma_{j,k} - \gamma_{j+1,k} \right) \\ -g_2 \cdot \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta x}{\varepsilon} \cdot \gamma_{j,k} \end{array} \right) \cdot dt \qquad \text{si} \quad 1 < j < J \tag{2'}$$

CC BY NC ND

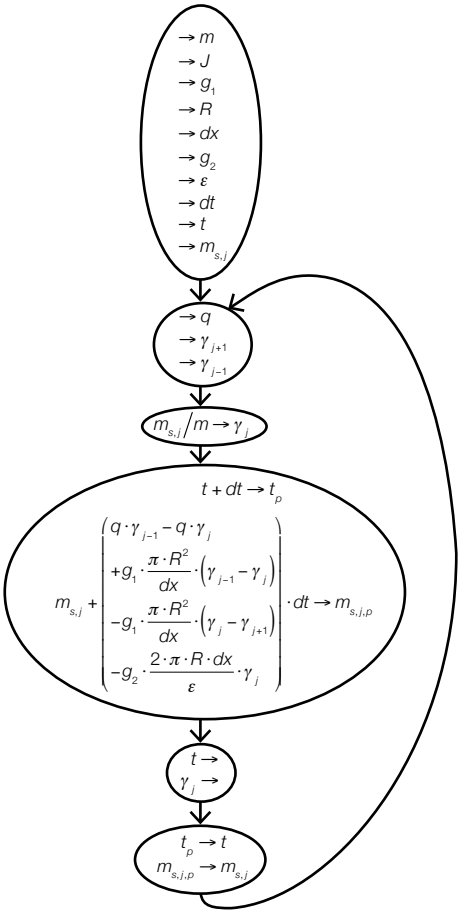


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación) para una rodaja (si 1<*j*<*J*)

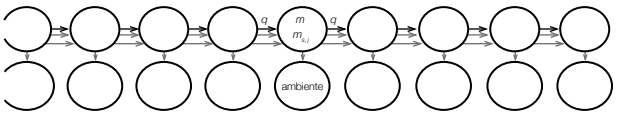


Fig. 5: Estructura espacial para el tubo

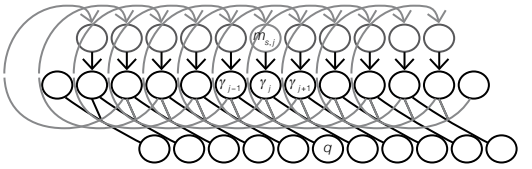


Fig. 6: Estructura causal para el tubo

cc BY NC ND

El dibujo de la estructura temporal del método de computación para el tubo, es enredado. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 7.

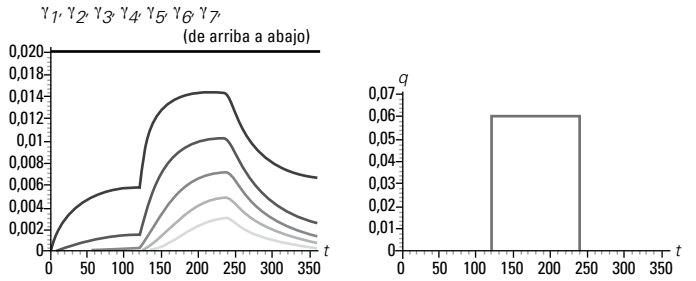


Fig. 7: Predicciones

En las predicciones, $\gamma_1(t)$=0.02 y $\gamma_7(t)$=0 por las imposiciones hechas en (1) a las rodajas 1 y J (=7) como condiciones de los bordes del tubo. Tales condiciones son dudables causalmente.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las masas de soluto. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de masa de soluto en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Si luego se quiere hablar de caudales, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de caudales en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las masas.

$\underline{m}_{s,j}(t)$ es la concentración de masa de soluto en el volumen de la rodaja j, en [kg m^{-3}]; m es la concentración de masa de disolución en el volumen de cualquier rodaja, en [kg m^{-3}]; $q(t)$ es la concentración de caudal en el área de la superficie entre rodajas, en [kg s^{-1} m^{-2}]:

$$\underline{m}_{s,j}\left(t\right) = \frac{m_{s,j}\left(t\right)}{\pi \cdot R^2 \cdot dx} \qquad \text{si} \quad 1 < j < J \qquad \text{(a1)}$$

$$\underline{m} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 \cdot dx} \qquad \text{(a2)}\ ^{5}$$

$$\underline{q}\left(t\right) = \frac{q\left(t\right)}{\pi \cdot R^2} \qquad \text{(a3)}$$

Derivando (a1), insertando (2) y (1), y usando (a1), (a2) y (a3):

[5] Como puede apreciarse en (3), aquí $\underline{m}$ coincide con la densidad ρ, porque la masa de la disolución dentro de cualquier rodaja abarca parejamente todo el volumen de ésta.

CC BY NC ND

$$\frac{d\underline{m}_{s,j}(t)}{dt} = -\frac{\underline{q}(t)}{\underline{m}} \cdot \frac{\underline{m}_{s,j}(t) - \underline{m}_{s,j-1}(t)}{dx} + \frac{g_1}{\underline{m}} \cdot \frac{\underline{m}_{s,j+1}(t) - 2 \cdot \underline{m}_{s,j}(t) + \underline{m}_{s,j-1}(t)}{(dx)^2} - \frac{2 \cdot g_2}{\underline{m} \cdot \varepsilon \cdot R} \cdot \underline{m}_{s,j}(t)$$

si $1 < j < J$

Y, haciendo que dx tienda a 0 y reconociendo que $d\underline{m}(x,t)/dt = \partial \underline{m}(x,t)/\partial t$ cuando esta derivada parcial se refiere a x constante:

$$\frac{\partial \underline{m}_s(x,t)}{\partial t} = -\frac{\underline{q}(t)}{\underline{m}} \cdot \frac{\partial \underline{m}_s(x,t)}{\partial x} + \frac{g_1}{\underline{m}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{m}_s(x,t)}{\partial x^2} - \frac{2 \cdot g_2}{\underline{m} \cdot \varepsilon \cdot R} \cdot \underline{m}_s(x,t) \qquad \text{si} \quad 0 < x < X \qquad \text{(a4)}$$

Si nos interesan las evoluciones de las fracciones de masa de soluto en la disolución de la rodaja j, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) y acomodando para dx tendiente a 0:

$$\gamma(x,t) = \frac{\underline{m}_s(x,t)}{\underline{m}} \quad \text{si} \quad 0 < x < X \qquad \text{(a5)}$$

Por cierto, X es la longitud del tubo, en [m].

BY NC ND

17.0

UNA BOLITA DE NAFTALINA (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos una bolita de naftalina que se evapora lentamente, sin violentar el ambiente.

Fig. 1: Una bolita de naftalina

Interesa predecir la evolución del radio de la bolita.

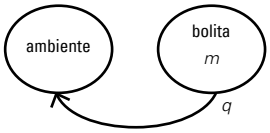


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].
$r(t)$ es el radio de la bolita, en [m]:

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot V(t)} \quad (1)$$

$V(t)$ es el volumen de la bolita, en [m^3]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \quad (2)$$

$m(t)$ es la masa en la bolita, en [kg]; ρ es su densidad, en [kg m^{-3}]:

$$m(t) = m(0) - \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$\rho = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$m(0)$ es la masa inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es su caudal de evaporación, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 0.0025 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$q(t) = c \cdot A(t) \quad (6)$$

c es un coeficiente de evaporación de la naftalina, en [kg s^{-1} m^{-2}]; $A(t)$ es el área superficial de la bolita, en [m^2]:

$$c = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$A(t) = 4 \cdot \pi \cdot r^2(t) \quad (8)$$

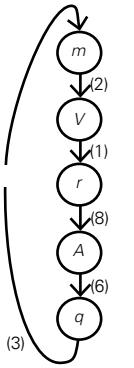


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5) y (7) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3), (6) y (8), contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^5 (=32) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(8).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

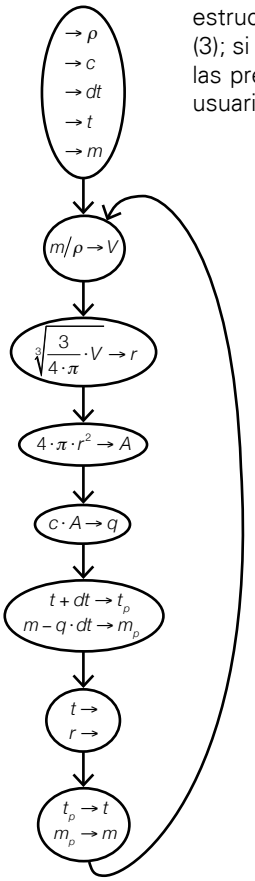
(2) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 32 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(8), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^4$ (=16).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 16 sistemas de ecuaciones restantes, 15 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(8).

Si nos interesa la evolución de *r*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (3); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *m* inicial, ρ, *c, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(8) como:



$$\rho = \ldots \tag{4'}$$

$$c = \ldots \tag{7'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{5'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{2'}$$

$$r_k = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot V_k} \tag{1'}$$

$$A_k = 4 \cdot \pi \cdot r_k^2 \tag{8'}$$

$$q_k = c \cdot A_k \tag{6'}$$

$$m_{k+1} = m_k - q_k \cdot dt \tag{3'}$$

Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1000 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 5.

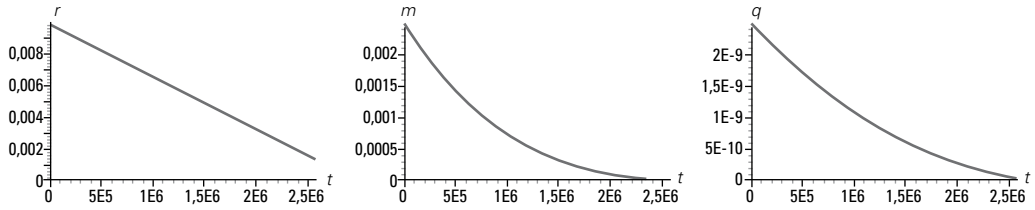


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (3) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (3) e insertando (6), (8), (1) y (2):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -c \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m(t)}{\rho}} \right)^2 \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del radio de la bolita, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (2):

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m(t)}{\rho}} \qquad \text{(a2)}$$

Al respecto, derivando (a2) e insertando (a1):

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{-c \cdot 4 \cdot \pi}{3}$$

CC BY NC ND

18.0
UNA REACCIÓN QUÍMICA (MASAS Y CAUDALES)

La expresión química más simple de una reacción que involucra moléculas de especies diferentes, es como sigue:

$$n_{r1}r_1 + ...n_{rM}r_M \rightarrow n_{p1}p_1 + ...n_{pN}p_N$$

donde n_{r1},... y n_{rM}, y n_{p1},... y n_{pN}, son los coeficientes estequiométricos para las moléculas de los reactantes y productos, respectivamente [6] ; r_1,... y r_M, y p_1,... y p_N, son las expresiones químicas (o abreviaturas) de las moléculas de los reactantes y productos, respectivamente; + indica coexistencia en una etapa; y → indica una transición.

Esta **no** es una fórmula en el sentido matemático: r_1,... r_M, p_1,... y p_N **no** son variables numéricas; + **no** es la fórmula para sumar; las ausencias de símbolos entre n_{r1} y r_1,... n_{rM} y r_M, n_{p1} y p_1,... y n_{pN} y p_N, **no** son fórmulas para multiplicar. La expresión abusa de la notación para insinuar, a la izquierda, una etapa en que hay n_{r1} moléculas r_1... y n_{rM} moléculas r_M, de los reactantes, y, a la derecha, una etapa posterior en que ya no hay tales moléculas sino n_{p1} moléculas p_1... y n_{pN} moléculas p_N, de los productos: las reacciones químicas son conversiones de reactantes en productos.

Pero, ya que cada molécula tiene una masa y su medida sí es un número, sí podemos plantear algunas fórmulas en el sentido matemático. Por lo pronto:

$$n_{p1} \cdot \mu_{p1} + ...n_{pN} \cdot \mu_{pN} = n_{r1} \cdot \mu_{r1} + ...n_{rM} \cdot \mu_{rM} \quad [7]$$

donde μ_{p1} es la masa de cada molécula p_1,... μ_{pN} es la de cada molécula p_N, μ_{r1} es la de cada molécula r_1,... y μ_{rM} es la de cada molécula r_M, todas en [kg]; además, + es la fórmula para sumar, · es la fórmula para multiplicar, y = es la fórmula para igualar.

Eso nos permite conjeturar que, dentro de un recinto cerrado donde ocurren reacciones de la especie descrita recién:

$$m_{ri,k+1} \approx m_{ri,k} - \frac{n_{ri} \cdot \mu_{ri}}{n_{r1} \cdot \mu_{r1} + ...n_{rM} \cdot \mu_{rM}} \cdot q_k \cdot dt \qquad \text{si} \quad 1 \le i \le M$$

$$m_{pj,k+1} \approx m_{pj,k} + \frac{n_{pj} \cdot \mu_{pj}}{n_{p1} \cdot \mu_{p1} + ...n_{pN} \cdot \mu_{pN}} \cdot q_k \cdot dt \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le N$$

y, enseguida, que en ese recinto:

[6] Es decir, los números enteros positivos más pequeños que igualan las cantidades de átomos involucrados en las moléculas involucradas en la reacción, especie por especie, a ambos lados de →.

[7] Esto es válido para unas 6 o 7 cifras significativas en las reacciones entre moléculas; más allá de esas cifras aparecen discrepancias, porque las masas no son eternas estrictamente.

CC BY NC ND

$$m_{ri}(t) = m_{ri}(0) - \int_0^t \frac{n_{ri}\cdot\mu_{ri}}{n_{r1}\cdot\mu_{r1}+\ldots n_{rM}\cdot\mu_{rM}}\cdot q(\tau)\cdot d\tau \quad \text{si} \quad 1\le i\le M$$

$$m_{pj}(t) = m_{pj}(0) + \int_0^t \frac{n_{pj}\cdot\mu_{pj}}{n_{p1}\cdot\mu_{p1}+\ldots n_{pN}\cdot\mu_{pN}}\cdot q(\tau)\cdot d\tau \quad \text{si} \quad 1\le j\le N$$

donde $m_{r1},\ldots m_{rM}$, $m_{p1},\ldots$ y m_{pN} son las masas totales en los reactantes o productos con moléculas $r_1,\ldots r_M$, $p_1,\ldots$ y p_N, respectivamente, en [kg], y q es el caudal del conjunto de los reactantes al de los productos, en [kg s^{-1}]; además, - es la fórmula para restar, y ___ es la fórmula para dividir.

$q(t)$ evoluciona porque los reactantes se van agotando, y cada vez es menos probable que sus moléculas se encuentren.

Al respecto, si los reactantes están gaseosos podemos especular lo siguiente:

1. en el recinto, el número de moléculas r_1 es m_{r1}/μ_{r1};

2. en una parte del recinto con volumen v, en [m^3], el número de moléculas r_1 sería $(m_{r1}/\mu_{r1})\cdot(v/V)$, donde V es el volumen del recinto completo, en [m^3];

3. en una parte del recinto con volumen $v=V/(m_{r1}/\mu_{r1})$, en [m^3], habría 1 molécula r_1;

4. la probabilidad de que haya 1 molécula r_1 en esa parte del recinto con volumen $V/(m_{r1}/\mu_{r1})$ sería 1;

5. la probabilidad de que haya 1 molécula r_1 en una parte más chica, con volumen $n_{r1}\cdot\varpi_{r1}+\ldots n_{rM}\cdot\varpi_{rM}$ donde ϖ_{r1} es el volumen de cada molécula $r_1,\ldots$ y ϖ_{rM} es el de cada molécula r_M, todos en [m^3], sería $(n_{r1}\cdot\varpi_{r1}+\ldots n_{rM}\cdot\varpi_{rM})/(V/(m_{r1}/\mu_{r1}))$ (menor que 1); es decir, $C_{r1}\cdot(m_{r1}/V)$, donde $C_{r1}=(n_{r1}\cdot\varpi_{r1}+\ldots n_{rM}\cdot\varpi_{rM})/\mu_{r1}$;

6. la probabilidad de que haya n_{r1} moléculas r_1 en esa parte más chica sería $(C_{r1}\cdot(m_{r1}/V))^{nr1}$;

7. la probabilidad de que haya n_{r1} moléculas $r_1,\ldots$ y n_{rM} moléculas r_M en esa misma parte (chocando, porque caben justas) sería $(C_{r1}\cdot(m_{r1}/V))^{nr1}\cdot\ldots(C_{rM}\cdot(m_{rM}/V))^{nrM}$; es decir, $C\cdot(m_{r1}/V)^{nr1}\cdot\ldots(m_{rM}/V)^{nrM}$, donde $C=C_{r1}{}^{nr1}\cdot\ldots C_{rM}{}^{nrM}$;

8. la probabilidad de que tales moléculas reaccionen allí, chocando, sería $c\cdot(m_{r1}/V)^{nr1}\cdot\ldots(m_{rM}/V)^{nrM}$ con c menor que C y dependiente de la energía del choque: si la energía fuera poca, no habría reacción.

En 1884, Jacobus Van´t Hoff (1852-1911) y, en 1889, Svante August Arrhenius (1859-1927) concluyeron que c es proporcional a $e^{-B/T}$, donde B es un coeficiente, en [K], y T es la temperatura del recinto (es decir, un síntoma que permite diagnosticar la energía de los choques), en [K].

Eso ratifica nuestras especulaciones, pero podemos poner en duda a $n_{r1},\ldots$ y n_{rM} como exponentes adecuados si se alejan de 1, porque un choque numeroso es poco probable y es más probable que la reacción original sea un resumen de varias con coeficientes estequiométricos menores, en secuencia.

Por consiguiente, si los reactantes están gaseosos, para el recinto completo podemos suponer:

$$q \approx A\cdot e^{-B/T}\cdot\left(\frac{m_{r1}}{V}\right)^{\varepsilon_{r1}}\cdot\ldots\left(\frac{m_{rM}}{V}\right)^{\varepsilon_{rM}}$$

donde A es otro coeficiente, en [$kg^{1-(\varepsilon r1+\ldots\varepsilon rM)}\ m^{3\cdot(\varepsilon r1+\ldots\varepsilon rM)}\ s^{-1}$], y $\varepsilon_{r1},\ldots$ y ε_{rM} son exponentes adecuados.

Vamos a una reacción de ejemplo:

BY NC ND

$2NO+2H_2 \rightarrow N_2+2H_2O$

imaginando que ocurre en un estanque cerrado, con temperatura mantenida artificialmente cerca de 1073, en [K], de manera que todas las sustancias estén gaseosas.

Interesa predecir las evoluciones de las masas de NO, H_2, H_2O y N_2.

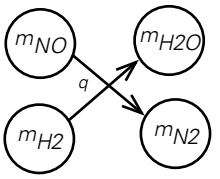


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_{NO}(t)$ es la masa de NO dentro del estanque, en [kg]; $m_{H2}(t)$ es la masa de H_2, en [kg]; $m_{N2}(t)$ es la de N_2, en [kg]; $m_{H2O}(t)$ es la de H_2O, en [kg]:

$$m_{NO}\left(t\right) = m_{NO}\left(0\right) - \int_0^t \frac{2\cdot\mu_{NO}}{2\cdot\mu_{NO}+2\cdot\mu_{H2}}\cdot q\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{1}$$

$$m_{H2}\left(t\right) = m_{H2}\left(0\right) - \int_0^t \frac{2\cdot\mu_{H2}}{2\cdot\mu_{NO}+2\cdot\mu_{H2}}\cdot q\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

$$m_{N2}\left(t\right) = m_{N2}\left(0\right) + \int_0^t \frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2}+2\cdot\mu_{H2O}}\cdot q\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{3}$$

$$m_{H2O}\left(t\right) = m_{H2O}\left(0\right) + \int_0^t \frac{2\cdot\mu_{H2O}}{\mu_{N2}+2\cdot\mu_{H2O}}\cdot q\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$m_{NO}(0)$ es la masa de NO inicialmente, en [kg]; μ_{NO} es la masa molecular del NO, en [kg]; μ_{H2} es la masa molecular del H_2, en [kg]; $q(t)$ es el caudal de NO y H_2 a N_2 y H_2O con la reacción, en [kg s^{-1}]; $m_{H2}(0)$ es la masa de H_2 inicialmente, en [kg]; μ_{N2} es la masa molecular del N_2, en [kg]; μ_{H2O} es la masa molecular del H_2O, en [kg]; $m_{N2}(0)$ es la masa de N_2 inicialmente, en [kg]; $m_{H2O}(0)$ es la masa de H_2O inicialmente, en [kg]:

$$m_{NO}\left(0\right) = 0.18 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$\mu_{NO} = \left(2.326+2.657\right)\cdot 10^{-26} \tag{6}$$

$$\mu_{H2} = \left(0.1673\cdot 2\right)\cdot 10^{-26} \tag{7}$$

$$q\left(t\right) = K\cdot\left\langle\frac{m_{NO}\left(t\right)}{V}\right\rangle^2\cdot\frac{m_{H2}\left(t\right)}{V} \tag{8}$$

$$m_{H2}\left(0\right) = 0.012 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$m_{N2}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$\mu_{H2O} = \left(0.1673\cdot 2+2.657\right)\cdot 10^{-26} \tag{11}$$

cc BY NC ND

$$\mu_{H2O} = \left(0.1673 \cdot 2 + 2.657\right) \cdot 10^{-26} \quad (12)$$

$$m_{H2O}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

K es un coeficiente que resume a $A \cdot e^{-B/T}$ cuando la temperatura en el estanque es la señalada, en [$kg^{-1}\ m^6\ s^{-1}$]; *V* es el volumen del estanque, en [m^3]:

$$K = 0.698 \quad (14)$$

$$V = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

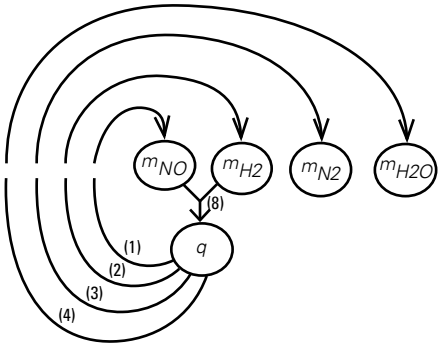


Fig. 2: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (5), (6), (7), (9), (10), (11), (12), (13), (14) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3) y (4) contienen 2 cada una; (8) contiene 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^4 \cdot 3^1$ (=48) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1), (2), (3) y (4) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 48 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 3^1$ (=3).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 3 sistemas de ecuaciones restantes, 2 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesan las evoluciones de m_{NO}, m_{H2}, m_{N2} y m_{H2O}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3) y (4); si queremos estructurar temporalmente

CC BY NC ND

un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_{NO} inicial, m_{H2} inicial, m_{N2} inicial, m_{H2O} inicial, *K, V, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$$K = \ldots \tag{14'}$$

$$V = \ldots \tag{15'}$$

$$m_{NO,0} = \ldots \tag{5'}$$

$$m_{H2,0} = \ldots \tag{9'}$$

$$m_{N2,0} = \ldots \tag{10'}$$

$$m_{H2O,0} = \ldots \tag{13'}$$

$$\mu_{NO} = \left(2.326 + 2.657\right) \cdot 10^{-26} \tag{6'}$$

$$\mu_{H2} = \left(0.1673 \cdot 2\right) \cdot 10^{-26} \tag{7'}$$

$$\mu_{N2} = \left(2.326 \cdot 2\right) \cdot 10^{-26} \tag{11'}$$

$$\mu_{H2O} = \left(0.1673 \cdot 2 + 2.657\right) \cdot 10^{-26} \tag{12'}$$

$$q_k = K \cdot \left(\frac{m_{NO,k}}{V} \right)^2 \cdot \frac{m_{H2,k}}{V} \tag{8'}$$

$$m_{NO,k+1} = m_{NO,k} - \frac{2 \cdot \mu_{NO}}{2 \cdot \mu_{NO} + 2 \cdot \mu_{H2}} \cdot q_k \cdot dt \tag{1'}$$

$$m_{H2,k+1} = m_{H2,k} - \frac{2 \cdot \mu_{H2}}{2 \cdot \mu_{NO} + 2 \cdot \mu_{H2}} \cdot q_k \cdot dt \tag{2'}$$

$$m_{N2,k+1} = m_{N2,k} + \frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2} + 2 \cdot \mu_{H2O}} \cdot q_k \cdot dt \tag{3'}$$

$$m_{H2O,k+1} = m_{H2O,k} + \frac{2 \cdot \mu_{H2O}}{\mu_{N2} + 2 \cdot \mu_{H2O}} \cdot q_k \cdot dt \tag{4'}$$

CC BY NC ND

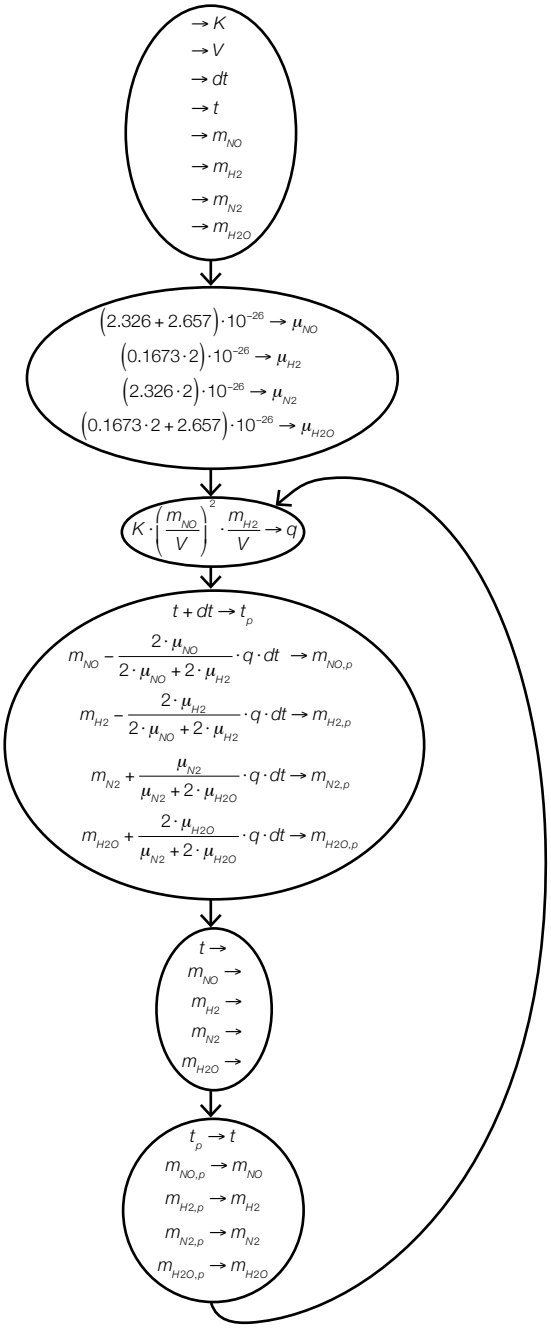


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 4.

CC BY NC ND

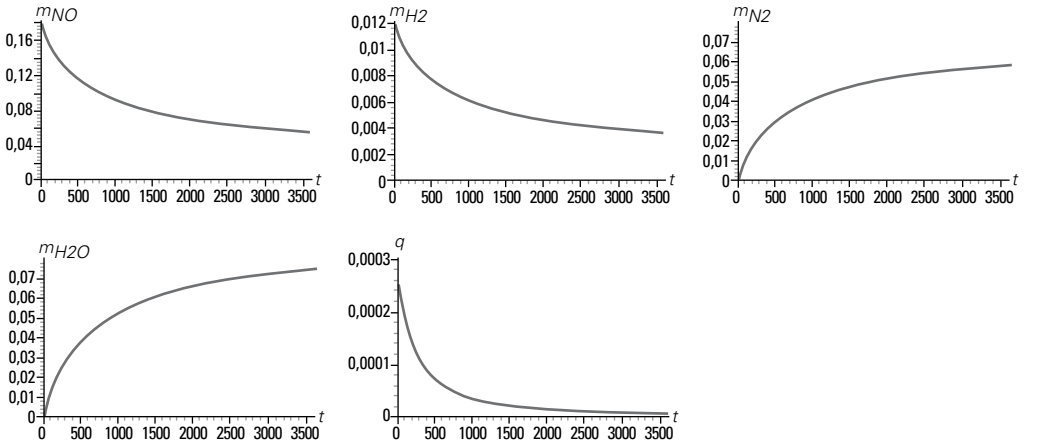


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3) y (4) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (8), derivando (2) e insertando (8), derivando (3) e insertando (8), y derivando (4) e insertando (8):

$$\frac{dm_{NO}(t)}{dt} = -\frac{2\cdot\mu_{NO}}{2\cdot\mu_{NO}+2\cdot\mu_{H2}}\cdot K\cdot\left(\frac{m_{NO}(t)}{V}\right)^2\cdot\frac{m_{H2}(t)}{V} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_{H2}(t)}{dt} = -\frac{2\cdot\mu_{H2}}{2\cdot\mu_{NO}+2\cdot\mu_{H2}}\cdot K\cdot\left(\frac{m_{NO}(t)}{V}\right)^2\cdot\frac{m_{H2}(t)}{V} \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{dm_{N2}(t)}{dt} = \frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2}+2\cdot\mu_{H2O}}\cdot K\cdot\left(\frac{m_{NO}(t)}{V}\right)^2\cdot\frac{m_{H2}(t)}{V} \qquad \text{(a3)}$$

$$\frac{dm_{H2O}(t)}{dt} = \frac{2\cdot\mu_{H2O}}{\mu_{N2}+2\cdot\mu_{H2O}}\cdot K\cdot\left(\frac{m_{NO}(t)}{V}\right)^2\cdot\frac{m_{H2}(t)}{V} \qquad \text{(a4)}$$

CC BY NC ND

19.0

TRES REACCIONES QUÍMICAS [8] (MASAS Y CAUDALES)

Revisemos lo que ocurre con el óxido nítrico (NO) y el hidrógeno (H_2) cuando la temperatura es mantenida artificialmente cerca de 1073, en [K], de manera que todas las sustancias estén gaseosas. En principio, ocurre una reacción neta de la que surgen nitrógeno (N_2) y agua (H_2O) según:

$$2NO+2H_2 \rightarrow N_2+2H_2O$$

Lo que importa ahora es que tal reacción no puede considerarse realista a nivel detallado, porque supone el encuentro simultáneo de cuatro moléculas, y ese encuentro es improbable. Para una visión más realista, hay que pensar en reacciones intermedias y acopladas.

Con la temperatura señalada, podemos suponer que el óxido nítrico forma un intermediario muy rápidamente y con una contra-reacción significativa:

$$2NO \leftrightarrow N_2O_2$$

un primer ataque del hidrógeno produce agua lentamente y sin contra-reacción apreciable:

$$N_2O_2+H_2 \rightarrow N_2O+H_2O$$

y un segundo ataque del hidrógeno libera nitrógeno rápidamente (porque N_2O está sometido a una polarización fuerte) sin contra-reacción importante (porque N_2 es muy estable, a menos que exista una superficie sólida catalizadora):

$$N_2O+H_2 \rightarrow N_2+H_2O$$

La figura 1 aporta más antecedentes.

Consideremos, pues, estas tres reacciones últimas en vez de la primera, e imaginemos que ocurren en un estanque cerrado, con temperatura mantenida artificialmente cerca de 1073, en [K], de manera que todas las sustancias estén gaseosas.

Interesa predecir las evoluciones de las masas de NO, N_2O_2, H_2, H_2O, N_2O y N_2.

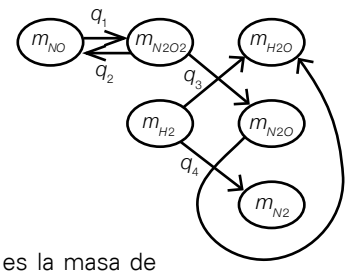


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_{NO}(t)$ es la masa de NO dentro del estanque, en [kg]; $m_{N2O2}(t)$ es la masa de N_2O_2, en [kg]; $m_{H2}(t)$ es la de H_2, en [kg]; $m_{H2O}(t)$ es la de H_2O, en [kg]; $m_{N2O}(t)$ es la de N_2O, en [kg]; $m_{N2}(t)$ es la de N_2, en [kg]:

[8] De: P. Ulloa y J. Glaría, 2003, Segundo esbozo de una Química para intrusos, *Informe interno, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.*

CC BY NC ND

$$m_{NO}(t) = m_{NO}(0) + \int_0^t \left(-q_1(\tau) + q_2(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$m_{N2O2}(t) = m_{N2O2}(0) + \int_0^t \left(q_1(\tau) - q_2(\tau) - \frac{\mu_{N2O2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot q_3(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_{H2}(t) = m_{H2}(0) + \int_0^t \left(- \frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot q_3(\tau) - \frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot q_4(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$m_{H2O}(t) = m_{H2O}(0) + \int_0^t \left(\frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot q_3(\tau) + \frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot q_4(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$m_{N2O}(t) = m_{N2O}(0) + \int_0^t \left(\frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot q_3(\tau) - \frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot q_4(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (5)$$

$$m_{N2}(t) = m_{N2}(0) + \int_0^t \left(\frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot q_4(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (6)$$

$m_{NO}(0)$ es la masa de NO inicialmente, en [kg]; $q_1(t)$ es el caudal de NO a N_2O_2, en [kg s^{-1}]; $q_2(t)$ es el caudal de N_2O_2 a NO, en [kg s^{-1}]; $m_{N2O2}(0)$ es la masa de N_2O_2 inicialmente, en [kg]; μ_{N2O2} es la masa molecular del N_2O_2, en [kg]; μ_{H2} es la masa molecular del H_2, en [kg]; $q_3(t)$ es el caudal de N_2O_2 y H_2 a H_2O y N_2O, en [kg s^{-1}]; $m_{H2}(0)$ es la masa de H_2 inicialmente, en [kg]; μ_{N2O} es la masa molecular del N_2O, en [kg]; $q_4(t)$ es el caudal de N_2O y H_2 a H_2O y N_2, en [kg s^{-1}]; $m_{H2O}(0)$ es la masa de H_2O inicialmente, en [kg]; μ_{H2O} es la masa molecular del H_2O, en [kg]; μ_{N2} es la masa molecular del N_2, en [kg]; $m_{N2O}(0)$ es la masa de N_2O inicialmente, en [kg]; $m_{N2}(0)$ es la masa de N_2 inicialmente, en [kg]:

$$m_{NO}(0) = 0.18 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_1(t) = K_1 \cdot \left(\frac{m_{NO}(t)}{V} \right)^2 \quad (8)\ [9]$$

$$q_2(t) = K_2 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \quad (9)$$

$$m_{N2O2}(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$\mu_{N2O2} = \left(2.326 \cdot 2 + 2.657 \cdot 2\right) \cdot 10^{-26} \quad (11)$$

$$\mu_{H2} = 0.1673 \cdot 2 \cdot 10^{-26} \quad (12)$$

$$q_3(t) = K_3 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \quad (13)$$

$$m_{H2}(0) = 0.012 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

[9] Suponiendo que los exponentes de las concentraciones son iguales a los coeficientes estequiométricos correspondientes.

CC BY NC ND

$$\mu_{N2O} = \left(2.326 \cdot 2 + 2.657\right) \cdot 10^{-26} \quad (15)$$

$$q_4\left(t\right) = K_4 \cdot \frac{m_{N2O}\left(t\right)}{V} \cdot \frac{m_{H2}\left(t\right)}{V} \quad (16)$$

$$m_{H2O}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

$$\mu_{H2O} = \left(0.1673 \cdot 2 + 2.656\right) \cdot 10^{-26} \quad (18)$$

$$\mu_{N2} = 2.326 \cdot 2 \cdot 10^{-26} \quad (19)$$

$$m_{N2O}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (20)$$

$$m_{N2}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (21)$$

K_1 es un coeficiente que resume a $A \cdot e^{-B/T}$ cuando la temperatura en el estanque es la señalada, en [kg^{-1} m^6 s^{-1}]; V es el volumen del estanque, en [m^3]; K_2 es otro coeficiente, en [m^3 s^{-1}]; K_3 es otro, en [kg^{-1} m^6 s^{-1}]; K_4 es otro, en [kg^{-1} m^6 s^{-1}]:

$$K_1 = 7 \quad \text{(en ausencia de datos precisos)} \quad (22)\ [10]$$

$$V = 1 \quad (23)$$

$$K_2 = 7 \quad \text{(en ausencia de datos precisos)} \quad (24)$$

$$K_3 = 0.698 \quad (25)$$

$$K_4 = 7 \quad \text{(en ausencia de datos precisos)} \quad (26)$$

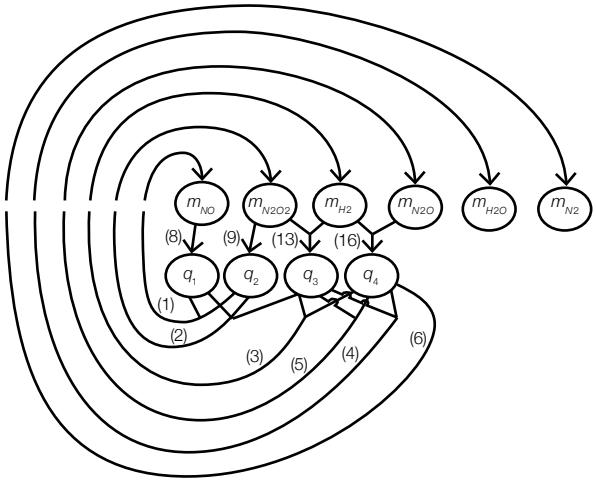


Fig. 2: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

[10] Sólo pretendemos reflejar que K_1, K_2 y K_4 ocasionan cinéticas mucho más rápidas que K_3, en las reacciones correspondientes; K_3 es bastante preciso.

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (7), (10), (11), (12), (14), (15), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) y (26) no contienen ninguna variable que evoluciona: (6), (8) y (9) contienen 2 cada una; (1), (3), (4), (5), (13) y (16) contienen 3; (2), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^3 \cdot 3^6 \cdot 4^1$ (=23328) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(26).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1), (2), (3), (4), (5) y (6) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 23328 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(26), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ (=36).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 36 sistemas de ecuaciones restantes, 35 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(26).

Si nos interesan las evoluciones de m_{NO}, m_{N2O2}, m_{H2}, m_{H2O}, m_{N2O} y m_{N2}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (4), (5) y (6); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_{NO} inicial, m_{N2O2} inicial, m_{H2} inicial, m_{H2O} inicial, m_{N2O} inicial, m_{N2} inicial, *K, V, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(26) como:

$$K_1 = \ldots \tag{22'}$$

$$K_2 = \ldots \tag{24'}$$

$$K_3 = \ldots \tag{25'}$$

$$K_4 = \ldots \tag{26'}$$

$$V = \ldots \tag{23'}$$

$$m_{NO,0} = \ldots \tag{7'}$$

$$m_{N2O2,0} = \ldots \tag{10'}$$

$$m_{H2,0} = \ldots \tag{14'}$$

$$m_{H2O,0} = \ldots \tag{17'}$$

$$m_{N2O,0} = \ldots \tag{20'}$$

$$m_{N2,0} = \ldots \tag{21'}$$

$$\mu_{N2O2} = \left(2.326 \cdot 2 + 2.657 \cdot 2\right) \cdot 10^{-26} \tag{11'}$$

$$\mu_{H2} = 0.1673 \cdot 2 \cdot 10^{-26} \tag{12'}$$

CC BY NC ND

$$\mu_{H2O} = \left(0.1673 \cdot 2 + 2.326\right) \cdot 10^{-26} \tag{18'}$$

$$\mu_{N2O} = \left(2.326 \cdot 2 + 2.657\right) \cdot 10^{-26} \tag{15'}$$

$$\mu_{N2} = 2.326 \cdot 2 \cdot 10^{-26} \tag{19'}$$

$$q_{1,k} = K_1 \cdot \left(\frac{m_{NO,k}}{V}\right)^2 \tag{8'}$$

$$q_{2,k} = K_2 \cdot \frac{m_{N2O2,k}}{V} \tag{9'}$$

$$q_{3,k} = K_3 \cdot \frac{m_{N2O2,k}}{V} \cdot \frac{m_{H2,k}}{V} \tag{13'}$$

$$q_{4,k} = K_4 \cdot \frac{m_{N2O,k}}{V} \cdot \frac{m_{H2,k}}{V} \tag{16'}$$

$$m_{NO,k+1} = m_{NO,k} + \left(-q_{1,k} + q_{2,k}\right) \cdot dt \tag{1'}$$

$$m_{N2O2,k+1} = m_{N2O2,k} + \left(q_{1,k} - q_{2,k} - \frac{\mu_{N2O2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot q_{3,k}\right) \cdot dt \tag{2'}$$

$$m_{H2,k+1} = m_{H2,k} + \left(-\frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot q_{3,k} - \frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot q_{4,k}\right) \cdot dt \tag{3'}$$

$$m_{H2O,k+1} = m_{H2O,k} + \left(\frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot q_{3,k} + \frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot q_{4,k}\right) \cdot dt \tag{4'}$$

$$m_{N2O,k+1} = m_{N2O,k} + \left(\frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot q_{3,k} - \frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot q_{4,k}\right) \cdot dt \tag{5'}$$

$$m_{N2,k+1} = m_{N2,k} + \left(\frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot q_{4,k}\right) \cdot dt \tag{6'}$$

CC BY NC ND

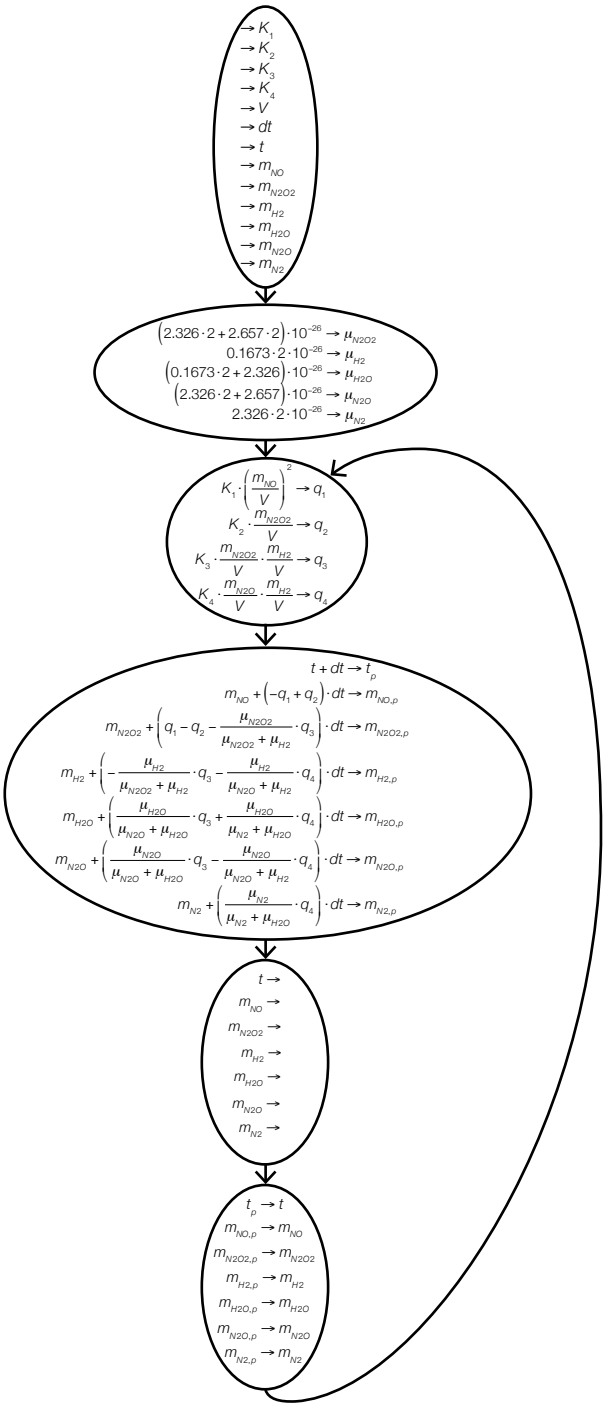


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 4.

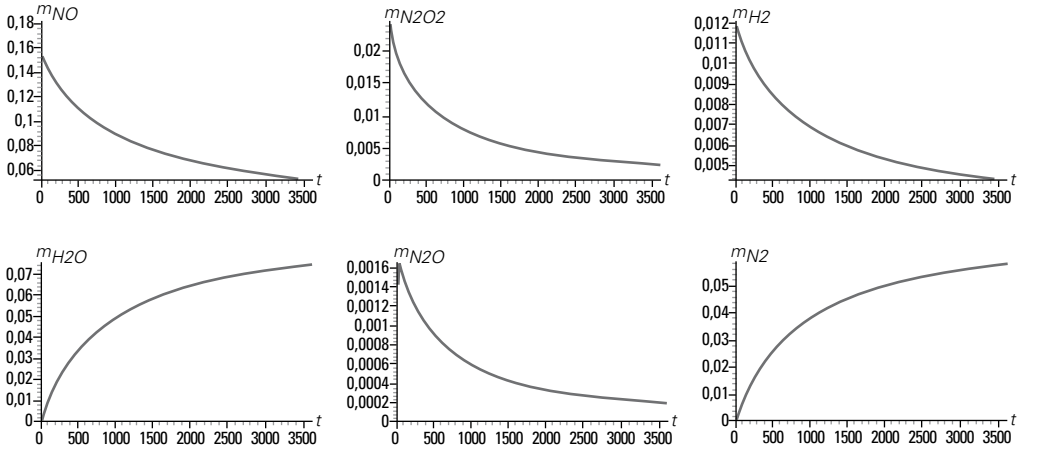


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (4), (5) y (6) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (8) y (9), derivando (2) e insertando (8), (9) y (13), derivando (3) e insertando (13) y (16), derivando (4) e insertando (13) y (16), derivando (5) e insertando (13) y (16), y derivando (6) e insertando (16):

$$\frac{dm_{NO}(t)}{dt} = -K_1 \cdot \left(\frac{m_{NO}(t)}{V} \right)^2 + K_2 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \tag{a1}$$

$$\frac{dm_{N2O2}(t)}{dt} = K_1 \cdot \left(\frac{m_{NO}(t)}{V} \right)^2 - K_2 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} - \frac{\mu_{N2O2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot K_3 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \tag{a2}$$

$$\frac{dm_{H2}(t)}{dt} = -\frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O2} + \mu_{H2}} \cdot K_3 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} - \frac{\mu_{H2}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot K_4 \cdot \frac{m_{N2O}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \tag{a3}$$

$$\frac{dm_{H2O}(t)}{dt} = \frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot K_3 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} + \frac{\mu_{H2O}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot K_4 \cdot \frac{m_{N2O}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \tag{a4}$$

$$\frac{dm_{N2O}(t)}{dt} = \frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2O}} \cdot K_3 \cdot \frac{m_{N2O2}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} - \frac{\mu_{N2O}}{\mu_{N2O} + \mu_{H2}} \cdot K_4 \cdot \frac{m_{N2O}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \tag{a5}$$

$$\frac{dm_{N2}(t)}{dt} = \frac{\mu_{N2}}{\mu_{N2} + \mu_{H2O}} \cdot K_4 \cdot \frac{m_{N2O}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2}(t)}{V} \tag{a6}$$

CC BY NC ND

20.0

UNA REACCIÓN CON UNA ENZIMA COMO CATALIZADOR (MASAS Y CAUDALES)

Las enzimas son proteínas de moléculas grandes, que actúan como catalizadores de reacciones con reactantes de moléculas pequeñas, por lo general muy precisas, a los que se suele llamar "sustratos". Las moléculas de algunos de los sustratos reactantes y las de algunos sitios de las enzimas catalizadoras se atraen y se juntan, originando moléculas compuestas de enzimas y sustratos. Allí, las moléculas de los sustratos calzan ajustadamente, experimentan atracciones y repulsiones mayores, y reaccionan convirtiéndose en moléculas de productos, que ya no calzan. Las moléculas de los productos y las de las enzimas se repelen y se separan. Así, las enzimas se recuperan y siguen actuando como catalizadores.

En 1902, Victor Henri (1872-1940), y, en 1913, Leonor Michaelis (1875-1949) y Maud Menten (1879-1960) desarrollaron ecuaciones para esas circunstancias. Posteriormente, otros autores, como John Burdon Sanderson Haldane (1892-1964) y George Edward Briggs (1893-1985), añadieron refinamientos.

Imaginemos un estanque lleno con agua (H_2O, como solvente), fumarasa (una enzima constituida por polipéptidos, extraída del corazón y el hígado de algunos animales) y ácido fumárico ($C_4H_4O_4$, un sustrato) que se convierte por hidratación en ácido málico ($C_4H_6O_5$, un producto usado en la fabricación de saborizantes), según:

$E+S \leftrightarrow ES$
$ES+ H_2O \rightarrow E+P$

donde E, S, ES y P representan abreviadamente a la enzima, al sustrato, al compuesto de enzima y sustrato, y al producto, respectivamente.

Interesa predecir las evoluciones de las masas de E, S, ES y P, suponiendo que la temperatura se mantiene cerca de 293, en [K], y que, en comparación con la del agua, dichas masas de E, S, ES y P son insignificantes.

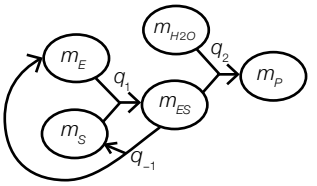


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_E(t)$ es la masa de E dentro del estanque, en [kg]; $m_S(t)$ es la masa de S, en [kg]; $m_{ES}(t)$ es la de ES, en [kg]; $m_P(t)$ es la de P, en [kg]:

$$m_E(t) = m_E(0) + \int_0^t \left(-\frac{\mu_E}{\mu_E + \mu_S} \cdot q_1(\tau) + \frac{\mu_E}{\mu_{ES}} \cdot q_{-1}(\tau) + \frac{\mu_E}{\mu_{ES} + \mu_{H2O}} \cdot q_2(\tau) \right) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$m_S(t) = m_S(0) + \int_0^t \left(-\frac{\mu_S}{\mu_E + \mu_S} \cdot q_1(\tau) + \frac{\mu_S}{\mu_{ES}} \cdot q_{-1}(\tau) \right) \cdot d\tau \qquad (2)$$

CC BY NC ND

$$m_{ES}(t) = m_{ES}(0) + \int_0^t \left(q_1(\tau) - q_{-1}(\tau) - q_2(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$m_P(t) = m_P(0) + \int_0^t \frac{\mu_P}{\mu_{ES} + \mu_{H2O}} \cdot q_2(\tau) \cdot d\tau \quad (4)$$

$m_E(0)$ es la masa de E inicialmente, en [kg]; μ_E es la masa molecular de E, en [kg]; μ_S es la masa molecular de S, en [kg]; $q_1(t)$ es el caudal de E y S a ES, en [kg s^{-1}]; μ_{ES} es la masa molecular de ES, en [kg]; $q_{-1}(t)$ es el caudal de ES a E y S, en [kg s^{-1}]; $q_2(t)$ es el caudal de ES a E y P, en [kg s^{-1}]; $m_S(0)$ es la masa de S inicialmente, en [kg]; $q_{Si}(t)$ es el caudal de S entrante, en [kg s^{-1}]; $q_{So}(t)$ es el caudal de S saliente, en [kg s^{-1}]; $m_{ES}(0)$ es la masa de ES inicialmente, en [kg]; $m_P(0)$ es la masa de P inicialmente, en [kg]; μ_P es la masa molecular de P, en [kg]; $q_{Po}(t)$ es el caudal de P saliente, en [kg s^{-1}]:

$$m_E(0) = 1.9 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$\mu_E = 32200 \cdot 10^{-26} \quad (6)$$

$$\mu_S = 19.3 \cdot 10^{-26} \quad (7)$$

$$q_1(t) = K_1 \cdot \frac{m_E(t)}{V} \cdot \frac{m_S(t)}{V} \quad (8)$$

$$\mu_{ES} = \mu_E + \mu_S \quad (9)$$

$$q_{-1}(t) = K_{-1} \cdot \frac{m_{ES}(t)}{V} \quad (10)$$

$$\mu_{H2O} = 2.99 \cdot 10^{-26} \quad (11)$$

$$q_2(t) = K_2 \cdot \frac{m_{ES}(t)}{V} \cdot \frac{m_{H2O}}{V} \quad (12)\ [11]$$

$$m_S(0) = 0.18 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

$$m_{ES}(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$m_P(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$\mu_P = 22.29 \cdot 10^{26} \quad (16)$$

K_1 es un coeficiente que resume a $A_1 \cdot e^{-B1/T}$ cuando la temperatura es la señalada, en [kg^{-1} m^6 s^{-1}]; V es el volumen del estanque, en [m^3]; K_{-1} es otro coeficiente de la misma especie que K_1, en [m^3 s^{-1}]; K_2 es otro, en [kg^{-1} m^6 s^{-1}]; m_{H2O} es la masa del agua, en [kg]:

$$K_1 = 8.6 \cdot 10^9 \quad (17)$$

$$V = m_{H2O} / 1000 \quad (18)$$

$$K_{-1} = 4.4 \cdot 10^4 \quad (19)$$

[11] Despreciando los cambios de la masa del agua.

BY NC ND

$$K_2 = 1.0 \tag{20}$$

$$m_{H2O} = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

El dibujo de la estructura causal es un poco aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: m_E depende de q_1, q_{-1} y q_2; m_S, de q_1 y q_{-1}; m_{ES}, de q_1, q_{-1} y q_2; m_P, de q_2; q_1, de m_E y m_S; q_{-1}, de m_{ES}; y q_2, de m_{ES}.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (5), (6), (7), (9), (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20) y (21) no contienen ninguna variable que evoluciona: (4), (10) y (12) contienen 2 cada una; (2) y (8), 3; (1) y (3), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 7 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^2$ (=1152) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(21).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1)-(4) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 1152 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(21), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 4^0$ (=12).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 12 sistemas de ecuaciones restantes, 11 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(21).

Si nos interesan las evoluciones de m_E, m_S, m_{ES} y m_P; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3) y (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_E inicial, m_S inicial, m_{ES} inicial, m_P inicial, K_1, K_{-1}, K_2, m_{H2O}, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(21) como:

$$K_1 = \ldots \tag{17'}$$

$$K_{-1} = \ldots \tag{19'}$$

$$K_2 = \ldots \tag{20'}$$

$$m_{H2O} = \ldots \tag{21'}$$

$$m_{E,0} = \ldots \tag{5'}$$

$$m_{S,0} = \ldots \tag{13'}$$

$$m_{ES,0} = \ldots \tag{14'}$$

$$m_{P,0} = \ldots \tag{15'}$$

$$\mu_E = 32200 \cdot 10^{-26} \tag{6'}$$

$$\mu_S = 19.3 \cdot 10^{-26} \tag{7'}$$

CC BY NC ND

$$\mu_{H2O} = 2.99 \cdot 10^{-26} \tag{11'}$$

$$\mu_P = 22.3 \cdot 10^{26} \tag{16'}$$

$$\mu_{ES} = \mu_E + \mu_S \tag{9'}$$

$$V = m_{H2O} / 1000 \tag{18'}$$

$$q_{1,k} = K_1 \cdot \frac{m_{E,k}}{V} \cdot \frac{m_{S,k}}{V} \tag{8'}$$

$$q_{-1,k} = K_{-1,k} \cdot \frac{m_{ES,k}}{V} \tag{10'}$$

$$q_{2,k} = K_2 \cdot \frac{m_{ES,k}}{V} \cdot \frac{m_{H2O}}{V} \tag{12'}$$

$$m_{E,k+1} = m_{E,k} + \left(-\frac{\mu_E}{\mu_E + \mu_S} \cdot q_{1,k} + \frac{\mu_E}{\mu_{ES}} \cdot q_{-1,k} + \frac{\mu_E}{\mu_{ES} + \mu_{H2O}} \cdot q_{2,k} \right) \cdot dt \tag{1'}$$

$$m_{S,k+1} = m_{S,k} + \left(-\frac{\mu_S}{\mu_E + \mu_S} \cdot q_{1,k} + \frac{\mu_S}{\mu_{ES}} \cdot q_{-1,k} \right) \cdot dt \tag{2'}$$

$$m_{ES,k+1} = m_{ES,k} + \left(q_{1,k} - q_{-1,k} - q_{2,k} \right) \cdot dt \tag{3'}$$

$$m_{P,k+1} = m_{P,k} + \frac{\mu_P}{\mu_{ES} + \mu_{H2O}} \cdot q_{2,k} \cdot dt \tag{4'}$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación también es un poco aburrido. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=1·10^{-6} o dt=1·10^{-8}, y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

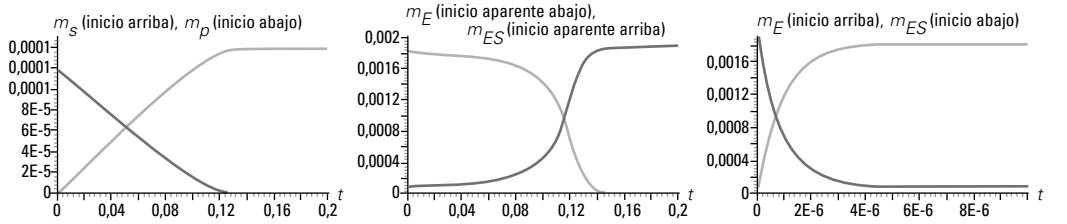


Fig. 2: Predicciones

El gráfico izquierdo y el central de la figura 2 fueron hechos para 0≤t<0.2 con dt=1·10^{-6}; pero el segundo de ellos muestra un inicio enigmático en que, aparentemente, $m_E(0)<m_{ES}(0)$, pese a que $m_{ES}(0)=0<0.18\cdot10^{-3}=m_E(0)$. Eso delata evoluciones demasiado rápidas, en un intervalo muy corto. El gráfico derecho fue hecho para 0≤t<10·10^{-6} con dt=1·10^{-8}; y resuelve el enigma; pero abre otro: en un estanque con volumen V=1, en [m^3], es poco verosímil que las moléculas viajen por el agua a velocidad suficiente para que resulten las evoluciones predichas. En (1)-(34) ignoramos las exigencias de velocidad de las moléculas, y aquí dejaremos este asunto pendiente (como otros varios en el libro).

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3) y (4), y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (8), (10) y (12), derivando (2) e insertando (8) y (10), derivando (3) e insertando (8), (10) y (16), y derivando (4) e insertando (12):

$$\frac{dm_E(t)}{dt} = -\frac{\mu_E}{\mu_E+\mu_S}\cdot K_1\cdot\frac{m_E(t)}{V}\cdot\frac{m_S(t)}{V}+\frac{\mu_E}{\mu_{ES}}\cdot K_{-1}\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V}+\frac{\mu_E}{\mu_{ES}+\mu_{H2O}}\cdot K_2\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V}\cdot\frac{m_{H2O}}{V} \quad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_S(t)}{dt} = -\frac{\mu_S}{\mu_E+\mu_S}\cdot K_1\cdot\frac{m_E(t)}{V}\cdot\frac{m_S(t)}{V}+\frac{\mu_S}{\mu_{ES}}\cdot K_{-1}\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V} \quad \text{(a2)}$$

$$\frac{dm_{ES}(t)}{dt} = K_1\cdot\frac{m_E(t)}{V}\cdot\frac{m_S(t)}{V}-K_{-1}\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V}-K_2\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V}\cdot\frac{m_{H2O}}{V} \quad \text{(a3)}$$

$$\frac{dm_P(t)}{dt} = \frac{\mu_P}{\mu_{ES}+\mu_{H2O}}\cdot K_2\cdot\frac{m_{ES}(t)}{V}\cdot\frac{m_{H2O}}{V} \quad \text{(a4)}$$

Apéndice acerca de otras ecuaciones diferenciales

Consideremos (a1)-(a4). Ya que los químicos suelen plantear otras ecuaciones, conviene tender aquí un desarrollo algebraico como relación entre ambos planteamientos.

Algebraicamente:

$$m_E(t) = N_E(t)\cdot\mu_E$$
$$N_E(t) = 6.023\cdot10^{23}\cdot n_E(t)$$
$$n_E(t) = [E](t)\cdot V$$

donde $N_E(t)$ es el número de moléculas de E dentro del estanque, en [molécula], $n_E(t)$ es el número de moléculas de E, en [mol de moléculas]; $[E](t)$ es la concentración molar de moléculas de E, en [(mol de moléculas) m^{-3}] [12] .

Maniobrando algebraicamente con esas tres ecuaciones y con otras de la misma especie para S, ES, P e incluso H_2O:

[12] Advertencias: la nomenclatura química para las concentraciones molares, a base de paréntesis cuadrados, es bastante anómala en términos matemáticos y físicos; en este apéndice, eso da a los paréntesis cuadrados dos significados diferentes según el contexto: a veces señalan concentraciones molares y otras veces, medidas; en la segunda instancia, la costumbre química es anotar "mol" en vez de "mol de moléculas", lo cual es tan ambiguo como decir "docena" sin especificar de qué: "mol" es cualquier conjunto de $6.023\cdot10^{23}$ elementos cualesquiera (habitualmente, parecidos entre sí), como docena es cualquier conjunto de 12; son otros secretos traviesos, que niegan la inteligencia a quienes no están en la complicidad y pueden confundir a quienes están desprevenidamente en ella.

BY NC ND

$$m_E(t) = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot [E](t) \cdot V \cdot \mu_E$$
$$m_S(t) = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot [S](t) \cdot V \cdot \mu_S$$
$$m_{ES}(t) = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot [ES](t) \cdot V \cdot \mu_{ES}$$
$$m_P(t) = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot [P] \cdot V \cdot \mu_P$$
$$m_{H2O} = 6.023 \cdot 10^{23} \cdot [H_2O] \cdot V \cdot \mu_{H2O}$$

y maniobrando algebraicamente un poco más, con estas últimas cinco ecuaciones, (a1)-(a4), (9) y la aproximación de Arrhenius tras K_1, K_{-1} y K_2:

$$\frac{d[E](t)}{dt} = -k_1 \cdot [E](t) \cdot [S](t) + k_{-1} \cdot [ES](t) + k_2 \cdot [ES](t) \cdot [H_2O] \quad \text{(a5)}$$

$$\frac{d[S](t)}{dt} = -k_1 \cdot [E](t) \cdot [S](t) + k_{-1} \cdot [ES](t) \quad \text{(a6)}$$

$$\frac{d[ES](t)}{dt} = k_1 \cdot [E](t) \cdot [S](t) - k_{-1} \cdot [ES](t) - k_2 \cdot [ES](t) \cdot [H_2O] \quad \text{(a7)}$$

$$\frac{d[P](t)}{dt} = k_2 \cdot [ES](t) \cdot [H_2O] \quad \text{(a8)}$$

donde:

$$k_1 = \frac{A_1 \cdot e^{-B_1/T}}{V} \cdot \frac{6.023 \cdot 10^{23} \cdot \mu_E \cdot \mu_S}{\mu_E + \mu_S}$$
$$k_{-1} = \frac{A_{-1} \cdot e^{-B_{-1}/T}}{V}$$
$$k_2 = \frac{A_2 \cdot e^{-B_2/T}}{V} \cdot \frac{6.023 \cdot 10^{23} \cdot \mu_{ES} \cdot \mu_{H2O}}{\mu_{ES} + \mu_{H2O}}$$

(a5)-(a8) son como las ecuaciones que suelen plantear los químicos, en vez de (a1)-(a4).

Apéndice acerca de las ecuaciones de Henri, Michaelis, Menten, Briggs y Haldane

Según (a5) y (a7):

$$\frac{d[E](t)}{dt} = -\frac{d[ES](t)}{dt}$$

luego:

$$[E](t) - [E](0) = -[ES](t) + [ES](0)$$

luego:

CC BY NC ND

$$[E](t) = -[ES](t) + [ES](0) + [E](0)$$

y luego, volviendo a (a7):

$$\frac{d[ES](t)}{dt} = k_1 \cdot \left([ES](0) + [E](0)\right) \cdot [S](t) - \left(k_1 \cdot [S](t) + k_{-1} + k_2 \cdot [H_2O]\right) \cdot [ES](t)$$

Si $[ES](0)=0$ pero $[ES](t)$ puede experimentar evoluciones mucho más rápidas que las de $[S](t)$ y $[P](t)$, cabe considerar tales evoluciones rápidas como conducentes a estados casi-estacionarios para $[ES](t)$.

Según la última ecuación, en esos estados, después de evoluciones rápidas:

$$0 \approx k_1 \cdot [E](0) \cdot [S](t) - \left(k_1 \cdot [S](t) + k_{-1} + k_2 \cdot [H_2O]\right) \cdot [ES](t)$$

luego:

$$[ES](t) \approx \frac{[E](0) \cdot [S](t)}{[S](t) + \left(k_{-1} + k_2 \cdot [H_2O]\right) / k_1}$$

y, considerando (a8):

$$\frac{d[P](t)}{dt} \approx \left.\frac{d[P]}{dt}\right|_{max} \cdot \frac{[S](t)}{[S](t) + [S]'}$$

donde:

$$\left.\frac{d[P]}{dt}\right|_{max} = k_2 \cdot [H_2O] \cdot [E](0)$$

$$[S]' = \left(k_{-1} + k_2 \cdot [H_2O]\right) / k_1$$

Estas tres ecuaciones resumen las de Briggs y Haldane; las de Henri y las de Michaelis y Menten despreciaban $k_2 \cdot [H_2O]$ en la última. En todo caso, $[S]'$ es la concentración molar de sustrato con que la tasa de crecimiento de la concentración molar de producto se reduce a la mitad de la máxima.

BY NC ND

21.0

UN BIODIGESTOR DE FUNCIONAMIENTO POR TANDAS (MASAS Y CAUDALES)

En 1776, Alessandro Volta (1745-1827) investigó la generación de gas inflamable (metano) en los barros de pantanos y lagos. En 1806, Humphry Davy (1778-1829) generó metano y anhídrido carbónico con desechos animales fermentados en ambientes húmedos. En 1866, Antoine Bechamp (1816-1908) demostró que la fermentación con que se genera el metano es un proceso biológico. En 1881, Jean Louis Mouras desarrolló un estanque séptico para limpiar por fermentación las aguas servidas, en Vesoul. En 1895, Donald Cameron construyó un estanque séptico en Exeter y usó el metano generado para iluminación. En 1901, Nicolaas Louis Söhngen (1878-1934) describió la actividad de los microorganismos que generan metano. En 1904, Karl Imhoff (1876-1965) patentó un estanque séptico y William Owen Travis construyó uno parecido en Hampton. En 1916, Omelianski aisló algunos microorganismos que generan metano y que, en verdad, constituyen una mezcla de especies. En 1941, G. Ducellier y M. Isman desarrollaron biodigestores para regiones rurales. En 1949, Jacques Lucien Monod (1910-1976) propuso una fórmula para predecir la evolución de los microorganismos que digieren sustratos en biodigestores de funcionamiento por tandas.

Imaginemos un biodigestor de funcionamiento por tandas, con un sustrato y microorganismos que reposan dentro bien mezclados. Los microorganismos digieren el sustrato y generan metano o más microorganismos como producto de la digestión, de manera que la parte del sustrato que es digerida y no se convierte en metano, se convierte en nacimientos.

Interesa predecir la evolución de la masa en el sustrato dentro del biodigestor, y la del caudal de metano que sale por arriba al ambiente, suponiendo que, en comparación con la masa en el agua, las masas en el sustrato, los microorganismos y el metano son insignificantes, y que así las condiciones de vida de los microorganismos varían poco (aparte de lo que concierne al sustrato del que se alimentan).

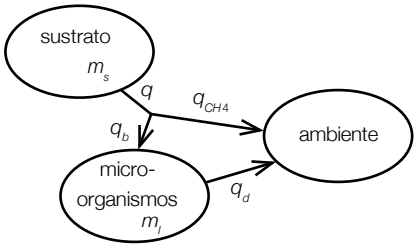


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_s(t)$ es la masa en el sustrato dentro del biodigestor, en [kg]; $q_{CH4}(t)$ es el caudal de metano del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$m_s(t) = m_s(0) - \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

CC BY NC ND

$$q_{CH4}\left(t\right) = \left(1 - F_b\right) \cdot q\left(t\right) \quad (2)$$

$m_s(0)$ es la masa en el sustrato inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal de sustrato que es digerido por los microorganismos dentro del biodigestor, en [kg s^{-1}]; F_b es la fracción del sustrato que es digerida por los microorganismos y da origen a nacimientos, en [kg kg^{-1}]:

$$m_s\left(0\right) = 4.0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (3)$$

$$q\left(t\right) = R\left(t\right) \cdot m_l\left(t\right) \quad (4)$$

$F_b = 4.4 \cdot 10^{-2}$ (por ejemplo, si se trata de microorganismos que digieren ácido acético mientras la temperatura se mantiene cercana a 308, en [K]) (5)

$R(t)$ es un coeficiente de digestión, en [kg (de sustrato) kg^{-1} (de microorganismos) s^{-1}] (=[s^{-1}]); $m_l(t)$ es la masa en los microorganismos vivos, en [kg]:

$$R\left(t\right) = R_{\max} \cdot \frac{m_s\left(t\right)}{m_s\left(t\right) + \gamma_{s^*} \cdot m} \quad (6)\ ^{13}$$

$$m_l\left(t\right) = m_l\left(0\right) + \int_0^t \left(q_b\left(\tau\right) - q_d\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \quad (7)$$

R_{max} es el coeficiente de digestión máximo, en [s^{-1}]; γ_{s^*} es la fracción de masa de sustrato en la mezcla con que el coeficiente de digestión se reduce a la mitad del máximo, en [kg (de sustrato) kg^{-1} (de mezcla)]; m es la masa en el agua con sustrato y microorganismos dentro del biodigestor, en [kg]; $m_l(0)$ es la masa en los microorganismos inicialmente, en [kg]; $q_b(t)$ es el caudal de nacidos, en [kgs^{-1}]; $q_d(t)$ es el caudal de muertos, en [kg s^{-1}]:

$$R_{\max} = 9.4 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo, ídem)} \quad (8)$$

$$\gamma_{s^*} = 1.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$$m = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$m_l\left(0\right) = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$

$$q_b\left(t\right) = F_b \cdot q\left(t\right) \quad (12)$$

$$q_d\left(t\right) = R_d \cdot m_l\left(t\right) \quad (13)$$

R_d es un coeficiente de mortalidad, en [kg (de microorganismos) kg^{-1} (de microorganismos) s^{-1}] (=[s^{-1}]):

$$R_d = 1.7 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

[13] Aproximación de Monod, que merece ser comparada con las de Henri, Michaelis, Menten, Briggs y Haldane para una reacción con una enzima como catalizador.

BY NC ND

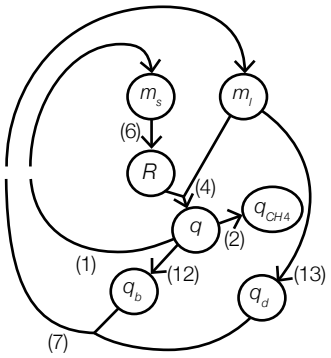


Fig. 2: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (8), (9), (10), (11) y (14) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (6), (12) y (13), contienen 2 cada una; (4) y (7), 3 cada una; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 7 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^5 \cdot 3^2$ (=288) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(14).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1) y (7) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 o 3 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 288 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(14), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^1$ (=48).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 48 sistemas de ecuaciones restantes, 47 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(14).

Si nos interesan las evoluciones de m_s y q_{CH4}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1) y (7); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, m_l inicial, F_b, R_{max}, γ_{s*}, m, R_d, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(14) como:

$$F_b = \ldots \quad (5')$$

$$R_{\max} = \ldots \quad (8')$$

$$\gamma_{s*} = \ldots \quad (9')$$

$$m = \ldots \quad (10')$$

$$R_d = \ldots \quad (14')$$

CC BY NC ND

$$m_{s,0} = \ldots \tag{3'}$$

$$m_{l,0} = \ldots \tag{11'}$$

$$R_k = R_{\max} \cdot \frac{m_{s,k}}{m_{s,k} + \gamma_{s^*} \cdot m} \tag{6'}$$

$$q_k = R_k \cdot m_{l,k} \tag{4'}$$

$$q_{CH4,k} = \left(1 - F_b\right) \cdot q_k \tag{2'}$$

$$q_{b,k} = F_b \cdot q_k \tag{12'}$$

$$q_{d,k} = R_d \cdot m_{l,k} \tag{13'}$$

$$m_{s,k+1} = m_{s,k} - q_k \cdot dt \tag{1'}$$

$$m_{l,k+1} = m_{l,k} + \left(q_{b,k} - q_{d,k}\right) \cdot dt \tag{7'}$$

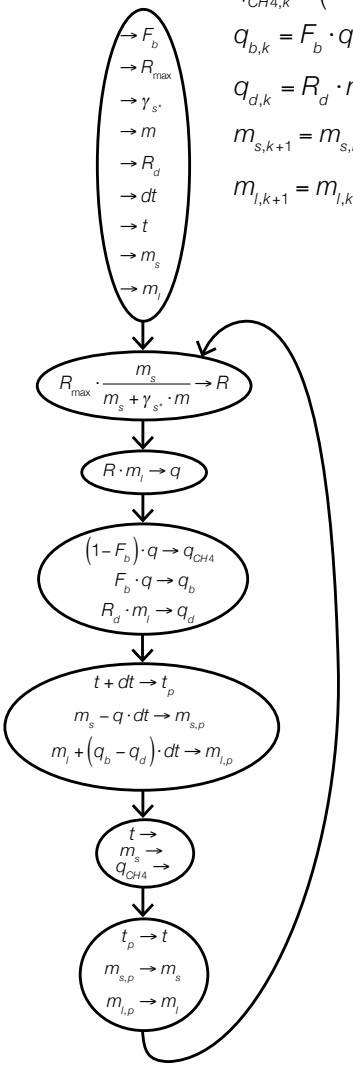


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=120 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 4.

CC BY NC ND

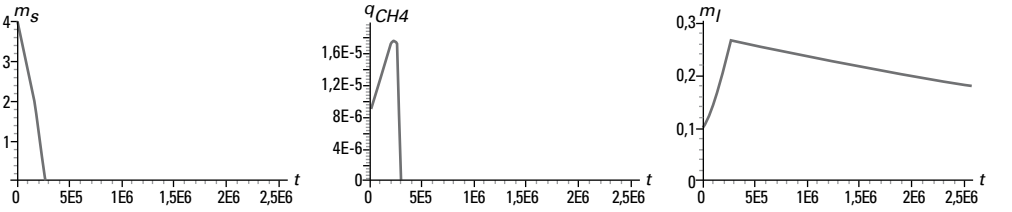


Fig. 4: Predicciones

(Al respecto: en las predicciones, la suma de las masas en el soluto, los microorganismos y el metano no supera el 0.5% de la masa en el agua).

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1) y (7) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas en el sustrato y los microorganismos con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (4) y (6), y derivando (7) e insertando (12), (13), (4) y (6):

$$\frac{dm_s(t)}{dt} = R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_l(t)}{dt} = F_b \cdot R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} - R_d \cdot m_l(t) \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesa la evolución del caudal de metano, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) en insertando (4) y (6):

$$q_{CH4}(t) = (1 - F_b) \cdot R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} \qquad \text{(a3)}$$

CC BY NC ND

22.0
UN BIODIGESTOR DE FUNCIONAMIENTO CONTINUO (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un biodigestor con un sustrato y microorganismos que entran por abajo, reposan dentro bien mezclados y salen por arriba (todo ello incluido en un caudal de agua que mantiene al biodigestor siempre lleno y en equilibrio hidráulico). Los microorganismos digieren el sustrato y generan metano como producto de la digestión.

Interesa predecir la evolución de la masa en el sustrato dentro del biodigestor, y la del caudal de metano que sale al ambiente por arriba, suponiendo que, en comparación con la masa en el agua, las masas en el sustrato, los microorganismos y el metano son insignificantes, y que así las condiciones de vida de los microorganismos varían poco (aparte de lo que concierne al sustrato del que se alimentan).

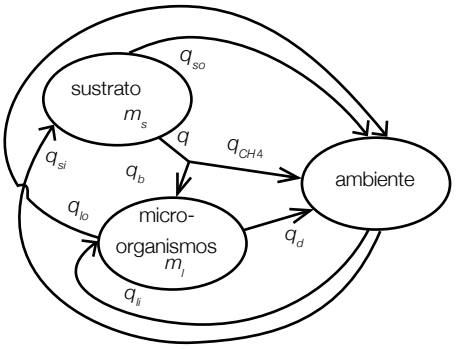


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

t es el tiempo, en [s].

$m_s(t)$ es la masa en el sustrato dentro del biodigestor, en [kg]; $q_{CH4}(t)$ es el caudal de metano del biodigestor al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$m_s(t) = m_s(0) + \int_0^t \left(q_{si}(\tau) - q(\tau) - q_{so}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$q_{CH4}(t) = (1 - F_b) \cdot q(t) \qquad (2)$$

$m_s(0)$ es la masa en el sustrato inicialmente, en [kg]; $q_{si}(t)$ es el caudal de sustrato del ambiente al biodigestor, por abajo, en [kg s^{-1}]; $q(t)$ es el caudal de sustrato digerido por los microorganismos dentro del biodigestor, en [kg s^{-1}]; $q_{so}(t)$ es el caudal de sustrato del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]; F_b es la fracción del sustrato que es digerida por los microorganismos y da origen a nacimientos, en [kg kg^{-1}]:

$$m_s(0) = 4.0 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$$q_{si}(t) = 1.2 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

CC BY NC ND

$$q(t) = R(t) \cdot m_l(t) \tag{5}$$

$$q_{so}(t) = \frac{m_s(t)}{m} \cdot Q \tag{6}$$

$$F_b = 4.4 \cdot 10^{-2} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$R(t)$ es el coeficiente de digestión, en [s^{-1}]; $m_l(t)$ es la masa en los microorganismos vivos, en [kg]; m es la masa en el agua dentro del biodigestor, en [kg]; Q es el caudal de agua por el biodigestor, en [kg s^{-1}]:

$$R(t) = R_{\max} \cdot \frac{m_s(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} \tag{8}$$

$$m_l(t) = m_l(0) + \int_0^t \left(q_{li}(\tau) + q_b(\tau) - q_d(\tau) - q_{lo}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{9}$$

$$m = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$Q = 3.0 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

R_{max} es el coeficiente de digestión máximo, en [s^{-1}]; γ_{s^*} es la fracción de masa de sustrato en el agua con que el coeficiente de digestión se reduce a la mitad del máximo, en [kg (de sustrato) kg^{-1} (de mezcla)]; $m_l(0)$ es la masa en los microorganismos inicialmente, en [kg]; $q_{li}(t)$ es el caudal de microorganismos del ambiente al biodigestor, por abajo, en [kg s^{-1}]; $q_b(t)$ es el caudal de nacidos, en [kg s^{-1}]; $q_d(t)$ es el caudal de muertos, en [kg s^{-1}]; $q_{lo}(t)$ es el caudal de microorganismos del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$R_{\max} = 9.4 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$\gamma_{s^*} = 1.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$m_l(0) = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$q_{li}(t) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$q_b(t) = F_b \cdot q(t) \tag{16}$$

$$q_d(t) = R_d \cdot m_l(t) \tag{17}$$

$$q_{lo}(t) = \frac{m_l(t)}{m} \cdot Q \tag{18}$$

R_d es el coeficiente de mortalidad, en [s^{-1}]:

$$R_d = 1.7 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

CC BY NC ND

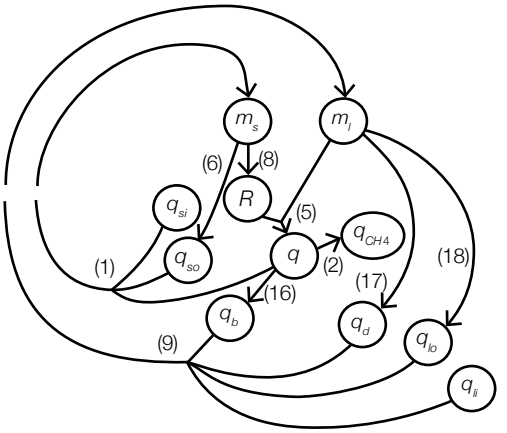


Fig. 2: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (7), (10), (11), (12), (13), (14) y (19) no contienen ninguna variable que evoluciona: (4) y (5), contienen 1 cada una; (2), (6), (8), (16), (17) y (18), 2 cada una; (5), 3; (1), 4; (9), 5; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 11 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^6 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^1$ (=15360) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(14).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1) y (9) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 4 o 5 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 15360 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(19), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^6 \cdot 3^1$ (=192).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 192 sistemas de ecuaciones restantes, 191 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(19).

Si nos interesan las evoluciones de m_s y q_{CH4}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, m_l inicial, q_{si}, q_{li}, F_b, m, Q, R_{max}, γ_{s*}, R_d, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(19) como:

$$F_b = \ldots \qquad (7')$$

$$m = \ldots \qquad (10')$$

$$Q = \ldots \qquad (11')$$

CC BY NC ND

$$R_{max} = \ldots \quad (12')$$

$$\gamma_{s^*} = \ldots \quad (13')$$

$$R_d = \ldots \quad (20')$$

$$m_{s,0} = \ldots \quad (3')$$

$$m_{l,0} = \ldots \quad (14')$$

$$q_{si,k} = \ldots \quad (4')$$

$$q_{li,k} = \ldots \quad (15')$$

$$R_k = R_{max} \cdot \frac{m_{s,k}}{m_{s,k} + \gamma_{s^*} \cdot m} \quad (8')$$

$$q_k = R_k \cdot m_{l,k} \quad (5')$$

$$q_{CH4,k} = \left(1 - F_b\right) \cdot q_k \quad (2')$$

$$q_{so,k} = \frac{m_{s,k}}{m} \cdot Q \quad (6')$$

$$q_{lo,k} = \frac{m_{l,k}}{m} \cdot Q \quad (18')$$

$$q_{b,k} = F_{b,k} \cdot q_k \quad (16')$$

$$q_{d,k} = R_d \cdot m_{l,k} \quad (17')$$

$$m_{s,k+1} = m_{s,k} + \left(q_{si,k} - q_k - q_{so,k}\right) \cdot dt \quad (1')$$

$$m_{l,k+1} = m_{l,k} + \left(q_{li,k} + q_{b,k} - q_{d,k} - q_{lo,k}\right) \cdot dt \quad (9')$$

CC BY NC ND

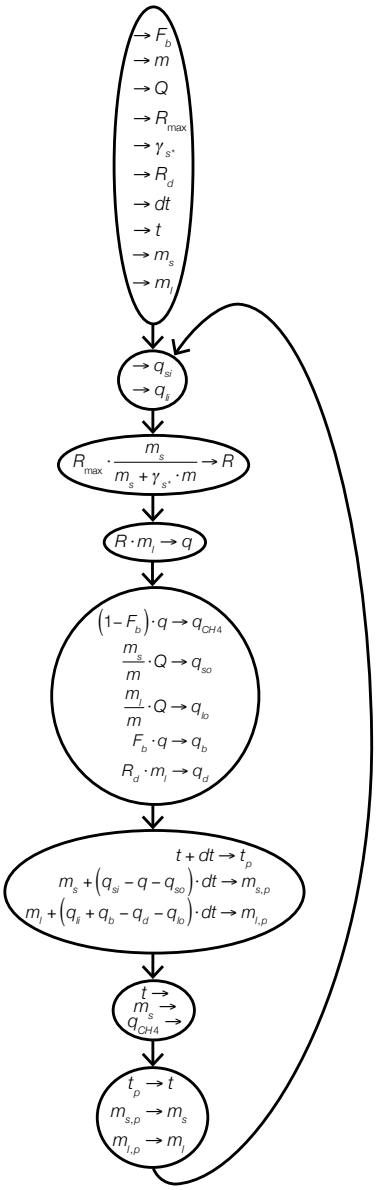


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=120 y algunos detalles adicionales, para graficar) graficó la figura 4.

BY NC ND

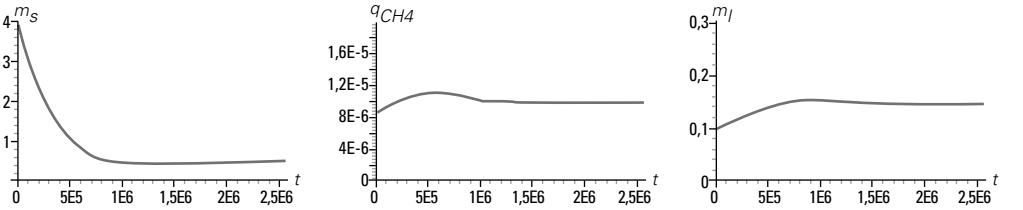


Fig. 4: Predicciones

(Al respecto: en las predicciones, la suma de las masas de soluto, microorganismos y metano no supera el 0.5% de la masa de agua).

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1) y (9) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas en el sustrato y los microorganismos con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (5), (6) y (8), y derivando (9) e insertando (5), (6) y (8):

$$\frac{dm_s(t)}{dt} = q_{si}(t) - R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} - \frac{Q}{m} \cdot m_s(t) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_l(t)}{dt} = q_{li}(t) + F_b \cdot R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} - \left(R_d + \frac{Q}{m}\right) \cdot m_l(t) \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesa la evolución del caudal de metano, aceptando (a1) y (a2), considerando (2) e insertando (5) y (8):

$$q_{CH4}(t) = (1 - F_b) \cdot R_{\max} \cdot \frac{m_s(t) \cdot m_l(t)}{m_s(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} \qquad \text{(a3)}$$

CC BY NC ND

23.0
UN BIODIGESTOR DE FUNCIONAMIENTO CONTINUO CON SUSTRATOS DE TRES ESPECIES Y MICROORGANISMOS DE DOS ESPECIES (MASAS Y CAUDALES)

Imaginemos un biodigestor de funcionamiento continuo, con un sustrato primitivo y microorganismos que entran por abajo, reposan dentro bien mezclados y salen por arriba (todo ello incluido en un caudal de agua que mantiene al biodigestor siempre lleno y en equilibrio hidráulico). El sustrato primitivo experimenta hidrólisis dentro del biodigestor y se convierte en un sustrato hidrolizado. Entre los microorganismos hay algunos, de una especie, que digieren el sustrato hidrolizado y generan un sustrato ácido como producto de la digestión. Entre los microorganismos también hay otros, de otra especie, que digieren el sustrato ácido y generan metano como producto de la digestión [14].

Interesa predecir las evoluciones de las masas en los tres sustratos y la del caudal de metano que sale al ambiente, suponiendo que, en comparación con la masa en el agua, las masas en los sustratos, los microorganismos y el metano son insignificantes, y que así las condiciones de vida de los microorganismos varían poco (aparte de lo que concierne a los sustratos de los que se alimentan).

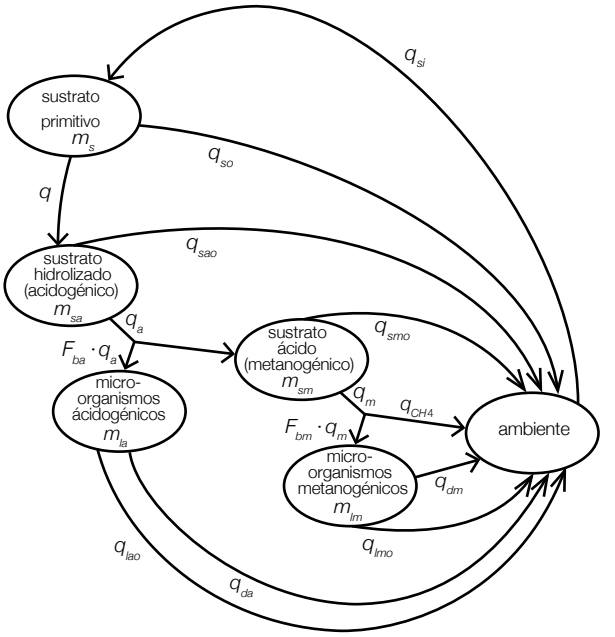


Fig. 1: Estructura taxonómico-espacial

[14] En verdad, la biodigestión es bastante más compleja y, si se trata de biodigestión anaerobia, en la imaginada falta, por lo menos, un sustrato y microorganismos acetogénicos entre los acidogénicos y los metanogénicos.

CC BY NC ND

t es el tiempo, en [s].

$m_s(t)$ es la masa en el sustrato primitivo (que experimenta hidrólisis) dentro del biodigestor, en [kg]; $m_{sa}(t)$ es la masa en el sustrato hidrolizado (que es acidogénico), en [kg]; $m_{sm}(t)$ es la masa en el sustrato ácido (que es metanogénico), en [kg]; $q_{CH4}(t)$ es el caudal de metano del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$m_s(t) = m_s(0) + \int_0^t \left(q_{si}(\tau) - q(\tau) - q_{so}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$m_{sa}(t) = m_{sa}(0) + \int_0^t \left(q(\tau) - q_a(\tau) - q_{sao}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_{sm}(t) = m_{sm}(0) + \int_0^t \left(\left(1 - F_{ba}\right) \cdot q_a(\tau) - q_m(\tau) - q_{smo}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$q_{CH4}(t) = \left(1 - F_{bm}\right) \cdot q_m(t) \quad (4)$$

$m_s(0)$ es la masa en el sustrato primitivo inicialmente, en [kg]; $q_{si}(t)$ es el caudal de sustrato primitivo del ambiente al biodigestor, por abajo, en [kg s^{-1}]; $q(t)$ es el caudal de sustrato primitivo que experimenta hidrólisis, en [kg s^{-1}]; $q_{so}(t)$ es el caudal de sustrato primitivo del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]; $m_{sa}(0)$ es la masa en el sustrato acidogénico inicialmente, en [kg]; $q_a(t)$ es el caudal de sustrato acidogénico que es digerido por los microorganismos acidogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{sao}(t)$ es el caudal de sustrato acidogénico del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]; $m_{sm}(0)$ es la masa en el sustrato metanogénico inicialmente, en [kg]; F_{ba} es la fracción del sustrato acidogénico que es digerida por los microorganismos acidogénicos y da origen a nacimientos, en [kg kg^{-1}]; $q_m(t)$ es el caudal de sustrato metanogénico que es digerido por los microorganismos metanogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{smo}(t)$ es el caudal de sustrato metanogénico del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]; F_{bm} es la fracción de masa de sustrato metanogénico en la mezcla que es digerida por los microorganismos metanogénicos y da origen a nacimientos, en [kg kg^{-1}]:

$$m_s(0) = 4.0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$q_{si}(t) = 1.2 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$q(t) = R_h \cdot m_s(t) \quad (7)$$

$$q_{so}(t) = \frac{m_s(t)}{m} \cdot Q \quad (8)$$

$$m_{sa}(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$$q_a(t) = R_{a\max} \cdot \frac{m_{sa}(t) \cdot m_{la}(t)}{m_{sa}(t) + \gamma_{sa^*} \cdot m} \quad (10)$$

$$q_{sao}(t) = \frac{m_{sa}(t)}{m} \cdot Q \quad (11)$$

$$m_{sm}(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

CC BY NC ND

$$F_{ba} = 5.0 \cdot 10^{-2} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$q_m\left(t\right) = R_{m\max} \cdot \frac{m_{sm}\left(t\right) \cdot m_{lm}\left(t\right)}{m_{sm}\left(t\right) + \gamma_{sm^*} \cdot m} \tag{14}$$

$$q_{smo}\left(t\right) = \frac{m_{sm}\left(t\right)}{m} \cdot Q \tag{15}$$

$$F_{bm} = 4.4 \cdot 10^{-2} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

R_h es un coeficiente de hidrólisis, en [s^{-1}]; m es la masa en el agua dentro del biodigestor, en [kg]; Q es el caudal de agua por el biodigestor, en [kg s^{-1}]; R_{amax} es el coeficiente de digestión acidogénica máximo, en [s^{-1}]; $m_{la}(t)$ es la masa en los microorganismos acidogénicos vivos dentro del biodigestor, en [kg]; γ_{sa^*} es la fracción de masa de sustrato acidogénico en la mezcla con que su coeficiente de digestión se reduce a la mitad del máximo, en [kg kg^{-1}]; R_{mmax} es el coeficiente de digestión metanogénica máximo, en [s^{-1}]; $m_{lm}(t)$ es la masa en los microorganismos metanogénicos vivos dentro del biodigestor, en [kg]; γ_{sm^*} es la fracción de masa de sustrato metanogénico en la mezcla con que su coeficiente de digestión se reduce a la mitad del máximo, en [kg kg^{-1}]:

$$R_h = 8 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$m = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$Q = 3.0 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$R_{a\max} = 11 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$m_{la}\left(t\right) = m_{la}\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{ba}\left(\tau\right) - q_{da}\left(\tau\right) - q_{lao}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{21}$$

$$\gamma_{sa^*} = 2.7 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$R_{m\max} = 9.4 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$m_{lm}\left(t\right) = m_{lm}\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{bm}\left(\tau\right) - q_{dm}\left(\tau\right) - q_{lmo}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{24}$$

$$\gamma_{sm^*} = 1.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$m_{la}(0)$ es la masa en los microorganismos acidogénicos inicialmente, en [kg]; $q_{ba}(t)$ es el caudal de nacidos acidogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{da}(t)$ es el caudal de muertos acidogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{lao}(t)$ es el caudal de microorganismos acidogénicos del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]; $m_{lm}(0)$ es la masa en los microorganismos metanogénicos inicialmente, en [kg]; $q_{bm}(t)$ es el caudal de nacidos metanogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{dm}(t)$ es el caudal de muertos metanogénicos, en [kg s^{-1}]; $q_{lmo}(t)$ es el caudal de microorganismos metanogénicos del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$m_{la}\left(0\right) = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$q_{ba}\left(t\right) = F_{ba} \cdot q_a\left(t\right) \tag{27}$$

CC BY NC ND

$$q_{da}\left(t\right) = R_{da} \cdot m_{la}\left(t\right) \tag{28}$$

$$q_{lao}\left(t\right) = \frac{m_{la}\left(t\right)}{m} \cdot Q \tag{29}$$

$$m_{lm}\left(0\right) = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$q_{bm}\left(t\right) = F_{bm} \cdot q_{m}\left(t\right) \tag{31}$$

$$q_{dm}\left(t\right) = R_{dm} \cdot m_{lm}\left(t\right) \tag{32}$$

$$q_{lmo}\left(t\right) = \frac{m_{lm}\left(t\right)}{m} \cdot Q \tag{33}$$

R_{da} es el coeficiente de mortalidad de los microorganismos acidogénicos, en [s^{-1}]; R_{dm} es el de los microorganismos metanogénicos, en [s^{-1}]:

$$R_{da} = 5.9 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

$$R_{dm} = 1.7 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: m_s depende de q_{si}, q y q_{so}; m_{sa}, de q, q_a y q_{sao}; m_{sm}, de q_a, q_m y q_{smo}; q_{CH4}, de q_m; q, de m_s; q_{so}, de m_s; q_a, de m_{sa} y m_{la}; q_{sao}, de m_{sa}; q_m, de m_{sm} y m_{lm}; q_{smo}, de m_{sm}; m_{la}, de q_{ba}, q_{da} y q_{lao}; m_{lm}, de q_{bm}, q_{dm} y q_{lmo}; q_{ba}, de q_a; q_{da}, de m_{la}; q_{lao}, de m_{la}; q_{bm}, de q_m; q_{dm}, de m_{lm}; y q_{lmo}, de m_{lm}.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (5), (9), (12), (13), (16), (17), (18), (19), (20), (22), (23), (25), (26), (30), (34) y (35) no contienen ninguna variable que evoluciona: (6) contiene 1; (4), (7), (8), (11), (15), (27), (28), (29), (31), (32) y (33) contienen 2 cada una; (10) y (14), 3; (1), (2), (3), (21) y (24), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 19 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 4^5$ (=18874368) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(35).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1), (2), (3), (21) y (24) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 18874368 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(35), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^{11} \cdot 3^2$ (=18432).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 18432 sistemas de ecuaciones restantes, 18431 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(35).

Si nos interesan las evoluciones de m_s, m_{sa}, m_{sm} y q_{CH4}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para

CC BY NC ND

las integraciones en (1),(2), (3), (21) y (24); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, m_{sa} inicial, m_{sm} inicial, m_{la} inicial, m_{lm} inicial, q_{si}, F_{ba}, F_{bm}, R_h, m, Q, R_{amax}, γ_{sa*}, R_{mmax}, γ_{sm*}, R_{da}, R_{dm}, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(35) como:

$$F_{ba} = \ldots \tag{13'}$$

$$F_{bm} = \ldots \tag{16'}$$

$$R_h = \ldots \tag{17'}$$

$$m = \ldots \tag{18'}$$

$$Q = \ldots \tag{19'}$$

$$R_{amax} = \ldots \tag{20'}$$

$$\gamma_{sa^*} = \ldots \tag{22'}$$

$$R_{mmax} = \ldots \tag{23'}$$

$$\gamma_{sm^*} = \ldots \tag{25'}$$

$$R_{da} = \ldots \tag{34'}$$

$$R_{dm} = \ldots \tag{35'}$$

$$m_{s,0} = \ldots \tag{5'}$$

$$m_{sa,0} = \ldots \tag{9'}$$

$$m_{sm,0} = \ldots \tag{12'}$$

$$m_{la,0} = \ldots \tag{26'}$$

$$m_{lm,0} = \ldots \tag{30'}$$

$$q_{si,k} = \ldots \tag{6'}$$

$$q_{CH4,k} = \left(1 - F_{bm}\right) \cdot q_{m,k} \tag{4'}$$

$$q_k = R_h \cdot m_{s,k} \tag{7'}$$

$$q_{a,k} = R_{amax} \cdot \frac{m_{sa,k} \cdot m_{la,k}}{m_{sa,k} + \gamma_{sa^*} \cdot m} \tag{10'}$$

$$q_{m,k} = R_{mmax} \cdot \frac{m_{sm,k} \cdot m_{lm,k}}{m_{sm,k} + \gamma_{sm^*} \cdot m} \tag{14'}$$

$$q_{so,k} = \frac{m_{s,k}}{m} \cdot Q \tag{8'}$$

$$q_{sao,k} = \frac{m_{sa,k}}{m} \cdot Q \tag{11'}$$

$$q_{smo,k} = \frac{m_{sm,k}}{m} \cdot Q \tag{15'}$$

$$q_{ba,k} = F_{ba} \cdot q_{a,k} \tag{27'}$$

$$q_{bm,k} = F_{bm} \cdot q_{m,k} \tag{31'}$$

CC BY NC ND

$$q_{da,k} = R_{da} \cdot m_{la,k} \quad (28')$$

$$q_{dm,k} = R_{dm} \cdot m_{lm,k} \quad (32')$$

$$q_{lao,k} = \frac{m_{la,k}}{m} \cdot Q \quad (29')$$

$$q_{lmo,k} = \frac{m_{lm,k}}{m} \cdot Q \quad (33')$$

$$m_{s,k+1} = m_{s,k} + \left(q_{si,k} - q_k - q_{so,k}\right) \cdot dt \quad (1')$$

$$m_{sa,k+1} = m_{sa,k} + \left(q_k - q_{a,k} - q_{sao,k}\right) \cdot dt \quad (2')$$

$$m_{sm,k+1} = m_{sm,k} + \left(\left(1 - F_{ba}\right) \cdot q_{a,k} - q_{m,k} - q_{smo,k}\right) \cdot dt \quad (3')$$

$$m_{la,k+1} = m_{la,k} + \left(q_{ba,k} - q_{da,k} - q_{lao,k}\right) \cdot dt \quad (21')$$

$$m_{lm,k+1} = m_{lm,k} + \left(q_{bm,k} - q_{dm,k} - q_{lmo,k}\right) \cdot dt \quad (24')$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante largo. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=120 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

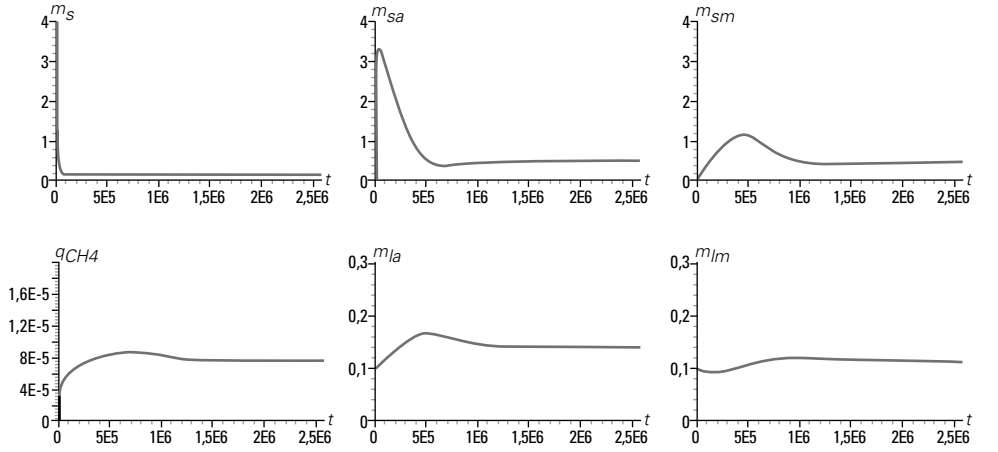


Fig. 2: Predicciones

(Al respecto: en las predicciones, la suma de las masas en el soluto, los microorganismos y el metano no supera el 0.5% de la masa en el agua).

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (21) y (24),y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas en el sustrato y los micro-

BY NC ND

organismos con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (7) y (8), derivando (2) e insertando (7), (10) y (11), derivando (3) e insertando (10), (14) y (15), derivando (21) e insertando (27), (28), (29) y (10), y derivando (24) e insertando (31), (32), (33) y (14):

$$\frac{dm_s(t)}{dt} = q_{si} - \left(R_h + \frac{Q}{m}\right) \cdot m_s(t) \tag{a1}$$

$$\frac{dm_{sa}(t)}{dt} = R_h \cdot m_s(t) - \frac{Q}{m} \cdot m_{sa}(t) - R_{a\max} \cdot \frac{m_{sa}(t) \cdot m_{la}(t)}{m_{sa}(t) + \gamma_{sa^*} \cdot m} \tag{a2}$$

$$\frac{dm_{sm}(t)}{dt} = -\frac{Q}{m} \cdot m_{sm}(t) + \left(1 - F_{ba}\right) \cdot R_{a\max} \cdot \frac{m_{sa}(t) \cdot m_{la}(t)}{m_{sa}(t) + \gamma_{sa^*} \cdot m} - R_{m\max} \cdot \frac{m_{sm}(t) \cdot m_{lm}(t)}{m_{sm}(t) + \gamma_{sm^*} \cdot m} \tag{a3}$$

$$\frac{dm_{la}(t)}{dt} = -\left(R_{da} + \frac{Q}{m}\right) \cdot m_{la}(t) + F_{ba} \cdot R_{a\max} \cdot \frac{m_{sa}(t) \cdot m_{la}(t)}{m_{sa}(t) + \gamma_{sa^*} \cdot m} \tag{a4}$$

$$\frac{dm_{lm}(t)}{dt} = -\left(R_{dm} + \frac{Q}{m}\right) \cdot m_{lm}(t) + F_{bm} \cdot R_{m\max} \cdot \frac{m_{sm}(t) \cdot m_{lm}(t)}{m_{sm}(t) + \gamma_{sm^*} \cdot m} \tag{a5}$$

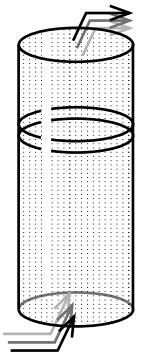
Si nos interesa la evolución del caudal de metano, aceptando (a1)-(a5), considerando (4) e insertando (14):

$$q_{CH4}(t) = \left(1 - F_{bm}\right) \cdot R_{m\max} \cdot \frac{m_{sm}(t) \cdot m_{lm}(t)}{m_{sm}(t) + \gamma_{sm^*} \cdot m} \tag{a6}$$

BY NC ND

24.0

SUSTRATO Y MICROORGANISMOS A LO LARGO DE UN BIODIGESTOR CILÍNDRICO DE FUNCIONAMIENTO CONTINUO (MASAS Y CAUDALES)



Imaginemos un biodigestor cilíndrico de funcionamiento continuo, con eje de simetría vertical y con un sustrato y microorganismos que entran por abajo, reposan dentro y salen por arriba (todo ello incluido en un caudal de agua que mantiene al biodigestor siempre lleno y en equilibrio hidráulico). El sustrato y los microorganismos son pocos. Los que salen son reingresados parcialmente a través de un separador. Los microorganismos digieren el sustrato y generan metano como producto de la digestión.

Fig. 1: Biodigestor cilíndrico de funcionamiento continuo

Interesa predecir la evolución de la masa en el sustrato a lo largo del biodigestor (inventando en éste rodajas ficticias, transversales, delgadas y presuntamente homogéneas por dentro, y numerándolas de abajo a arriba) y la del caudal de metano que sale al ambiente (por arriba), suponiendo que, en comparación con la masa en el agua, las masas en el sustrato, los microorganismos y el metano son insignificantes, y que así las condiciones de vida de los microorganismos varían poco (aparte de lo que concierne al sustrato del que se alimentan).

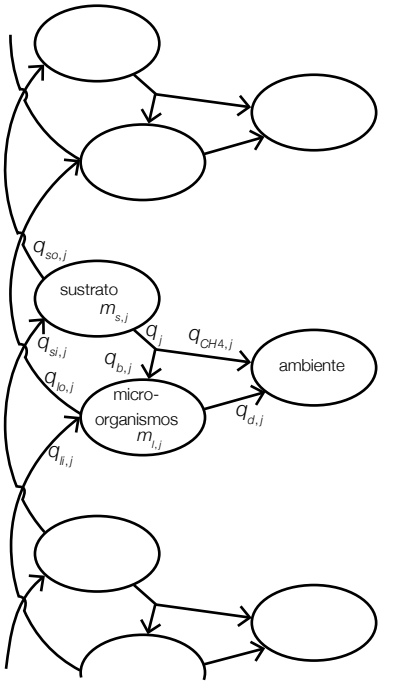


Fig. 2: Estructura taxonómico-espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

BY NC ND

t es el tiempo, en [s].

$m_{s,j}(t)$ es la masa en el sustrato dentro de la rodaja j, en [kg]; $q_{CH4}(t)$ es el caudal de metano del biodigestor al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$m_{s,j}(t) = m_{s,j}(0) + \int_0^t \left(q_{si,j}(\tau) + q_{sr,j}(\tau) - q_j(\tau) - q_{so,j}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{1}$$

$$q_{CH4}(t) = \sum_{j=1}^{J} q_{CH4,j}(t) \tag{2}$$

$m_{s,j}(0)$ es la masa en el sustrato en la rodaja j inicialmente, en [kg]; $q_{si,j}(t)$ es el caudal de sustrato del ambiente o de la rodaja j-1 a la j, en [kg s^{-1}]; $q_{sr,j}(t)$ es el caudal de sustrato de la rodaja J a la j, reingresando, en [kg s^{-1}]; $q_j(t)$ es el caudal de sustrato que es digerido por los microorganismos en la rodaja j, en [kg s^{-1}]; $q_{so,j}(t)$ es el caudal de sustrato de la rodaja j a la j+1 o al ambiente, en [kg s^{-1}]; J es la cantidad de rodajas; $q_{CH4,j}(t)$ es el caudal de metano de la rodaja j al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$m_{s,j}(0) = 0.80 \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$q_{si,j}(t) = \begin{cases} 1.2 \cdot 10^{-5} & \text{si} \quad j = 1 \\ \dfrac{m_{s,j-1}(t)}{m} \cdot Q & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$q_{sr,j}(t) = \begin{cases} r_s \cdot \dfrac{m_{s,J}(t)}{m} \cdot Q & \text{si} \quad j = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \tag{5}$$

$$q_j(t) = R_j(t) \cdot m_{l,j}(t) \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{6}$$

$$q_{so,j}(t) = \frac{m_{s,j}(t)}{m} \cdot Q \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{7}$$

$$J = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$q_{CH4,j}(t) = (1 - F_b) \cdot q_j(t) \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{9}$$

m es la masa en el agua dentro de cualquier rodaja, en [kg]; Q es el caudal de agua que viaja por cualquier rodaja, en [kg s^{-1}]; r_s es la fracción del sustrato que viaja de la rodaja J a la 1, reingresando, en [kg kg^{-1}]; $R_j(t)$ es el coeficiente de digestión en la rodaja j, en [s^{-1}]; $m_{l,j}(t)$ es la masa en los microorganismos vivos dentro de la rodaja j, en [kg]; F_b es la fracción del sustrato que es digerida por los microorganismos y da origen a nacimientos en cualquier rodaja, en [kg kg^{-1}]:

$$m = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$Q = 3.0 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$r_s = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$R_j(t) = R_{max} \cdot \frac{m_{s,j}(t)}{m_{s,j}(t) + \gamma_{s^*} \cdot m} \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{13}$$

CC BY NC ND

$$m_{l,j}(t) = m_{l,j}(0) + \int_0^t \left(q_{li,j}(\tau) + q_{lr,j}(\tau) + q_{b,j}(\tau) - q_{d,j}(\tau) - q_{lo,j}(\tau) \right) \cdot d\tau \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (14)$$

$$F_b = 4.4 \cdot 10^{-2} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (15)$$

R_{max} es el coeficiente de digestión máximo dentro de cualquier rodaja, en [s^{-1}]; γ_{s^*} es la fracción de masa de sustrato en la mezcla con que el coeficiente de digestión se reduce a la mitad del máximo dentro de cualquier rodaja, en [kg kg^{-1}]; $m_{l,j}(0)$ es la masa en los microorganismos dentro de la rodaja j inicialmente, en [kg]; $q_{li,j}(t)$ es el caudal de microorganismos del ambiente o de la rodaja j-1 a la j, en [kg s^{-1}]; $q_{lr,j}(t)$ es el caudal de microorganismos de la rodaja J a la j, reingresando, en [kg s^{-1}]; $q_{b,j}(t)$ es el caudal de nacidos dentro de la rodaja j, en [kg s^{-1}]; $q_{d,j}(t)$ es el caudal de muertos dentro de la rodaja j, en [kg s^{-1}]; $q_{lo,j}(t)$ es el caudal de microorganismos de la rodaja j a la j+1 o al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$R_{max} = 9.4 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (16)$$

$$\gamma_{s^*} = 1.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (17)$$

$$m_{l,j}(0) = 0.02 \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (18)$$

$$q_{li,j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = 1 \\ \dfrac{m_{l,j-1}(t)}{m} \cdot Q & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (19)$$

$$q_{lr,j}(t) = \begin{cases} r_l \cdot \dfrac{m_{l,J}(t)}{m} \cdot Q & \text{si} \quad j = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \qquad (20)$$

$$q_{b,j}(t) = F_b \cdot q_j(t) \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (21)$$

$$q_{d,j}(t) = R_d \cdot m_{l,j}(t) \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (22)$$

$$q_{lo,j}(t) = \frac{m_{l,j}(t)}{m} \cdot Q \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (23)$$

r_l es la fracción de microorganismos que viajan de la rodaja J a la 1, reingresando, en [kg kg^{-1}]; R_d es el coeficiente de mortalidad dentro de cualquier rodaja, en [s^{-1}]

$$r_l = 0.50 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (24)$$

$$R_d = 1.7 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (25)$$

CC BY NC ND

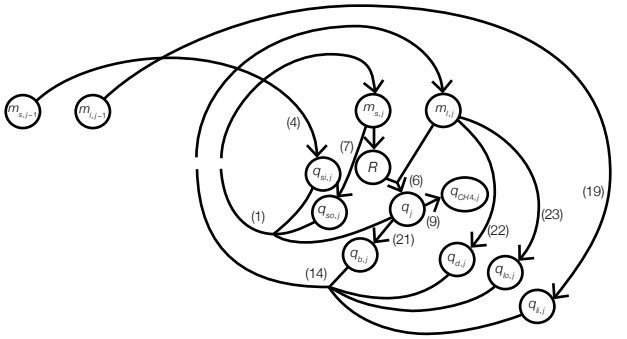


Fig. 3: Estructura causal para una rodaja (si $1<j<J$, si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (8), (10), (11), (12), (15), (16), (17), (18), (24) y (25) no contienen ninguna variable que evoluciona: (5) y (20) contienen 1 cada una; (4), (6), (7), (9), (13), (19), (21), (22) y (23), 2; (1), 5; (14), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 13 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^9 \cdot 5^1 \cdot 6^1$ (=15360) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1) y (3)-(25).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(1) y (14) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado (para la rodaja j y la j-1) y, de los 15360 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1) y (3)-(25), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^9$ (=512).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 512 sistemas de ecuaciones restantes, 511 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja j o la j-1), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1) y (3)-(25).

Si nos interesa la evolución de T_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1) y (14); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $m_{s,j}$ inicial, $m_{l,j}$ inicial, $q_{si,1}$, $q_{li,1}$, J, m, Q, r_s, F_b, R_{max}, γ_{s*}, r_l, R_d, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(25) (saltando (2)) como:

$J = \ldots$ (8′)

$m = \ldots$ (10′)

$Q = \ldots$ (11′)

$r_s = \ldots$ (12′)

$F_b = \ldots$ (15′)

BY NC ND

$$R_{max} = \ldots \tag{16'}$$

$$\gamma_{s^*} = \ldots \tag{17'}$$

$$r_l = \ldots \tag{24'}$$

$$R_d = \ldots \tag{25'}$$

$$m_{s,j,0} = \ldots \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{3'}$$

$$m_{l,j,0} = \ldots \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{18'}$$

$$q_{si,j,k} = \begin{cases} \ldots & \text{si} \quad j = 1 \\ \dfrac{m_{s,j-1,k}}{m} \cdot Q & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \tag{4'}$$

$$q_{li,j,k} = \begin{cases} \ldots & \text{si} \quad j = 1 \\ \dfrac{m_{l,j-1,k}}{m} \cdot Q & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \tag{19'}$$

$$R_{j,k} = R_{max} \cdot \frac{m_{s,j,k}}{m_{s,j,k} + \gamma_{s^*} \cdot m} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{13'}$$

$$q_{sr,j,k} = \begin{cases} r_s \cdot \dfrac{m_{s,J,k}}{m} \cdot Q & \text{si} \quad j = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \tag{5'}$$

$$q_{lr,j,k} = \begin{cases} r_l \cdot \dfrac{m_{l,J,k}}{m} \cdot Q & \text{si} \quad j = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le j \le J \end{cases} \tag{20'}$$

$$q_{j,k} = R_{j,k} \cdot m_{l,j,k} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{6'}$$

$$q_{b,j,k} = F_b \cdot q_{j,k} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{21'}$$

$$q_{d,j,k} = R_d \cdot m_{l,j,k} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{22'}$$

$$q_{so,j,k} = \frac{m_{s,j,k}}{m} \cdot Q \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{7'}$$

$$q_{lo,j,k} = \frac{m_{l,j,k}}{m} \cdot Q \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{23'}$$

$$q_{CH4,j,k} = \left(1 - F_b\right) \cdot q_{j,k} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{9'}$$

$$m_{s,j,k+1} = m_{s,j,k} + \left(q_{si,j,k} + q_{sr,j,k} - q_{j,k} - q_{so,j,k}\right) \cdot dt \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{1'}$$

$$m_{l,j,k+1} = m_{l,j,k} + \left(q_{li,j,k} + q_{lr,j,k} + q_{b,j,k} - q_{d,j,k} - q_{lo,j,k}\right) \cdot dt \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{14'}$$

CC BY NC ND

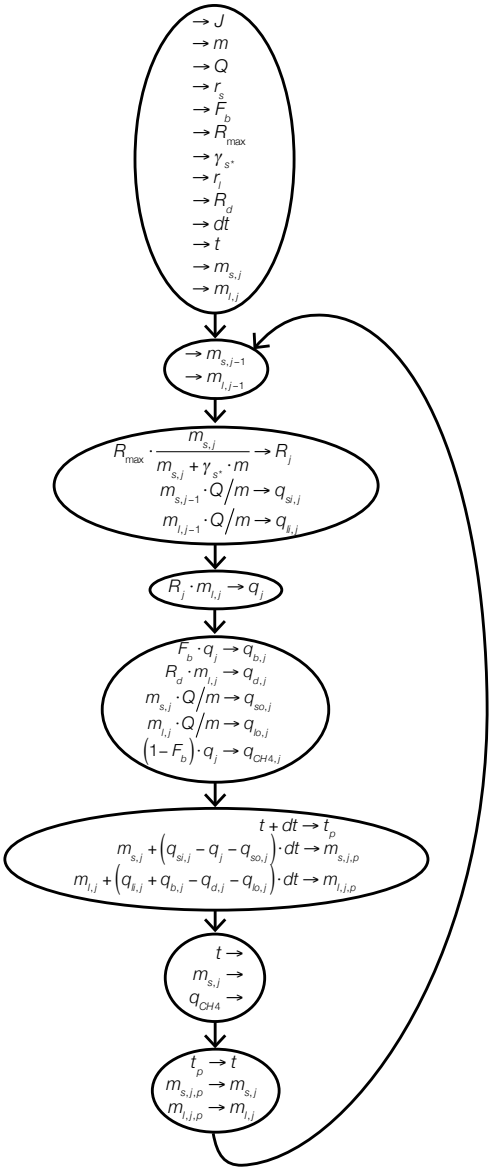


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación) para una rodaja (si 1<*j*<*J*)

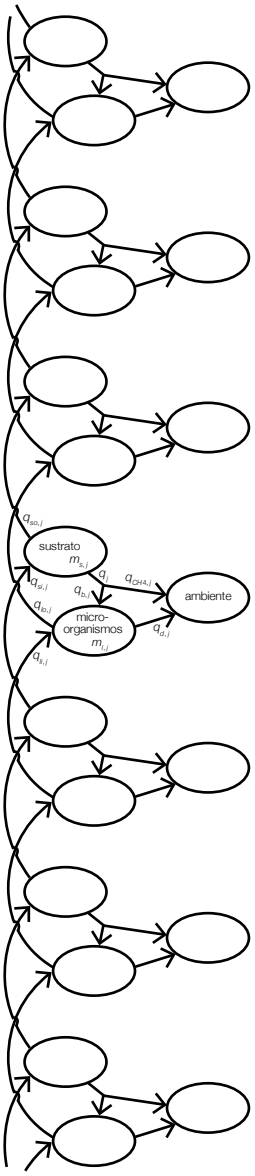


Fig. 5: Estructura taxonómico-espacial para el biodigestor

BY NC ND

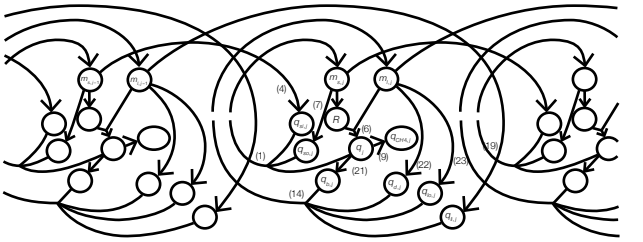


Fig. 6: Estructura causal para el biodigestor

El dibujo de la estructura temporal del método de computación para el biodigestor, es enredado. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=120 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 7.

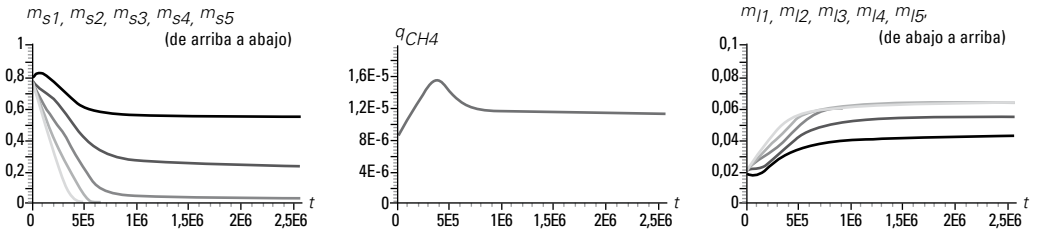


Fig. 7: Predicciones

(Al respecto: en las predicciones, la suma de las masas en el soluto, los microorganismos y el metano no supera el 0.5% de la masa en el agua).

Se puede comparar lo expuesto con lo que ocurriría si no hay reingresos, reemplazando (12) y (24) por:

$$r_s = 0 \qquad (12a)$$

$$r_l = 0 \qquad (24a)$$

Así se obtiene la figura 8.

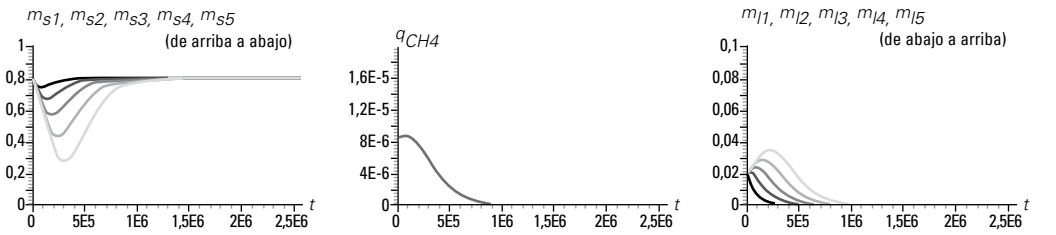


Fig. 8: Predicciones

BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1) y (14), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las masas de sustrato y microorganismos. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de esas masas en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Si luego se quiere hablar de caudales, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de esos caudales en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las masas.

$\underline{m}_{s,j}(t)$ es la concentración de la masa de sustrato en el volumen de la rodaja *j*, en [kg m^{-3}]; $\underline{m}_{l,j}(t)$ es la concentración de la masa de microorganismos en el volumen de la rodaja *j*, en [kg m^{-3}]; $\underline{q}_{CH4}(t)$ es la concentración del caudal de metano en el área de la superficie superior del biodigestor, por donde viaja el metano del biodigestor al ambiente, en [kg s^{-1} m^{-2}]; $\underline{m}$ es la concentración de la masa de agua en el volumen de la rodaja *j*, en [kg m^{-3}]; $\underline{Q}$ es la concentración del caudal de agua en el área transversal de cualquier rodaja, en [kg s^{-1} m^{-2}].

$$\underline{m}_{s,j}\left(t\right)=\frac{m_{s,j}\left(t\right)}{\pi\cdot r^2\cdot dx}\qquad \text{si}\quad 1\le j\le J \tag{a1}$$

$$\underline{m}_{l,j}\left(t\right)=\frac{m_{l,j}\left(t\right)}{\pi\cdot r^2\cdot dx}\qquad \text{si}\quad 1\le j\le J \tag{a2}$$

$$\underline{q}_{CH4}\left(t\right)=\frac{q_{CH4}\left(t\right)}{\pi\cdot r^2} \tag{a3}$$

$$\underline{m}=\frac{m}{\pi\cdot r^2\cdot dx}\qquad \text{si}\quad 1\le j\le J \tag{a4}$$

$$\underline{Q}=\frac{Q}{\pi\cdot r^2} \tag{a5}$$

Por supuesto, *r* es el radio transversal del biodigestor, en [m]; *dx* es la altura de cualquier rodaja, en [m]. Como ambos son constantes respecto al tiempo *t*, el volumen $\pi\cdot r^2\cdot dx$ y la sección transversal $\pi\cdot r^2$ también son constantes y es fácil aprovechar el carácter de (1) y (14): derivando (a1), insertando (1), (4), (5), (6), (7) y (13), y usando (a1), (a2), (a4) y (a5); derivando (a2), insertando (14), (19), (20), (21), (22), (6) y (13), y usando (a1), (a2), (a4) y (a5); y considerando (a3), insertando (2), (9) y (13), y usando (a1), (a2) y (a4):

$$\frac{d\underline{m}_{s,j}\left(t\right)}{dt}=-\frac{\underline{Q}}{\underline{m}}\cdot\frac{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)-\underline{m}_{s,j-1}\left(t\right)}{dx}-R_{\max}\cdot\frac{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)\cdot\underline{m}_{l,j}\left(t\right)}{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)+\gamma_{s^*}\cdot\underline{m}}\qquad \text{si}\quad 1<j\le J$$

$$\frac{d\underline{m}_{l,j}\left(t\right)}{dt}=-\frac{\underline{Q}}{\underline{m}}\cdot\frac{\underline{m}_{l,j}\left(t\right)-\underline{m}_{l,j-1}\left(t\right)}{dx}-R_d\cdot\underline{m}_{l,j}+F_b\cdot R_{\max}\cdot\frac{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)\cdot\underline{m}_{l,j}\left(t\right)}{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)+\gamma_{s^*}\cdot\underline{m}}\qquad \text{si}\quad 1<j\le J$$

$$\underline{q}_{CH4}\left(t\right)=\left(1-F_b\right)\cdot R_{\max}\cdot\sum_{j=1}^{J}\frac{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)\cdot\underline{m}_{l,j}\left(t\right)}{\underline{m}_{s,j}\left(t\right)+\gamma_{s^*}\cdot\underline{m}}\cdot dx$$

CC BY NC ND

Y, haciendo que dx tienda a 0 y reconociendo que $d\underline{m}_s(x,t)/dt=\partial \underline{m}_s(x,t)/\partial t$ y $d\underline{m}_l(x,t)/dt=\partial \underline{m}_l(x,t)/\partial t$ cuando estas derivadas parciales se refieren a x constante:

$$\frac{\partial \underline{m}_s\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\underline{Q}}{\underline{m}} \cdot \frac{\partial \underline{m}_s\left(x,t\right)}{\partial x} - R_{max} \cdot \frac{\underline{m}_s\left(x,t\right) \cdot \underline{m}_l\left(x,t\right)}{\underline{m}_s\left(x,t\right) + \gamma_{s^*} \cdot \underline{m}} \qquad \text{si} \quad 0 < x \leq X \qquad \text{(a6)}$$

$$\frac{\partial \underline{m}_l\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\underline{Q}}{\underline{m}} \cdot \frac{\partial \underline{m}_l\left(x,t\right)}{\partial x} - R_d \cdot \underline{m}_l\left(x,t\right) + F_b \cdot R_{max} \cdot \frac{\underline{m}_s\left(x,t\right) \cdot \underline{m}_l\left(x,t\right)}{\underline{m}_s\left(x,t\right) + \gamma_{s^*} \cdot \underline{m}} \qquad \text{si} \quad 0 < x \leq X \qquad \text{(a7)}$$

$$\underline{q}_{CH4}\left(t\right) = \left(1 - F_b\right) \cdot R_{max} \cdot \int_0^X \frac{\underline{m}_s\left(x,t\right) \cdot \underline{m}_l\left(x,t\right)}{\underline{m}_s\left(x,t\right) + \gamma_{s^*} \cdot \underline{m}} \cdot dx \qquad \text{(a8)}$$

Por cierto, X es la altura del biodigestor, en [m].

PARÉNTESIS ACERCA DE MOMENTA Y FUERZAS

Retomemos el tema de los momenta y las fuerzas, parodiando en la figura 1 el texto con que Isaac Newton (1642-1727) legó sus claves al respecto en la Inglaterra de 1686.

MMX

SCITA MATHEMATICA
sine imprimatur

J. Glaria
D. Electron., Univ. Sta. Maria, Valparadisus

DEF. I.
Todo cuerpo es un recinto; & viceversa.

LEX. I.
La velocidad (media) de la materia en todo recinto no vacio de ella, resulta de la división matemática de las cantidades de movimiento & de materia en el recinto, por reparto.

LEX. II.
La cantidad de movimiento en todo recinto resulta de la acumulación de las fuerzas entrantes & la desacumulación de las salientes; & el movimiento cabal es eterno, de manera que tales acumulaciones & desacumulaciones ocurren a costa de desacumulaciones & acumulaciones en recintos contiguos.

LEX. III.
La cantidad de materia en todo recinto resulta de la acumulación de los caudales entrantes & la desacumulación de los salientes; & la materia cabal es eterna, de manera que tales acumulaciones & desacumulaciones ocurren a costa de desacumulaciones & acumulaciones en recintos contiguos.

COROL. I.
La materia en todo recinto no vacio de ella continúa con su velocidad (media), a menos que el recinto sea compelido a cambiarla por fuerzas, por caudales o por fuerzas & caudales. (Lex. Newton. I)

COROL. II.
La tasa de crecimiento de la cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza netamente entrante. (Lex. Newton. II)

COROL. III.
Toda fuerza entrante a un recinto es saliente de otro contiguo; & viceversa (Lex. Newton. III).

COROL. IV.
La tasa de crecimiento de la cantidad de materia es proporcional al caudal netamente entrante.

COROL. V.
Todo caudal entrante a un recinto es saliente de otro contiguo; & viceversa.

Fig. 1: Parodia de texto

Por supuesto, debiésemos aclarar que la cantidad de movimiento de la Lex. 1 es sólo la alojada en la cantidad de materia; debiéramos ajustar las expresiones "cantidad de materia" y "cantidad de movimiento" a "masa" y "momentum", res-

BY NC ND

pectivamente; y tendríamos que confesar algunas discrepancias actuales respecto a la eternidad de las masas; pero la dificultad básica está en la segunda parte de la Lex. II, que complicó a Newton mismo con las fuerzas "a distancia" y, en particular, con las gravitacionales.

Aventurémonos un poco en la gravitación entre dos cuerpos (recintos) celestes, suponiendo (horizontalmente, para enredarnos menos) que p_1 es el momentum netamente derechista en el cuerpo izquierdo y p_2 es el momentum netamente derechista en el derecho; esto es, considerando la figura 2.

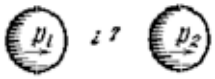


Fig. 2: Dos cuerpos celestes y una gravitación

Por dictamen de Newton, la magnitud *f* de la fuerza de gravitación izquierdista "ejercida por" el cuerpo izquierdo (el 1) "en" el derecho (el 2), como "acción", es igual que la magnitud de la fuerza de gravitación derechista "ejercida por" el derecho "en" el izquierdo, como "reacción", y depende proporcionalmente de la masa en el cuerpo izquierdo, m_1, también proporcionalmente de la masa en el derecho, m_2, e inversamente del cuadrado de la distancia entre ambos, $|x_2\text{-}x_1|$:

$$f(t) \propto \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|x_2(t) - x_1(t)\right|^2}$$

Antes, Robert Hooke (1635-1703) había dictaminado, con más soltura, que *f* depende inversamente del cuadrado de la distancia:

$$f(t) \propto \frac{1}{\left|x_2(t) - x_1(t)\right|^2}$$

Pero, más sueltamente aún, ¿cómo es que, pese a una distancia astronómica, hay una "acción" izquierdista "ejercida en" el cuerpo derecho "por" el izquierdo", y una "reacción" derechista "ejercida en" el izquierdo "por" el derecho?

El dilema se achica pero no desaparece si la distancia se anula (sin siquiera tomar en cuenta que *f* se hace descomunal): ¿debemos torcer el fraseo de las "acciones" y "reacciones" hasta que exprese la creación de fuerzas y "antifuerzas"?

Seguramente, más que de una creación de fuerzas y "antifuerzas", o de "acciones" y "reacciones", y más que de un "ejercicio" o de una "aplicación", se trata de que un cuerpo bota, cede, deja salir, despide, emite, entrega, expele, expulsa, libera, otorga o suelta momenta y, al revés, acoge, admite, adquiere, deja entrar, ingiere, recibe, recoge o toma momenta. Las fuerzas fluyen (quizás con rapidez finita) de unos cuerpos a otros.

Más precisamente: los que fluyen son los momenta. Las fuerzas son sus flujos, caudales, corrientes o chorros.

Respecto a la figura 2, ¿cómo es que fluyen momenta del cuerpo izquierdo al derecho y del derecho al izquierdo, constituyendo fuerzas?. Los momenta fluyentes, ¿se derraman de cada cuerpo emisor a destajo, por todo el espacio (incluyendo la dirección horizontal a la que nos estamos reduciendo), multitudinariamente y de manera errática, hasta que una parte del derrame da con el cuerpo receptor, por casualidad?; ¿o se dirigen certeramente de un cuerpo al otro, sirviéndose de agentes furtivos que delatan las posiciones de los cuerpos?

CC BY NC ND

Si los momenta se derraman a destajo: el derrame, ¿se perpetúa sin tregua según el esbozo de la figura 3, donde *F* es la magnitud de la fuerza (horizontal) emitida por cada cuerpo hacia un costado, *f* es la de la parte que llega al otro cuerpo desde el costado pertinente, y *F-f* es la de la parte que pasa de largo si *f/F*<1 (suponiendo que ambos cuerpos son muy parecidos y entendiendo que las curvaturas de las flechas son de fantasía, para no superponer líneas horizontales)?

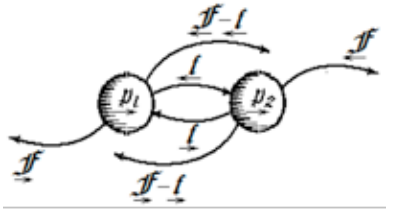


Fig. 3: Dos cuerpos celestes y seis fuerzas

Por cierto, podemos sospechar que la figura 3 remeda la clave de los raciocinios con que Hooke inició su dictamen: la presencia de cada cuerpo se achica ante el otro si ambos se alejan, y la fracción *f/F* seguramente se achica en concordancia; en el espacio, la presencia de cada cuerpo debiera ser, como el ángulo sólido que le ocupa al otro, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos; por consiguiente, *f/F* debiese depender inversamente del cuadrado de la distancia; y *f*, también.

Aparte de eso, según la figura 3:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(-\left(+F(\tau)\right) - \left(-\left(F(\tau) - f(\tau)\right)\right) - \left(-f(\tau)\right) + \left(+f(\tau)\right)\right) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(-\left(-F(\tau)\right) - \left(+\left(F(\tau) - f(\tau)\right)\right) - \left(+f(\tau)\right) + \left(-f(\tau)\right)\right) \cdot d\tau$$

y:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

En cada cuerpo, la emisión de una fuerza derechista con magnitud *F* o (*F-f*)+*f* hacia la izquierda y la de otra izquierdista con magnitud igual hacia la derecha, se compensan y pueden perpetuarse sin alterar el momentum en el cuerpo. Por extrapolación, el derrame de momenta a destajo puede ocurrir sin ninguna alteración de ese tipo, si hay emisiones parecidas no sólo en la dirección horizontal sino en todas. Parece, pues, que el derrame de momenta puede perpetuarse, sin tregua. Pero la emisión de fuerzas se asocia con la de potencias, y éstas no son derechistas ni izquierdistas, de manera que la emisión de una potencia hacia la izquierda y la de otra con magnitud igual hacia la derecha no se compensan, y ponen en jaque a la energía del cuerpo emisor.

Estamos ante un dilema.

Si los momenta se dirigen certeramente sirviéndose de agentes furtivos, para

BY NC ND

estos se nos repiten las preguntas hechas antes para los momenta: dichos agentes, ¿se derraman multitudinaria y erráticamente rastreando por el espacio hasta que algunos dan con los cuerpos?; ¿o se mueven certeramente sirviéndose de otros agentes más subrepticios?

Estamos ante otro dilema.

O quienes dirigen a los momenta fluyentes, ¿son agentes de tránsito ubicados en el espacio sin el concurso de fuerzas ni de potencias, y conformando nuestra noción del espacio mismo (el que sólo conocemos mediante instrumentos sometidos a momenta fluyentes)?

Esta conjetura, que es vertiginosa, sugiere la figura 4 a cambio de la 3 (suponiendo que ambos cuerpos son muy parecidos, entendiendo que las curvaturas de las flechas son de fantasía, y aceptando que quizás cada flecha es un compendio de varias, algunas efectivamente curvas).

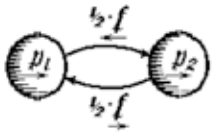


Fig. 4: Dos cuerpos celestes y dos fuerzas

Según la figura 4:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(-\left(-\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) + \left(+\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(+\left(-\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) - \left(+\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

y, otra vez:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

Así, si los dos cuerpos celestes fuesen muy parecidos, podríamos hablar de dos fuerzas: una izquierdista saliente del cuerpo izquierdo y entrante al derecho, y otra derechista saliente del derecho y entrante al izquierdo (cada una con la mitad de la magnitud presupuestada antes).

Si el cuerpo izquierdo fuese el doble del derecho o, más pedestremente, si el izquierdo fuese un conjunto compuesto de dos parecidos al derecho, por un cambio en el punto de vista espacial, podríamos hablar de cuatro fuerzas y esbozar la figura 5.

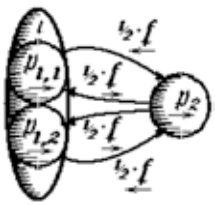


Fig. 5: Dos cuerpos celestes (uno doble), y cuatro fuerzas

CC BY NC ND

Según la figura 5:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(-2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) + 2 \cdot \left(+\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(+2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) - 2 \cdot \left(+\frac{1}{2} \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

y, enseguida:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t 2 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t 2 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

Por extrapolación, si el cuerpo izquierdo (el 1) fuese un conjunto de n_1 cuerpos parecidos, debiéramos concluir que:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t n_1 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t n_1 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

y si, además, el cuerpo derecho (el 2) fuese un conjunto de n_2 cuerpos también parecidos, debiéramos concluir que:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t n_1 \cdot n_2 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t n_1 \cdot n_2 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$

Pero, al hablar aquí de cuerpos parecidos, ¿de qué parecido hablamos?

No es del parecido de forma ni del de tamaño, porque, por lo menos a ras del suelo, las fuerzas de peso "ejercidas por" la Tierra "en" una bola de fierro hueca y "en" otra parecida en forma y tamaño pero maciza, no son guales.

Precisamente ahí está la respuesta: las fuerzas de peso en las dos bolas responden a sus masas según las balanzas, y en las masas está la diferencia o, por el contrario, el parecido que buscábamos esclarecer.

Juntando estos últimos devaneos con el dictamen de Hooke:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left| x_2(t) - x_1(t) \right|^2} \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left| x_2(t) - x_1(t) \right|^2} \cdot d\tau$$

donde *G* es algún coeficiente que da la fuerza prototípica para unidades de masas y distancias.

Ahora podemos sospechar que tenemos un remedo de los raciocinios con que

BY NC ND

Newton inició su propio dictamen, aunque él hablara de otro modo y probablemente ajustara su imaginación más a la figura 3 que a la 4.

Si en una hilera de recintos sólo el primero y el último tienen masa, como se nos puede ocurrir cuando se trata de dos cuerpos celestes "a distancia" vacía de masa entre medio, los momenta deben fluir también, saliendo y entrando de recinto en recinto sucesivamente, quizás como ilustra la figura 6.

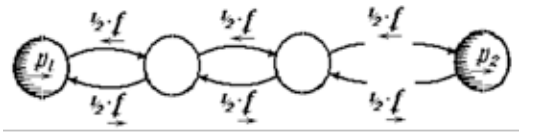


Fig. 6: Hilera de recintos celestes, y fuerzas

Insertemos aquí un comentario en torno a la figura 7, que es una generalización de la 4.

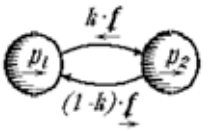


Fig. 7: Dos cuerpos celestes y dos fuerzas

Según la figura 7:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(-\left(-k \cdot f(\tau) \right) + \left(+\left(1-k \right) \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(+\left(-k \cdot f(\tau) \right) - \left(+\left(1-k \right) \cdot f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau$$

y, enseguida, como antes:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

$$p_2(t) = p_2(0) - \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

Esto implica, por lo menos, tres asuntos ligados entre sí:

- que, en lo que respecta a los momenta en los cuerpos, podemos suponer indistintamente k=1/2, para concordar con los diagramas de las figuras 4, 5 y 6; o k=1, para concordar con el diagrama de la figura 8 (abajo) y ahorrarnos flechas; o k=0, para dibujar un diagrama al revés con un ahorro parecido;
- que, en lo que respecta a las fronteras de los cuerpos, podemos moverlas de manera que observemos una rapidez γ de paso de momentum entre cuerpos por las líneas superiores del último diagrama y también γ por las líneas inferiores, tentándonos a anotar k=1/2; o 0 por las inferiores y 2·γ por las superiores, tentándonos a anotar k=1; o 0 por las superiores y 2·γ por las inferiores, tentándonos a anotar k=0; y así sucesivamente hasta completar el chiste de que podríamos ceder a cualquiera de esas tentaciones sin remordimientos;
- y que, clásicamente, un observador inercial podría observar una rapidez γ en las fuerzas por las líneas superiores del último diagrama y también una rapidez

CC BY NC ND

γ en las fuerzas por las líneas inferiores, con lo cual podría sentirse tentado a anotar k=1/2; otro observador inercial, moviéndose a la par que las fuerzas por las líneas inferiores, podría observar una rapidez 0 en las fuerzas por esas líneas inferiores y una rapidez 2·γ en las fuerzas por las líneas superiores, con lo cual podría sentirse tentado a anotar k=1; otro observador inercial, moviéndose a la par que las fuerzas por las líneas superiores, podría observar una rapidez 0 en las fuerzas por esas líneas superiores y una rapidez 2·γ en las fuerzas por las líneas inferiores, con lo cual podría sentirse tentado a anotar k=0; y así sucesivamente hasta completar el chiste de que todos podrían discrepar pero, al intentar un arbitraje mediante medidores, terminarían todos en empate.

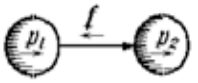


Fig. 8: Dos cuerpos celestes y una fuerza

Lo que falta por decir de la gravitación, no cabe en este libro.

Aprovechando lo que ha cabido, en lo que sigue procuraremos ahorrarnos flechas al representar fuerzas e ignoraremos la finitud de la rapidez de las fuerzas mismas, empezando con otra parte del legado de Hooke: las fuerzas de los resortes.

BY NC ND

26.0

DOS CUERPOS Y UN RESORTE (MOMENTA Y FUERZAS)

En la Inglaterra de la segunda mitad del siglo 17, Hooke dio indicios suficientes para considerar que, por lo menos aproximadamente, la fuerza $f(t)$ a través de un resorte evoluciona dependiendo de un coeficiente K, que no es el de Torricelli ni evoluciona mucho, de la longitud L del resorte relajado, que tampoco evoluciona mucho, y de la longitud efectiva $l(t)$ del resorte, que sí evoluciona, según la fórmula siguiente:

$$\left|\vec{f}\left(t\right)\right| = K \cdot \left|l\left(t\right) - L\right|$$

con la cual sólo tenemos acceso a magnitudes.

Como necesitamos precisar más, restrinjámonos a movimientos horizontales para simplificar el carácter vectorial de $\vec{f}\left(t\right)$, y alivianar nuestros pensamientos.

No hablemos, pues, de $\vec{f}\left(t\right)$ sino de $f(t)$, y precisemos, en ese escenario, indagando a qué nos lleva esta otra fórmula:

$$f\left(t\right) = K \cdot \left(l\left(t\right) - L\right)$$

con la cual $f(t)$ queda positiva cuando $l(t)$ está mayor que L, y negativa cuando está menor.

Cuando $l(t)$ está mayor que L, el resorte está estirado, y cuando $l(t)$ está menor que L, el resorte está encogido. Y no es difícil conjeturar que, cuando el resorte está estirado, atrae sus extremos; y que, cuando está encogido, los repele. Por lo tanto, la $f(t)$ que queda positiva cuando $l(t)$ está mayor que L, es de una fuerza de atracción.

Tampoco es difícil advertir que las fuerzas de atracción se distinguen por la oposición entre el viaje y el carácter de los momenta fluyentes (y las repulsiones, por la coincidencia). Consecuentemente, la $f(t)$ que queda positiva cuando $l(t)$ está mayor que L, es la fuerza de atracción donde se oponen el viaje y el carácter de los momenta fluyentes.

Imaginemos, pues, dos cuerpos y un resorte que los une solitariamente.

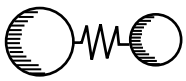


Fig. 1: Dos cuerpos y un resorte

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de los dos cuerpos, suponiendo despreciables los roces y la masa del resorte.

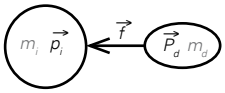


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

CC BY NC ND

$x_i(t)$ es la posición del cuerpo izquierdo, en [m] hacia la derecha de una referencia; $x_2(t)$ es la del derecho, en [m] hacia la derecha de la referencia:

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t v_i(\tau) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$x_d(t) = x_d(0) + \int_0^t v_d(\tau) \cdot d\tau \quad (2)$$

$x_i(0)$ es la posición del cuerpo izquierdo inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_i(t)$ es la velocidad del cuerpo izquierdo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $x_d(0)$ es la posición del derecho inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_d(t)$ es la velocidad del derecho, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$x_i(0) = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (3)$$

$$v_i(t) = p_i(t) / m_i \quad (4)$$

$$x_d(0) = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$v_d(t) = p_d(t) / m_d \quad (6)$$

$p_i(t)$ es el momentum en el cuerpo izquierdo, en [N s] hacia la derecha; m_i es la masa en el cuerpo izquierdo, en [kg]; $p_d(t)$ es el momentum en el derecho, en [N s] hacia la derecha; m_d es la masa en el derecho, en [kg]:

$$p_i(t) = p_i(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau \quad (7)$$

$$m_i = 6 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$p_d(t) = p_d(0) - \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau \quad (9)$$

$$m_d = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$p_i(0)$ es el momentum en el cuerpo izquierdo inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f(t)$ es la fuerza del cuerpo derecho al izquierdo por la elasticidad del resorte, en [N] hacia la derecha; $p_d(0)$ es el momentum en el cuerpo derecho inicialmente, en [N s] hacia la derecha:

$$p_i(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$

$$f(t) = K \cdot \left(\left| x_d(t) - x_i(t) \right| - L \right) \quad (12)$$

$$p_d(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

K es el coeficiente de elasticidad del resorte, en [N m^{-1}]; L es la longitud del resorte relajado, en [m]:

$$K = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$L = 0.75 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

CC BY NC ND

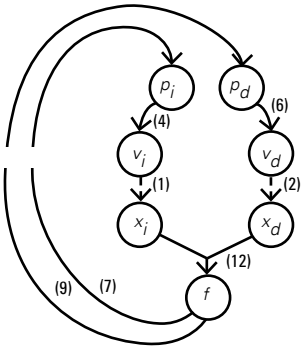


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (8), (10), (11), (13), (14) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (7) y (9) contienen 2 cada una; (4), (6) y (12) contienen 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 7 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^4 \cdot 3^3$ (=432) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(7) y (9) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 432 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $2^2 \cdot 3^3$ (=108).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 108 sistemas de ecuaciones restantes, 107 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesan las evoluciones de x_i y x_d; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x_i inicial, x_d inicial, p_i inicial, p_d inicial, m_i, m_d, K_0, l_0, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$m_i = \ldots$ (8′)

$m_d = \ldots$ (10′)

$K = \ldots$ (14′)

$L = \ldots$ (15′)

$x_{i,0} = \ldots$ (3′)

$x_{d,0} = \ldots$ (5′)

CC BY NC ND

$$p_{i,0} = \ldots \tag{11'}$$

$$p_{d,0} = \ldots \tag{13'}$$

$$v_{i,k} = p_{i,k} / m_i \tag{4'}$$

$$v_{d,k} = p_{d,k} / m_d \tag{6'}$$

$$f_k = K \cdot \left(\left| x_{d,k} - x_{i,k} \right| - L \right) \tag{12'}$$

$$x_{i,k+1} = x_{i,k} + v_{i,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$x_{d,k+1} = x_{d,k} + v_{d,k} \cdot dt \tag{2'}$$

$$p_{i,k+1} = p_{i,k} + f_k \cdot dt \tag{7'}$$

$$p_{d,k+1} = p_{d,k} - f_k \cdot dt \tag{9'}$$

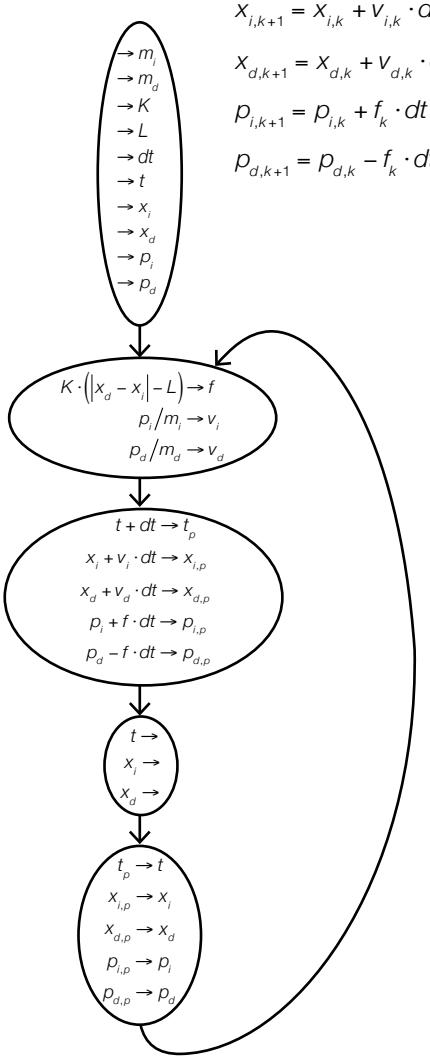


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

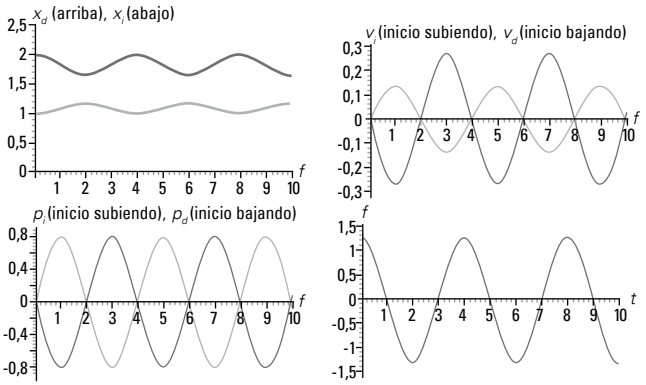


Fig. 5: Predicciones

Pese a que se nota poco en un lapso de tiempo tan corto, las amplitudes de las oscilaciones predichas van aumentando. Eso no ocurre realmente. Hay errores de predicción que tolerar porque, si usamos la aproximación de Euler para las integraciones con *dt* más pequeño que 0.001 (más parecido a 0), los errores disminuyen pero no acaban.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7), (9), (1) y (2) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las posiciones con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (12), derivando (9) e insertando (12), derivando (1) e insertando (4), y derivando (2) e insertando (6):

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = K \cdot \left(\left| x_d(t) - x_i(t) \right| - L \right) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dp_d(t)}{dt} = -K \cdot \left(\left| x_d(t) - x_i(t) \right| - L \right) \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{p_i(t)}{m_i} \qquad \text{(a3)}$$

$$\frac{dx_d(t)}{dt} = \frac{p_d(t)}{m_d} \qquad \text{(a4)}$$

CC BY NC ND

27.0

UN PARACAIDISTA EN EL AIRE (MOMENTA Y FUERZAS)

En 1483, Leonardo da Vinci (1452-1519) proyectó un paracaídas. En 1595, Faust Vrančić (1551-1617) proyectó otro y algunos años después se dejó caer, exitosamente, con él.

Imaginemos un paracaidista que cae por el aire.

Fig. 1: Un paracaidista en el aire

Interesa predecir la evolución de la velocidad de la caída, suponiendo que no hay vientos ni otras sorpresas.

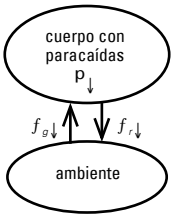


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$v(t)$ es la velocidad del paracaidista, en [m s^{-1}] hacia abajo:

$$v(t) = \frac{p(t)}{m} \tag{1}$$

$p(t)$ es el momentum en el paracaidista, en [N s] hacia abajo; m es la masa en el paracaidista, en [kg]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(\left(+f_g \right) - \left(+f_r(\tau) \right) \right) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$m = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$p(0)$ es el momentum inicialmente, en [N s] hacia abajo; f_g es la fuerza de la Tierra al paracaidista por gravitación, en [N] hacia abajo; $f_r(t)$ es la fuerza del paracaidista al aire por roce, en [N] hacia abajo:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

CC BY NC ND

$$f_g = m \cdot g \tag{5}$$

$$f_r(t) = \left(D_1 + D_2 \cdot |v(t)|\right) \cdot v(t) \tag{6}$$ [15]

g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; D_1 es un coeficiente de roce, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce, en [N m^{-2} s^2]:

$$g = 9.8 \tag{7}$$

$$D_1 = 40 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$D_2 = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

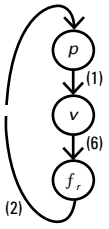


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (7), (8) y (9) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2) y (6), contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 3 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^3 (=8) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(9).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(2) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 8 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(9), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^2$ (=4).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(9).

Si nos interesa la evolución de *v*, si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (2); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *p* inicial, *m, g,* D_1, D_2, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(9) como:

$$m = \ldots \tag{3'}$$

$$g = \ldots \tag{7'}$$

$$D_1 = \ldots \tag{8'}$$

[15] Extensión de una aproximación de Newton.

BY NC ND

$$D_2 = \ldots \tag{9'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{4'}$$

$$f_g = m \cdot g \tag{5'}$$

$$v_k = \frac{p_k}{m} \tag{1'}$$

$$f_{r,k} = \left(D_1 + D_2 \cdot \left|v_k\right|\right) \cdot v_k \tag{6'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(f_g - f_{r,k}\right) \cdot dt \tag{2'}$$

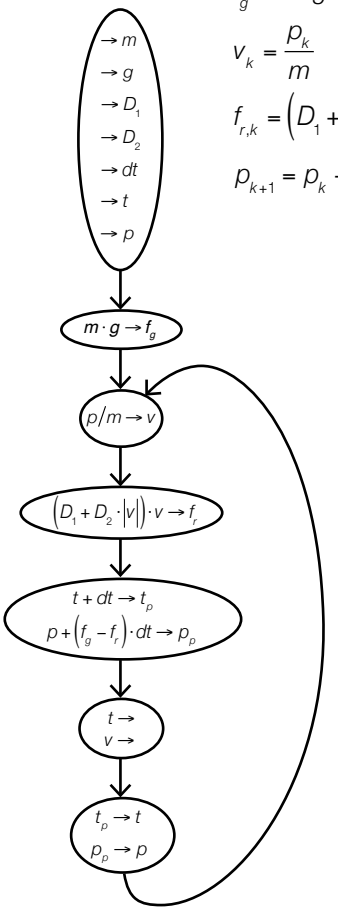


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

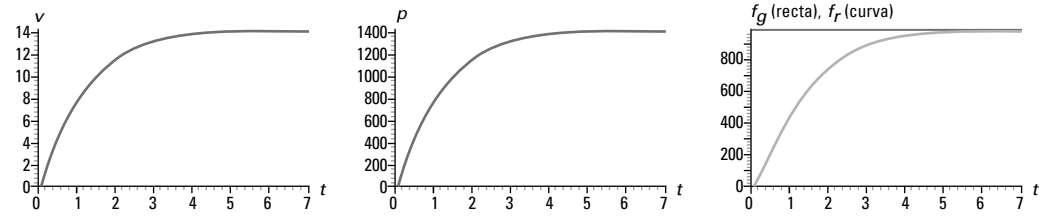


Fig. 5: Predicciones

BY NC ND

Aprovechando el carácter de (2) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para el momentum con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (5), (6) y (1):

$$\frac{dp(t)}{dt} = m \cdot g - \left(D_1 + D_2 \cdot \left| \frac{p(t)}{m} \right| \right) \cdot \frac{p(t)}{m} \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución de la velocidad de la caída, aceptando (a1) y considerando (1):

$$v(t) = \frac{p(t)}{m} \qquad \text{(a2)}$$

BY NC ND

28.0

UNA BURBUJA DE AIRE EN EL AGUA (MOMENTA Y FUERZAS)

Invirtiendo el caso del paracaidista que cae por el aire, imaginemos una burbuja de aire que sube por el agua.

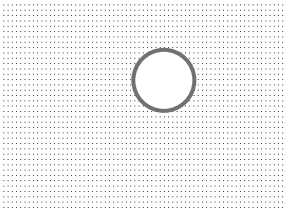


Fig. 1: Una burbuja en el agua

Interesa predecir las evoluciones de la posición de la burbuja suponiendo que su velocidad de ascenso es suficientemente baja para no provocar turbulencias, para ser, así, puramente vertical, para mantener la burbuja con forma (casi) esférica, y para suscitar un roce predominantemente laminar entre la burbuja y el agua (sin mover a esta última de manera significativa).

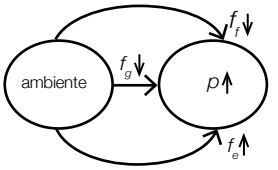


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y(t)$ es la posición vertical de la burbuja, desde algún nivel de referencia inmerso en el agua y quieto, en [m] hacia arriba:

$$y\left(t\right) = y\left(0\right) + \int_0^t v\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{1}$$

$y(0)$ es la posición vertical de la burbuja inicialmente, en [m] hacia arriba; $v(t)$ es la velocidad de ascenso de la burbuja, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$y\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$v\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{m} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum vertical en la burbuja, en [N s] hacia arriba; m es la masa en la burbuja, en [kg]:

CC BY NC ND

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(\left(+f_e(\tau) \right) + \left(-f_f(\tau) \right) + \left(-f_g \right) \right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$m = 1 \cdot 10^{-7} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$p(0)$ es el momentum vertical en la burbuja inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_e(t)$ es la fuerza de empuje del agua a la burbuja, en [N] hacia arriba; $f_f(t)$ es la fuerza de roce del agua a la burbuja, en [N] hacia abajo; f_g es la fuerza gravitacional de la Tierra a la burbuja, en [N] hacia abajo:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$f_e(t) = \rho_a \cdot V(t) \cdot 9.8 \quad (7)$$

$$f_f(t) = \frac{24}{R_e(t)} \cdot \left(1 + 0.14 \cdot \left(R_e(t) \right)^{0.7} \right) \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot r^2(t) \cdot v^2(t) \quad (\text{si } R_e(t) < 10^3) \quad (8)$$

$$f_g = m \cdot 9.8 \quad (9)$$

ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; $V(t)$ es el volumen de la burbuja, en [m]; $R_e(t)$ es el número de Osborne Reynolds (1842-1912), sin unidades; $r(t)$ es el radio de la burbuja, en [m]:

$$\rho_a = 1000 \quad (10)$$

$$V(t) = \frac{m \cdot k_B \cdot T}{\mu \cdot P_a(t)} \quad (11)$$ [16]

$$R_e(t) = \frac{2 \cdot r(t) \cdot v(t)}{\upsilon_a} \quad (12)$$ [17]

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V(t)}{4 \cdot \pi}} \quad (13)$$

k_B es la constante de Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), en [J K^{-1}]; T es la temperatura del aire en la burbuja, en [K]; μ es la masa molecular del aire, en [kg]; $P_a(t)$ es la presión del agua, en [N m^{-2}]; υ_a es la viscosidad cinemática del agua, en [m^2 s^{-1}] [18]:

---

[16] (11) abrevia brutalmente suponiendo que el volumen de la burbuja depende de la temperatura y la presión del agua. Con un poco más de detalles, podemos decir que: el volumen depende de las presiones del agua y del aire; la presión del aire depende de la energía en él, y del volumen; y la energía depende principalmentalmente de las temperaturas del aire y del agua; así, el volumen de la burbuja termina dependiendo de la temperatura y la presión del agua; la fórmula misma proviene de efectuar algunas maniobras algebraicas con las fórmulas para las dependencias detalladas, imaginando que tanto las presiones como las temperaturas se igualan rápidamente.

[17] Según (12), si v se hace 0, R_e se hace 0 y pone en jaque a (8) por el lado del denominador; en vista de ello, es más seguro replantear (8) insertándole (12) por lo menos parcialmente, lo que da:

$$f_f(t) = 12 \cdot \upsilon_a \cdot \left(1 + 0.14 \cdot \left(R_e(t) \right)^{0.7} \right) \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot r(t) \cdot v(t)$$

[18] Esto es, el cuociente entre la viscosidad dinámica, η, en [kg m^{-1} s^{-1}], y la densidad, ρ, en [kg m^{-3}].

CC BY NC ND

$$k_B = 1.3803 \cdot 10^{-23} \quad (14)$$

$$T = 293 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$\mu = 4.81 \cdot 10^{-26} \quad (16)$$

$$P_a\left(t\right) = P_{atm} + \rho_a \cdot 9.8 \cdot \left(H - y\left(t\right)\right) \quad (17)$$

$$\upsilon_a = 1.00 \cdot 10^{-6} \quad (18)$$ [19]

P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; H es la altura del agua, desde el nivel de referencia, en [m]:

$$P_{atm} = 101300 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (19)$$

$$H = 20 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (20)$$

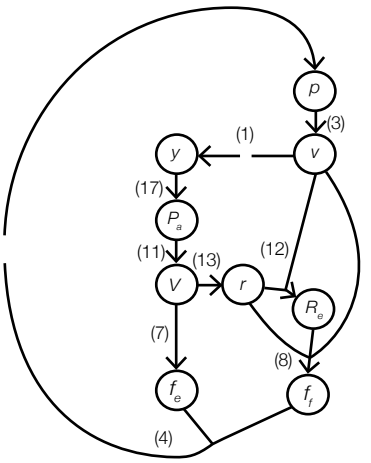


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (5), (6), (9), (10), (14), (15), (16), (18), (19) y (20) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (3), (7), (11), (13) y (17) contienen 2 cada una; (4) y (12), 3; (8), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 9 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^2 \cdot 4^1$ (=2304) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(20).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(4) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 2304 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(20), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^6 \cdot 3^1 \cdot 4^1$ (=768).

[19] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1973, *Handbook of tables for applied engineering*, CRC Press, Cleveland.

BY NC ND

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 768 sistemas de ecuaciones restantes, 767 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(20).

Si nos interesa la evolución de *y*, si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1) y (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *p* inicial, *m, T,* P_{atm}*, H, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(20) como:

$$m = \ldots \tag{5'}$$

$$T = \ldots \tag{15'}$$

$$P_{atm} = \ldots \tag{19'}$$

$$H = \ldots \tag{20'}$$

$$y_0 = \ldots \tag{2'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$\rho_a = 1000 \tag{10'}$$

$$k_B = 1.3803 \cdot 10^{-23} \tag{14'}$$

$$\mu = 4.81 \cdot 10^{-26} \tag{16'}$$

$$\upsilon_a = 1.00 \cdot 10^{-6} \tag{18'}$$

$$f_g = m \cdot 9.8 \tag{9'}$$

$$v_k = \frac{p_k}{m} \tag{3'}$$

$$P_{a,k} = P_{atm} + \rho_a \cdot 9.8 \cdot \left(H - y_k\right) \tag{17'}$$

$$V_k = \frac{m \cdot k_B \cdot T}{\mu \cdot P_{a,k}} \tag{11'}$$

$$r_k = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_k}{4 \cdot \pi}} \tag{13'}$$

$$R_{e,k} = \frac{2 \cdot r_k \cdot v_k}{\upsilon_a} \tag{12'}$$

$$f_{e,k} = \rho_a \cdot V_k \cdot 9.8 \tag{7'}$$

$$f_{f,k} = 12 \cdot \upsilon_a \cdot \left(1 + 0.14 \cdot R_{e,k}^{0.7}\right) \cdot \rho_a \cdot \pi \cdot r_k \cdot v_k \tag{8'}$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k \cdot dt \tag{1'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(f_{e,k} - f_{f,k} - f_g\right) \cdot dt \tag{4'}$$

CC BY NC ND

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante aburrido. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=1·10^{-6} o dt=50·10^{-6}, y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

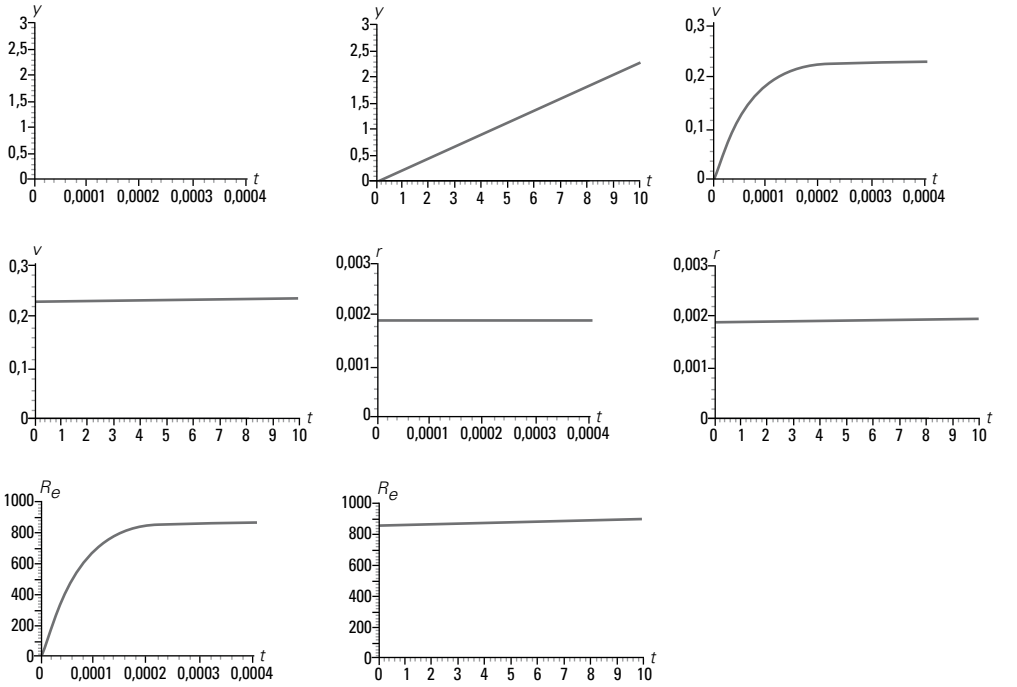


Fig. 4: Predicciones

Las primeras predicciones de cada variable, fueron hechas hasta t=4·10^{-4} con dt=1·10^{-6}. Muestran acomodos preliminares de la velocidad en tiempo tan breve, que se los puede ignorar como si dieran un estado casi-estacionario de inmediato (sobre todo, pensando que la formación de la burbuja podría necesitar un tiempo más largo para completarse). Las segundas predicciones de cada variable fueron hechas continuando para 4·10^{-4}<t con dt=50·10^{-6}, con miras a apurarlas. $R_e(t)$ merece una observación: se va acercando peligrosamente a 10^3 y, con ello, a las turbulencias.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1) y (4) y la estructura causal, podemos plantear un par de ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (3); y derivando (4) e insertando (7), (8), (9), (12), (13), (11) y (3):

BY NC ND

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m} \tag{a1}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \left(\frac{\rho_a \cdot k_B \cdot T}{\mu \cdot \left(P_{atm} + \rho_a \cdot 9.8 \cdot \left(H - y(t) \right) \right)} - 1 \right) \cdot m \cdot 9.8 - \left(12 \cdot \pi \cdot v_a \cdot \rho_a \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m \cdot k_B \cdot T}{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \left(P_{atm} + \rho_a \cdot 9.8 \cdot \left(H - y(t) \right) \right)}} \cdot \frac{p(t)}{m} \cdot \left(1 + 0.14 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m \cdot k_B \cdot T}{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \left(P_{atm} + \rho_a \cdot 9.8 \cdot \left(H - y(t) \right) \right)}} \cdot \frac{p(t)}{m}}{v_a} \right)^{0.7} \right) \right) \tag{a2}$$

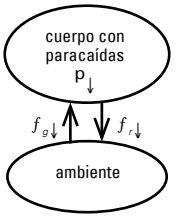
CC BY NC ND

29.0

UN PARACAIDISTA EN EL AIRE, OTRA VEZ (MOMENTA Y FUERZAS)

Otra vez, imaginemos un paracaidista que cae por el aire.

Fig. 1: Un paracaidista en el aire



Interesa predecir la evolución de la tasa de crecimiento de la aceleración de la caída.

Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\varphi(t)$ es la tasa de crecimiento de la aceleración del paracaidista, en [m s^{-3}] hacia abajo:

$$\varphi\left(t\right)=\frac{da\left(t\right)}{dt} \tag{1}$$

$a(t)$ es la aceleración del paracaidista, en [m s^{-2}] hacia abajo:

$$a\left(t\right)=\frac{dv\left(t\right)}{dt} \tag{2}$$

$v(t)$ es la velocidad del paracaidista, en [m s^{-1}] hacia abajo:

$$v\left(t\right)=\frac{p\left(t\right)}{m} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum en el paracaidista, en [N s] hacia abajo; *m* es la masa en el paracaidista, en [kg]:

$$p\left(t\right)=p\left(0\right)+\int_{0}^{t}\left(\left(+f_g\right)-\left(+f_r\left(\tau\right)\right)\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$$m=100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

CC BY NC ND

p(0) es el momentum inicialmente, en [N s] hacia abajo; f_g es la fuerza de la Tierra al paracaidista por gravitación, en [N] hacia abajo; $f_r(t)$ es la fuerza del paracaidista al aire por roce, en [N] hacia abajo:

$$p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f_g = m \cdot g \tag{7}$$

$$f_r\left(t\right) = \left(D_1 + D_2 \cdot \left|v\left(t\right)\right|\right) \cdot v\left(t\right) \tag{8}$$ [20]

g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; D_1 es un coeficiente de roce, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce, en [N m^{-2} s^2]:

$$g = 9.8 \tag{9}$$

$$D_1 = 40 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$D_2 = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

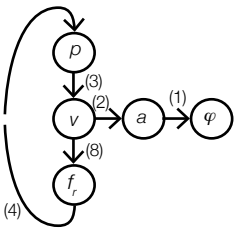


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (5), (6), (7), (9), (10) y (11) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3), (4) y (8), contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^5 (=32) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(11).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(4) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 32 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(11), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^4$ (=16).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 16 sistemas de ecuaciones restantes, 15 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(11).

[20] Estamos ignorando las viscosidades y el número de Reynolds del caso anterior, como hicimos en el anterior al anterior. Con ello, perdemos precisión conscientemente; pero no prohibimos las turbulencias.

CC BY NC ND

Si nos interesa la evolución de *v*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (4) y las derivaciones en (1) y (2); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *p* inicial, *v* previa, *a* previa, *m, g,* D_1, D_2, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(11) como:

$m = \ldots$ (5′)

$g = \ldots$ (9′)

$D_1 = \ldots$ (10′)

$D_2 = \ldots$ (11′)

$p_0 = \ldots$ (6′)

$v_{-1} = \ldots$ (-)

$a_{-1} = \ldots$ (-)

$$f_g = m \cdot g \quad (7')$$

$$v_k = \frac{p_k}{m} \quad (3')$$

$$a_k = \frac{v_k - v_{k-1}}{dt} \quad (2')$$

$$\varphi_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{dt} \quad (1')$$

$$f_{r,k} = \left(D_1 + D_2 \cdot \left|v_k\right|\right) \cdot v_k \quad (8')$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(f_g - f_{r,k}\right) \cdot dt \quad (4')$$

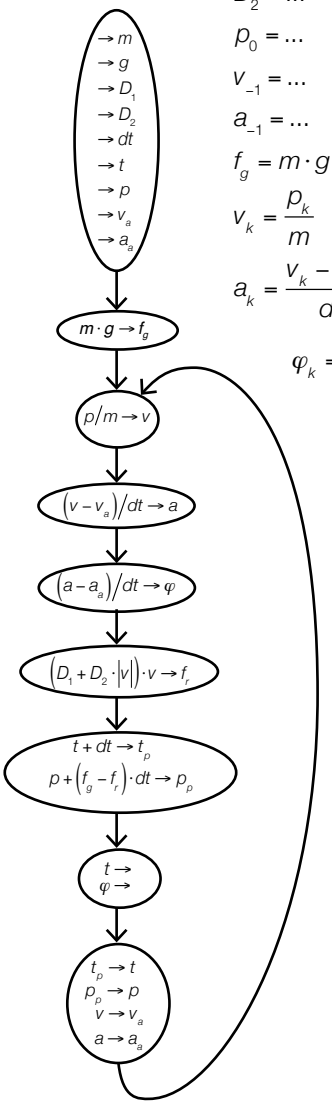


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5. Ella muestra predicciones tempranas para las evoluciones de φ, *a* y *v*, en el lado izquierdo, y predicciones tardías, en el lado derecho. Es bastante fácil sospechar que las predicciones tempranas son engañosas por la aproximación de Euler. Y también es bastante fácil verificar tal sospecha haciendo otros gráficos con *dt* menor.

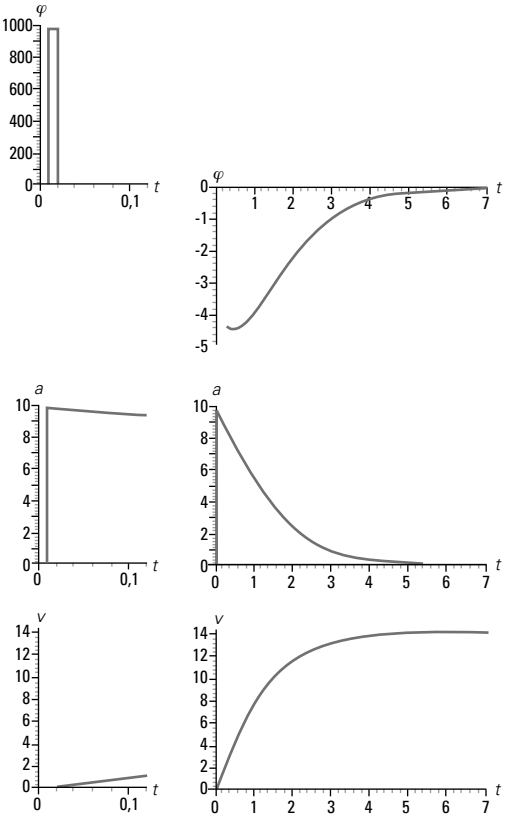


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para el momentum con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8) y (3):

$$\frac{dp(t)}{dt} = m \cdot g - \left(D_1 + D_2 \cdot \left| \frac{p(t)}{m} \right| \right) \cdot \frac{p(t)}{m} \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución de la tasa de crecimiento de la aceleración de la caída, aceptando (a1) y considerando (1), (2) y (3):

$$\varphi(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 p(t)}{dt^2} \qquad \text{(a2)}$$

BY NC ND

30.0

DOS CUERPOS, UN RESORTE Y UN SUELO SECO (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos dos cuerpos unidos por un resorte y puestos sobre un suelo seco, horizontal y quieto.

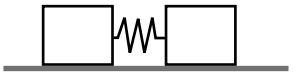


Fig. 1: Dos cuerpos, un resorte y un suelo seco

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de ambos cuerpos, suponiendo despreciables el roce del aire y la masa del resorte.

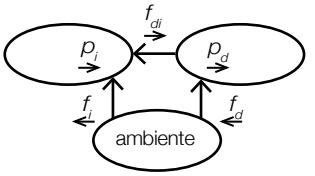


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x_i(t)$ es la posición del cuerpo izquierdo, en [m] hacia la derecha de una referencia; $x_d(t)$ es la del cuerpo derecho, en [m] hacia la derecha de la referencia:

$$x_i\left(t\right) = x_i\left(0\right) + \int_0^t v_i\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{1}$$

$$x_d\left(t\right) = x_d\left(0\right) + \int_0^t v_d\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

$x_i(0)$ es la posición del cuerpo izquierdo inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_i(t)$ es la velocidad del cuerpo izquierdo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $x_d(0)$ es la posición del cuerpo derecho inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_d(t)$ es la velocidad del cuerpo derecho, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$x_i\left(0\right) = -1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$v_i\left(t\right) = \frac{p_i\left(t\right)}{m_i} \tag{4}$$

$$x_d\left(0\right) = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$v_d\left(t\right) = \frac{p_d\left(t\right)}{m_d} \tag{6}$$

CC BY NC ND

$p_i(t)$ es el momentum en el cuerpo izquierdo, en [N s] hacia la derecha; m_d es la masa en el cuerpo izquierdo, en [kg]; $p_d(t)$ es el momentum en el derecho, en [N s] hacia la derecha; m_d es la masa en el derecho, en [kg]:

$$p_i\left(t\right) = p_i\left(0\right) + \int_0^t \left(f_i\left(\tau\right) + f_{di}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$m_i = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{8}$$

$$p_d\left(t\right) = p_d\left(0\right) + \int_0^t \left(f_d\left(\tau\right) - f_{di}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{9}$$ [21]

$$m_d = 2 \text{ (por ejemplo)} \tag{10}$$

$p_i(0)$ es el momentum en el cuerpo izquierdo inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f_i(t)$ es la fuerza del suelo al cuerpo izquierdo por roce seco, en [N] hacia la derecha; $f_{di}(t)$ es la fuerza del cuerpo derecho al izquierdo por la elasticidad del resorte, en [N] hacia la derecha; $p_d(0)$ es el momentum en el cuerpo derecho inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f_d(t)$ es la fuerza del suelo al cuerpo derecho por roce seco, en [N] hacia la derecha:

$$p_i\left(0\right) = 0 \text{ (por ejemplo)} \tag{11}$$

$$f_i\left(t\right) = -D_{0,i} \cdot e^{-\frac{\left|v_i\left(t\right)\right|}{V_{i1}}} \cdot \operatorname{sgn}\left(v_i\left(t\right)\right) - \left(D_{1,i} + D_{2,i} \cdot \left|v_i\left(t\right)\right|\right) \cdot v_i\left(t\right) \tag{12}$$ [22]

$$f_{di}\left(t\right) = K \cdot \left(\left|x_d\left(t\right) - x_i\left(t\right)\right| - L\right) \tag{13}$$

$$p_d\left(0\right) = 0 \text{ (por ejemplo)} \tag{14}$$

$$f_d\left(t\right) = -D_{0,d} \cdot e^{-\frac{\left|v_d\left(t\right)\right|}{V_d}} \cdot \operatorname{sgn}\left(v_d\left(t\right)\right) - \left(D_{1,d} + D_{2,d} \cdot \left|v_d\left(t\right)\right|\right) \cdot v_d\left(t\right) \tag{15}$$

$D_{0,i}$ es un coeficiente del roce seco entre el cuerpo izquierdo y el suelo, en [N]; V_i es otro coeficiente de ese roce, en [m s^{-1}]; $D_{1,i}$ es otro, en [N m^{-1} s]; $D_{2,i}$ es otro, en [N m^{-2} s^2]; K es el coeficiente de elasticidad del resorte, en [N m^{-1}]; L es la longitud del resorte estando relajado, en [m]; $D_{0,d}$ es un coeficiente del roce seco entre el cuerpo derecho y el suelo, en [N]; V_d es otro coeficente de ese roce, en [m s^{-1}]; $D_{1,d}$ es otro, en [N m^{-1} s]; $D_{2,d}$ es otro, en [N m^{-2} s^2]:

$$D_{0,i} = 10 \text{ (por ejemplo)} \tag{16}$$

$$V_i = 1.5 \text{ (por ejemplo)} \tag{17}$$

$$D_{1,i} = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{18}$$

[21] Aquí hay algo notable: la orientación de todos los momenta, incluyendo los de las fuerzas, hacia un mismo lado en principio, permite aclarar las ecuaciones. Esta moraleja, a la que no seremos siempre fieles, es un cimiento de la notación vectorial.

[22] Adaptación de la aproximación de Richard Stribeck (1861-1950). Aquí, sgn es la función signo tal que sgn(x)=-1 si x<0, sgn(x)=0 si x=0, y sgn(x)=+1 si 0<x. Eso anula a f_i cuando v_i=0, lo cual merecería una enmienda pues entonces la fuerza de roce puede acomodarse entre $-D_{0,i}$ y $D_{0,i}$, inclusive.

CC BY NC ND

$$D_{2,i} = 0.1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$K = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$L = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$D_{0,d} = 20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$V_d = 1.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$D_{1,d} = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$D_{2,d} = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

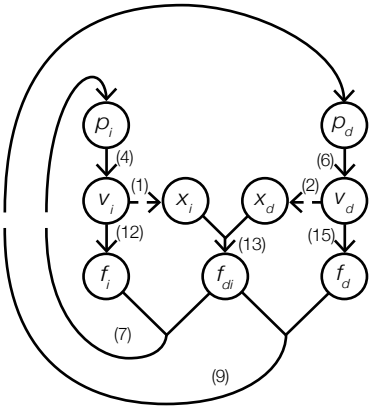


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (8), (10), (11), (14), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24) y (25) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3), (6), (12) y (15) contienen 2 cada una; (7), (8) y (13), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 9 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^3$ (=1728) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(25).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(7) y (9) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en ellas se reducen a los que están planteados y, de los 1728 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(25), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^6 \cdot 3^1$ (=192).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 192 sistemas de ecuaciones restantes, 191 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(25).

Si nos interesan las evoluciones de x_i y x_d, si queremos hacer predicciones usan-

BY NC ND

do la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x_i inicial, x_d inicial, p_i inicial, p_d inicial, m_i, m_d, $D_{0,i}$, $D_{0,d}$, $D_{1,i}$, $D_{1,d}$, $D_{2,i}$, $D_{2,d}$, V_i, V_d, K, L_0, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(25) como:

$m_i = \ldots$ (8′)

$m_d = \ldots$ (10′)

$D_{0,i} = \ldots$ (16′)

$D_{0,d} = \ldots$ (22′)

$D_{1,i} = \ldots$ (18′)

$D_{1,d} = \ldots$ (24′)

$D_{2,i} = \ldots$ (19′)

$D_{2,d} = \ldots$ (25′)

$V_i = \ldots$ (17′)

$V_d = \ldots$ (23′)

$K = \ldots$ (20′)

$L = \ldots$ (21′)

$x_{i,0} = \ldots$ (3′)

$x_{d,0} = \ldots$ (5′)

$p_{i,0} = \ldots$ (11′)

$p_{d,0} = \ldots$ (14′)

$$v_{i,k} = \frac{p_{i,k}}{m_i} \quad (4')$$

$$v_{d,k} = \frac{p_{d,k}}{m_d} \quad (6')$$

$$f_{i,k} = -D_{0,i} \cdot e^{-\frac{|v_{i,k}|}{V_i}} \cdot \operatorname{sgn}\left(v_{i,k}\right) - \left(D_{1,i} + D_{2,i} \cdot \left|v_{i,k}\right|\right) \cdot v_{i,k} \quad (12')$$

$$f_{d,k} = -D_{0,d} \cdot e^{-\frac{|v_{d,k}|}{V_d}} \cdot \operatorname{sgn}\left(v_{d,k}\right) - \left(D_{1,d} + D_{2,d} \cdot \left|v_{d,k}\right|\right) \cdot v_{d,k} \quad (15')$$

$$f_{di,k} = K \cdot \left(\left|x_{d,k} - x_{i,k}\right| - L\right) \quad (13')$$

$$x_{i,k+1} = x_{i,k} + v_{i,k} \cdot dt \quad (1')$$

$$x_{d,k+1} = x_{d,k} + v_{d,k} \cdot dt \quad (2')$$

$$p_{i,k+1} = p_{i,k} + \left(f_{i,k} + f_{di,k}\right) \cdot dt \quad (7')$$

$$p_{d,k+1} = p_{d,k} + \left(f_{d,k} - f_{di,k}\right) \cdot dt \quad (9')$$

CC BY NC ND

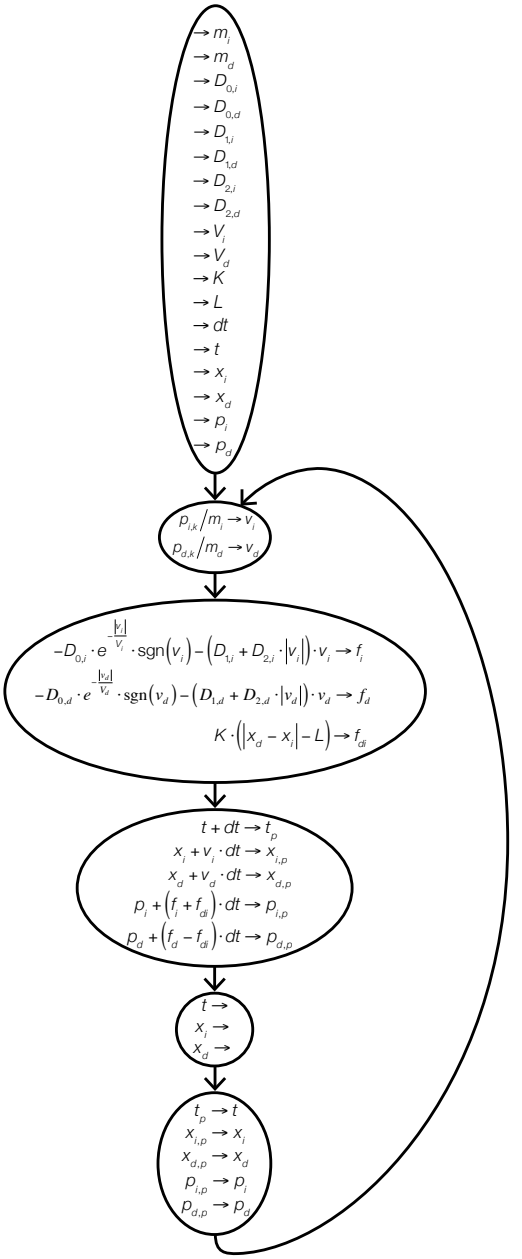


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, dt=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5. En ella resulta $x_d(2.5)$-$x_i(2.5)$=0.832<1=L_0, lo cual indica que, estacionariamente, el resorte queda encogido pero sin fuerza suficiente para estirarse venciendo a las del roce seco estático.

BY NC ND

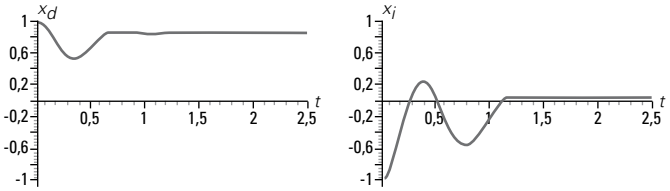


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (7) y (9) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las distancias recorridas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (12), (13) y (4), derivando (9) e insertando (15), (13) y (6), derivando (1) e insertando (4), y derivando (2) e insertando (6):

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -D_{0,i} \cdot e^{-\frac{|p_i(t)|}{m_i \cdot V_{i1}}} \cdot \operatorname{sgn}\left(p_i(t)\right) - \left(\frac{D_{1,i}}{m_i} + \frac{D_{2,i}}{m_i^2} \cdot |p_i(t)|\right) \cdot p_i(t) + K \cdot \left(\left(x_d(t) - x_i(t)\right) - L_0\right) \tag{a1}$$

$$\frac{dp_d(t)}{dt} = -D_{0,d} \cdot e^{-\frac{|p_d(t)|}{m_d \cdot V_{d1}}} \cdot \operatorname{sgn}\left(p_d(t)\right) - \left(\frac{D_{1,d}}{m_d} + \frac{D_{2,d}}{m_d^2} \cdot |p_d(t)|\right) \cdot p_d(t) - K \cdot \left(\left(x_d(t) - x_i(t)\right) - L_0\right) \tag{a2}$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{p_i(t)}{m_i} \tag{a3}$$

$$\frac{dx_d(t)}{dt} = \frac{p_d(t)}{m_d} \tag{a4}$$

BY NC ND

31.0

UNA MOTO (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos una moto cuya suspensión consta de resortes y amortiguadores, complementados por los neumáticos de las ruedas, como es habitual.

Fig. 1: Una moto

Interesa predecir la evolución de la velocidad vertical del asiento, ignorando la del tren delantero, cuando la moto viaja por un camino.

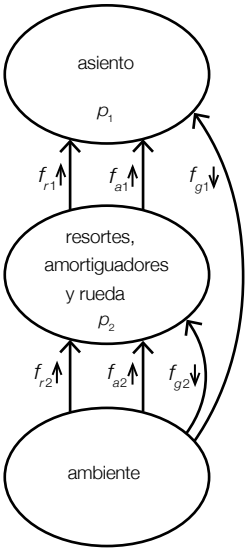


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].
$v_1(t)$ es la velocidad vertical del asiento, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$v_1(t) = \frac{p_1(t)}{m_1} \tag{1}$$

CC BY NC ND

$p_1(t)$ es el momentum vertical en el asiento, en [N s] hacia arriba; m_1 es la masa en el asiento, en [kg]:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(\left(+f_{r1}(\tau) \right) + \left(+f_{a1}(\tau) \right) + \left(-f_{g1} \right) \right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$m_1 = 120 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (3)$$

$p_1(0)$ es el momentum en el asiento inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_{r1}(t)$ es la fuerza del eje de la rueda al asiento a través de los resortes, en [N] hacia arriba; $f_{a1}(t)$ es la fuerza del eje al asiento a través de los amortiguadores, en [N] hacia arriba; f_{g1} es la fuerza de la Tierra al asiento por la gravitación, en [N] hacia abajo:

$$p_1(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$$f_{r1}(t) = K_1 \cdot \left(x_2(t) - x_1(t) + X_1 \right) \quad (5)$$

$$f_{a1}(t) = D_1 \cdot \left(v_2(t) - v_1(t) \right) \quad (6)$$

$$f_{g1} = m_1 \cdot g \quad (7)$$

K_1 es el coeficiente de elasticidad de los resortes, en [N m^{-1}]; $x_2(t)$ es la posición vertical del eje de la rueda, en [m] sobre el nivel del mar; $x_1(t)$ es la del asiento, en [m] sobre el nivel del mar; X_1 es la distancia entre el eje y el asiento con que los resortes estarían relajados, en [m]; D_1 es el coeficiente de roce de los amortiguadores, en [N m^{-1} s]; $v_2(t)$ es la velocidad vertical del eje, en [m s^{-1}] hacia arriba; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$$K_1 = 4000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t v_2(\tau) \cdot d\tau \quad (9)$$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t v_1(\tau) \cdot d\tau \quad (10)$$

$$X_1 = 0.70 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$

$$D_1 = 15 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

$$v_2(t) = \frac{p_2(t)}{m_2} \quad (13)$$

$$g = 9.8 \quad (14)$$

$x_2(0)$ es la posición del eje de la rueda inicialmente, en [m] sobre el nivel del mar; $x_1(0)$ es la del asiento inicialmente, en [m] sobre el nivel del mar; $p_2(t)$ es el momentum en el conjunto de resortes, amortiguadores y rueda, en [N s] hacia arriba; m_2 es la masa en ese conjunto, en [kg]:

$$x_2(0) = 0.2834 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$x_1(0) = 0.6894 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (16)$$

CC BY NC ND

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(\left(+f_{r2}(\tau) \right) + \left(+f_{a2}(\tau) \right) + \left(-f_{g2} \right) - \left(+f_{r1}(\tau) \right) - \left(+f_{a1}(\tau) \right) \right) \cdot d\tau \quad (17)$$

$$m_2 = 16 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (18)$$

$p_2(0)$ es el momentum en el conjunto de resortes, amortiguadores y rueda inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_{r2}(t)$ es la fuerza del camino al conjunto por la elasticidad del neumático, en [N] hacia arriba; $f_{a2}(t)$ es la fuerza del camino al conjunto por el roce interno del neumático, en [N] hacia arriba; $f_{g2}(t)$ es la fuerza de la Tierra al conjunto por la gravitación, en [N] hacia abajo:

$$p_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (19)$$

$$f_{r2}(t) = K_2 \cdot \left(x_3(t) - x_2(t) + X_2 \right) \quad (20)$$

$$f_{a2}(t) = D_2 \cdot \left(v_3(t) - v_2(t) \right) \quad (21)$$

$$f_{g2} = m_2 \cdot g \quad (22)$$

K_2 es el coeficiente de elasticidad del neumático, en [N m^{-1}]; $x_3(t)$ es el nivel del camino, en [m] sobre el del mar; X_2 es la distancia entre el camino y la llanta con que el neumático estaría relajado (sin contar las telas), en [m]; D_2 es el coeficiente de roce interno del neumático, en [N m^{-1} s]; $v_3(t)$ es la velocidad vertical del camino, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$K_2 = 20000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (23)$$

$$x_3(t) = x_3(0) + \int_0^t v_3(\tau) \cdot d\tau \quad (24)$$

$$X_2 = 0.35 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (25)$$

$$D_2 = 750 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (26)$$

$$v_3(t) = 0.1 \cdot \sin(0.314 \cdot t) + \sin(31.4 \cdot t) \quad \text{(por ejemplo)} \quad (27)$$

$x_3(0)$ es el nivel del camino inicialmente, en [m] sobre el del mar:

$$x_3(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (28)$$

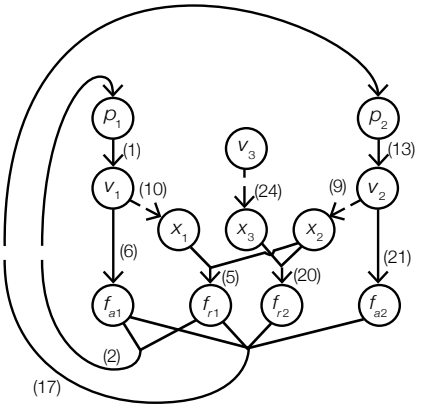


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (7), (8), (11), (12), (14), (15), (16), (18), (19), (22), (23), (25), (26) y (28) no contienen ninguna variable que evoluciona: (27) contiene 1; (1), (9), (10), (13) y (24), contienen 2 cada una; (2), (5), (6), (20) y (21), 3; (17), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^1$ (=38880) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(28).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(2) y (17) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en (2) se reducen al que está planteado y los 5 despejes imaginables en (17) se reducen al que está planteado; así, de los 38880 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(28), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^5 \cdot 3^4$ (=2592).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 2592 sistemas de ecuaciones restantes, 2591 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(28).

Si nos interesa la evolución de v_1; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (9), (10), (17) y (24); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x_1 inicial, x_2 inicial, x_3 inicial, p_1 inicial, p_2 inicial, v_3, m_1, m_2, K_1, K_2, X_1, X_2, D_1, D_2, g, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(28) como:

$m_1 = \ldots$ (3′)

$m_2 = \ldots$ (18′)

$K_1 = \ldots$ (8′)

$K_2 = \ldots$ (23′)

$X_1 = \ldots$ (11′)

$X_2 = \ldots$ (25′)

$D_1 = \ldots$ (12′)

$D_2 = \ldots$ (26′)

$x_{1,0} = \ldots$ (16′)

$\boldsymbol{x}_{2,0} = \ldots$ (15′)

$x_{3,0} = \ldots$ (28′)

$p_{1,0} = \ldots$ (4′)

$p_{2,0} = \ldots$ (19′)

$g = 9.8$ (14′)

$f_{g1} = m_1 \cdot g$ (7′)

CC BY NC ND

$$f_{g2} = m_2 \cdot g \tag{22'}$$

$$v_{3,k} = \ldots \tag{27'}$$

$$v_{1,k} = \frac{p_{1,k}}{m_1} \tag{1'}$$

$$v_{2,k} = \frac{p_{2,k}}{m_2} \tag{13'}$$

$$f_{r1,k} = K_1 \cdot \left(x_{2,k} - x_{1,k} + X_1 \right) \tag{5'}$$

$$f_{r2,k} = K_2 \cdot \left(x_{3,k} - x_{2,k} + X_2 \right) \tag{20'}$$

$$f_{a1,k} = D_1 \cdot \left(v_{2,k} - v_{1,k} \right) \tag{6'}$$

$$f_{a2,k} = D_2 \cdot \left(v_{3,k} - v_{2,k} \right) \tag{21'}$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + v_{1,k} \cdot dt \tag{10'}$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + v_{2,k} \cdot dt \tag{9'}$$

$$x_{3,k+1} = x_{3,k} + v_{3,k} \cdot dt \tag{24'}$$

$$p_{1,k+1} = p_{1,k} + \left(f_{r1,k} + f_{a1,k} - f_{g1} \right) \cdot d\tau \tag{2'}$$

$$p_{2,k+1} = p_{2,k} + \left(f_{r2,k} + f_{a2,k} - f_{g2} - f_{r1,k} - f_{a1,k} \right) \cdot dt \tag{17'}$$

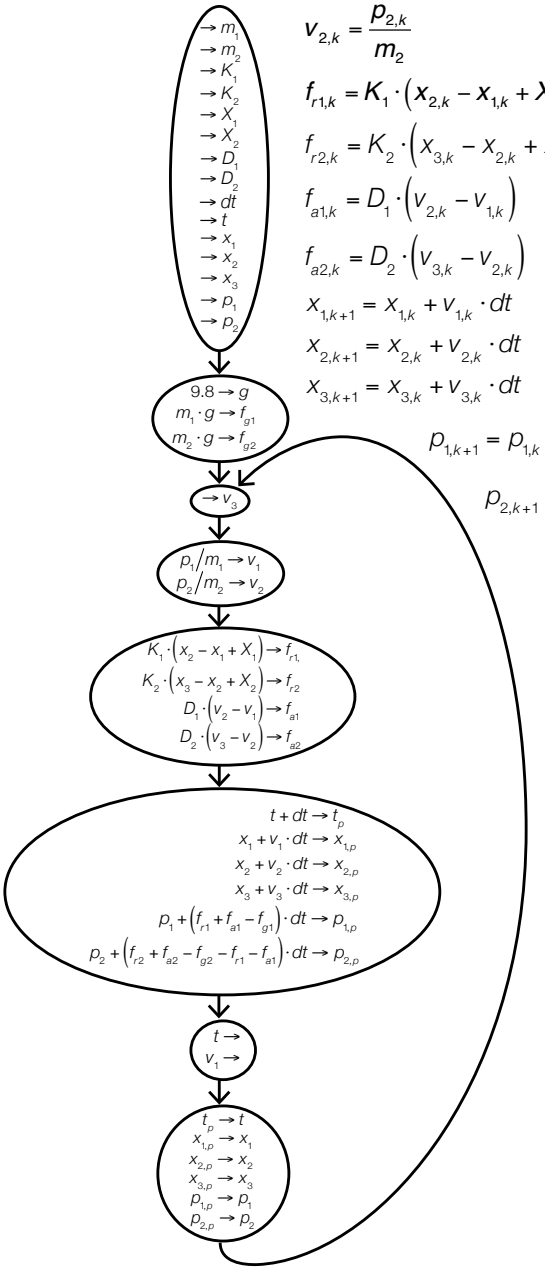


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

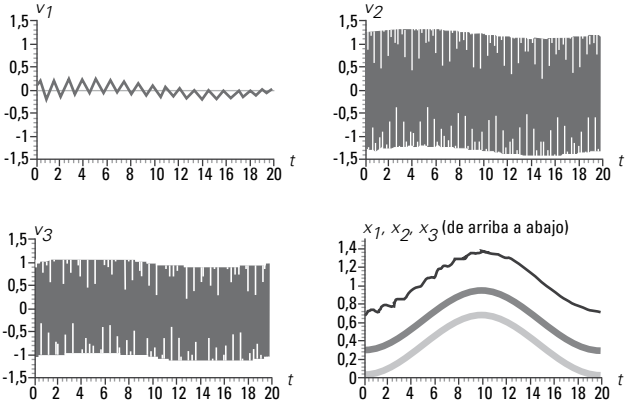


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), (17), (10), (9) y (24) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las posiciones con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (5), (6), (7) y (1), derivando (17) e insertando (20), (21), (22), (5), (6), (7), (13) y (1), derivando (10) e insertando (1), derivando (9) e insertando (13), y derivando (24):

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\frac{D_1}{m_1}\cdot p_1(t) + \frac{D_1}{m_2}\cdot p_2(t) - K_1\cdot x_1(t) + K_1\cdot x_2(t) + \left(K_1\cdot X_1 - m_1\cdot g\right) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \frac{D_1}{m_1}\cdot p_1(t) - \frac{D_1+D_2}{m_2}\cdot p_2(t) + K_1\cdot x_1(t) - \left(K_1+K_2\right)\cdot x_2(t) + K_3\cdot x_3(t) + D_2\cdot v_3(t) + \left(K_2\cdot X_2 - m_2\cdot g - K_1\cdot X_1\right) \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{m_1}\cdot p_1(t) \qquad \text{(a3)}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{m_2}\cdot p_2(t) \qquad \text{(a4)}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = v_3(t) \qquad \text{(a5)}$$

Si nos interesa la evolución de la velocidad vertical del asiento de la moto, aceptando (a1)-(a5), y considerando (1):

$$v_1(t) = \frac{p_1(t)}{m_1} \qquad \text{(a6)}$$

CC BY NC ND

32.0

UNA CASA Y UN TEMBLOR (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un eje vertical suspendido en reposo, y una casa de dos pisos originalmente concéntricos con el eje.

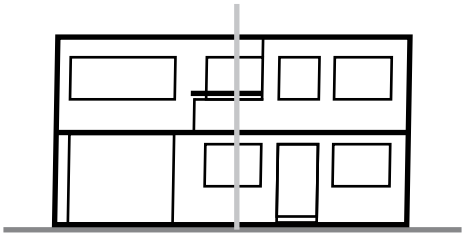


Fig.1: Una casa

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones laterales de los centros de los pisos cuando hay un temblor.

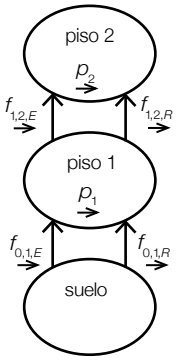


Fig.2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x_0(t)$ es la posición del centro del suelo, en [m] hacia la derecha del eje vertical; $x_1(t)$ es la del centro del primer piso, en [m] hacia la derecha del eje; $x_2(t)$ es la del segundo piso, en [m] hacia la derecha del eje:

$$x_0(t) = x_0(0) + \int_0^t v_0(\tau) \cdot d\tau \tag{1}$$

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t v_1(\tau) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t v_2(\tau) \cdot d\tau \tag{3}$$

$x_0(0)$ es la posición del centro del suelo inicialmente, en [m] hacia la derecha del eje; $v_0(t)$ es la velocidad del suelo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $x_1(0)$ es la posición del centro del primer piso inicialmente, en [m] hacia la derecha del eje; $v_1(t)$ es la velocidad del primer piso, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $x_2(0)$ es la posición del centro

BY NC ND

del segundo piso inicialmente, en [m] hacia la derecha del eje; $v_2(t)$ es la velocidad del segundo piso, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$x_0(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$v_0(t) = \cos\left(\pi \cdot (t - 2.5)\right) \cdot \left(e^{-t/4.5} - e^{-t/4}\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$v_1(t) = \frac{p_1(t)}{m_1} \tag{7}$$

$$x_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$v_2(t) = \frac{p_2(t)}{m_2} \tag{9}$$

$p_1(t)$ es el momentum en el primer piso, en [N s] hacia la derecha; m_1 es la masa en el primer piso, en [kg]; $p_2(t)$ es el momentum en el segundo piso, en [N s] hacia la derecha; m_2 es la masa en el segundo piso, en [kg]:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(f_{0,1,E}(\tau) - f_{1,2,E}(\tau) + f_{0,1,R}(\tau) - f_{1,2,R}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m_1 = 5000 \tag{11}$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(f_{1,2,E}(\tau) + f_{1,2,R}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$ [23]

$$m_2 = 5000 \tag{13}$$

$p_1(0)$ es el momentum en el primer piso inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f_{0,1,E}(t)$ es la fuerza del suelo al primer piso por la elasticidad de la casa, en [N] hacia la derecha; $f_{1,2,E}(t)$ es la fuerza del primer piso al segundo por la elasticidad de la casa, en [N] hacia la derecha; $f_{0,1,R}(t)$ es la fuerza del suelo al primer piso por el roce interno de la casa, en [N] hacia la derecha; $f_{1,2,R}(t)$ es la fuerza del primer piso al segundo por el roce interno de la casa, en [N] hacia la derecha; $p_2(0)$ es el momentum en el segundo piso inicialmente, en [N s] hacia la derecha:

$$p_1(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$f_{0,1,E}(t) = K_{0,1} \cdot \left(x_0(t) - x_1(t)\right) \tag{15}$$

$$f_{1,2,E}(t) = K_{1,2} \cdot \left(x_1(t) - x_2(t)\right) \tag{16}$$

$$f_{0,1,R}(t) = D_{0,1} \cdot \left(v_0(t) - v_1(t)\right) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{f}_{1,2,R}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{D}_{1,2} \cdot \left(\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{t})\right) \tag{18}$$

$$p_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

[23] Otra vez: la orientación de todos los momenta, incluyendo los de las fuerzas, hacia un mismo lado en principio, permite aclarar las ecuaciones.

CC BY NC ND

$K_{0,1}$ es el coeficiente de elasticidad entre el suelo y el primer piso, en [N m^{-1}]; $K_{1,2}$ es el coeficiente de elasticidad entre el primer piso y el segundo, en [N m^{-1}]; $D_{0,1}$ es el coeficiente de roce entre el suelo y el primer piso, en [N m^{-1} s]; $D_{1,2}$ es el coeficiente de roce entre el primer piso y el segundo, en [N m^{-1} s]:

$$K_{0,1} = 20000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_{1,2} = 15000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$D_{0,1} = 900 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$D_{1,2} = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

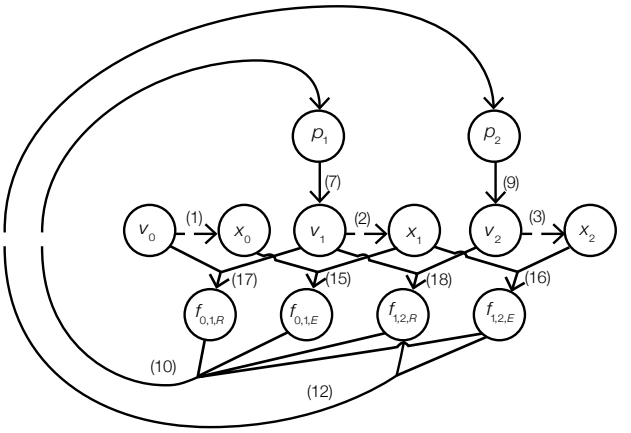


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (11), (13), (14), (19), (20), (21), (22) y (23) no contienen ninguna variable que evoluciona: (5) contiene 1; (1), (2), (3), (7) y (9) contienen 2 cada una; (12), (15), (16), (17) y (18) contienen 3; (10), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^1$ (=19440) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(23).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(10) y (12) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 19440 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(23), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^5 \cdot 3^4$ (=1296).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1296 sistemas de ecuaciones restantes, 1295 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(23).

BY NC ND

Si nos interesan las evoluciones de x_0, x_1 y x_2; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (10) y (12); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x_o inicial, x_1 inicial, x_2 inicial, p_1 inicial, p_2 inicial, v_0, m_1, m_2, $K_{0,1}$, $K_{1,2}$, D_{01}, D_{12}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(23) como:

$$m_1 = \ldots \quad (11')$$

$$m_2 = \ldots \quad (13')$$

$$K_{0,1} = \ldots \quad (20')$$

$$K_{1,2} = \ldots \quad (21')$$

$$D_{0,1} = \ldots \quad (22')$$

$$D_{1,2} = \ldots \quad (23')$$

$$x_{0,0} = \ldots \quad (4')$$

$$x_{1,0} = \ldots \quad (6')$$

$$x_{2,0} = \ldots \quad (8')$$

$$p_{1,0} = \ldots \quad (14')$$

$$p_{2,0} = \ldots \quad (19')$$

$$v_{0,k} = \ldots \quad (5')$$

$$v_{1,k} = \frac{p_{1,k}}{m_1} \quad (7')$$

$$v_{2,k} = \frac{p_{2,k}}{m_2} \quad (9')$$

$$f_{0,1,E,k} = K_{0,1} \cdot \left(x_{0,k} - x_{1,k} \right) \quad (15')$$

$$f_{1,2,E,k} = K_{1,2} \cdot \left(x_{1,k} - x_{2,k} \right) \quad (16')$$

$$f_{0,1,R,k} = D_{0,1} \cdot \left(v_{0,k} - v_{1,k} \right) \quad (17')$$

$$f_{1,2,R,k} = D_{1,2} \cdot \left(v_{1,k} - v_{2,k} \right) \quad (18')$$

$$x_{0,k+1} = x_{0,k} + v_{0,k} \cdot dt \quad (1')$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + v_{1,k} \cdot dt \quad (2')$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + v_{2,k} \cdot dt \quad (3')$$

$$p_{1,k+1} = p_{1,k} + \left(f_{0,1,E,k} - f_{1,2,E,k} + f_{0,1,R,k} - f_{1,2,R,k} \right) \cdot dt \quad (10')$$

$$p_{2,k+1} = p_{2,k} + \left(f_{1,2,E,k} + f_{1,2,R,k} \right) \cdot dt \quad (12')$$

CC BY NC ND

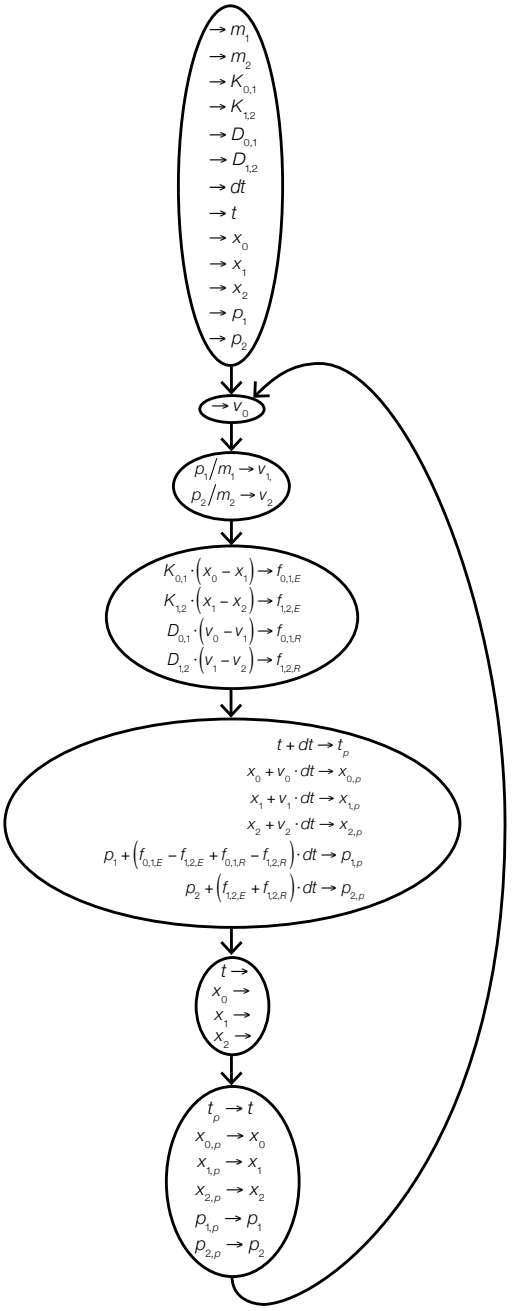


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

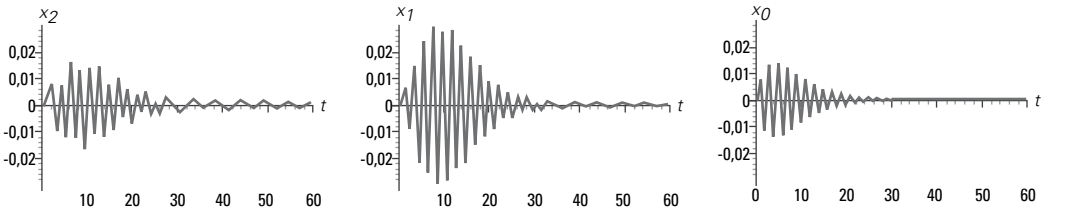


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (10), (12), (1), (2) y (3) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las posiciones con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (10) e insertando (15), (16), (17), (18), (7) y (9), derivando (12) e insertando (16), (18), (7) y (9), derivando (1), derivando (2) e insertando (7), y derivando (3) e insertando (9):

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = D_{0,1}\cdot v_0(t) - \left(\frac{D_{0,1}}{m_1} + \frac{D_{1,2}}{m_1}\right)\cdot p_1(t) + \frac{D_{1,2}}{m_2}\cdot p_2(t) + K_{0,1}\cdot x_0(t) - \left(K_{0,1} + K_{1,2}\right)\cdot x_1(t) + K_{1,2}\cdot x_2(t) \tag{a1}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \frac{D_{1,2}}{m_1}\cdot p_1(t) - \frac{D_{1,2}}{m_2}\cdot p_2(t) + K_{1,2}\cdot x_1(t) - K_{1,2}\cdot x_2(t) \tag{a2}$$

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = v_0(t) \tag{a3}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{m_1}\cdot p_1(t) \tag{a4}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{m_2}\cdot p_2(t) \tag{a5}$$

CC BY NC ND

33.0

UNA BALA EN EL AIRE (MOMENTA Y FUERZAS)

Arrojar cosas es una actividad humana tradicional.

Dispararlas por espanto y por furia, también.

Las balas son parte de esa tradición por lo menos desde hace medio milenio.

A fines del siglo 15, da Vinci hizo algunos esbozos de movimientos de balas en el aire.

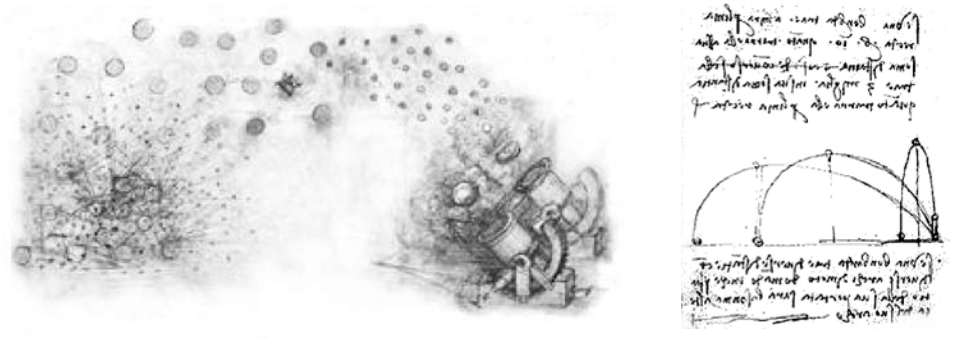


Fig. 1: Balas en el aire

Imaginemos una bala antigua y esférica en el aire.

Interesa predecir la evolución de la posición de esa bala, suponiendo que no hay vientos ni otras sorpresas.

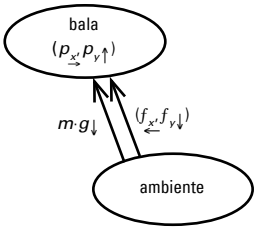


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x(t)$ es la posición horizontal de la bala, en [m] hacia la derecha de una referencia vertical; $y(t)$ es su posición vertical, en [m] hacia arriba del suelo (supuestamente horizontal):

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

CC BY NC ND

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(\tau) \cdot d\tau \quad (2)$$

$x(0)$ es la posición horizontal de la bala inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_x(t)$ es su velocidad horizontal, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $y(0)$ es su posición vertical inicialmente, en [m] hacia arriba del suelo; $v_y(t)$ es su velocidad vertical, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$x(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (3)$$

$$v_x(t) = \frac{p_x(t)}{m} \quad (4)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$v_y(t) = \frac{p_y(t)}{m} \quad (6)$$

$p_x(t)$ es el momentum horizontal en la bala, en [N s] hacia la derecha; m es la masa en la bala, en [kg]; $p_y(t)$ es el momentum vertical en la bala, en [N s] hacia arriba:

$$p_x(t) = p_x(0) + \int_0^t f_x(\tau) \cdot d\tau \quad (7)$$

$$m = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$p_y(t) = p_y(0) + \int_0^t \left(f_y(\tau) + (-m \cdot g)\right) \cdot d\tau \quad (9)$$

$p_x(0)$ es el momentum horizontal en la bala inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f_x(t)$ es la fuerza horizontal del ambiente a la bala por roce, en [N] hacia la derecha; $p_z(0)$ es el momentum vertical en la bala inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_y(t)$ es la fuerza vertical del ambiente a la bala por roce, en [N] hacia arriba; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$$p_x(0) = -2000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$f_x(t) = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}\right) \cdot v_x(t) \quad (11)$$

$$p_y(0) = 2000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

$$f_y(t) = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}\right) \cdot v_y(t) \quad (13)$$

$$g = 9.8 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

D_1 es un coeficiente de roce entre la bala y el aire, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce entre la bala y el aire, en [N m^{-2} s^2]:

$$D_1 = 0.1 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$D_2 = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (16)$$

CC BY NC ND

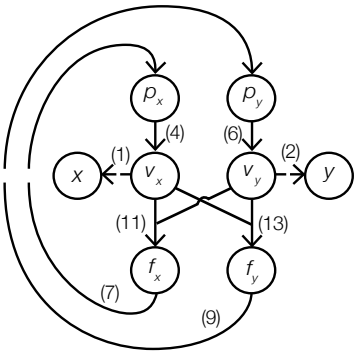


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (8), (10), (12), (14), (15) y (16) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (4), (6), (7) y (9), contienen 2 cada una; (11) y (13), 3 cada una; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, podemos plantear $2^6 \cdot 3^2$ (=576) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(16).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(7) y (9) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 576 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(16), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2$ (=144).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 144 sistemas de ecuaciones restantes, 143 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(16).

Si nos interesan las evoluciones de x e y; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x inicial, y inicial, p_x inicial, p_y inicial, m, g, D_1, D_2, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(16) como:

$m = \ldots$ (8')

$g = \ldots$ (14')

$D_1 = \ldots$ (15')

$D_2 = \ldots$ (16')

$x_0 = \ldots$ (3')

BY NC ND

$$y_0 = \ldots \tag{5'}$$

$$p_{x,0} = \ldots \tag{10'}$$

$$p_{y,0} = \ldots \tag{12'}$$

$$v_{x,k} = \frac{p_{x,k}}{m} \tag{4'}$$

$$v_{y,k} = \frac{p_{y,k}}{m} \tag{6'}$$

$$f_{x,k} = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{v_{x,k}^2 + v_{y,k}^2}\right) \cdot v_{x,k} \tag{11'}$$

$$f_{y,k} = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{v_{x,k}^2 + v_{y,k}^2}\right) \cdot v_{y,k} \tag{13'}$$

$$x_{k+1} = x_k + v_{x,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$y_{k+1} = y_k + v_{y,k} \cdot dt \tag{2'}$$

$$p_{x,k+1} = p_{x,k} + f_{x,k} \cdot dt \tag{7'}$$

$$p_{y,k+1} = p_{y,k} + f_{y,k} \cdot dt \tag{9'}$$

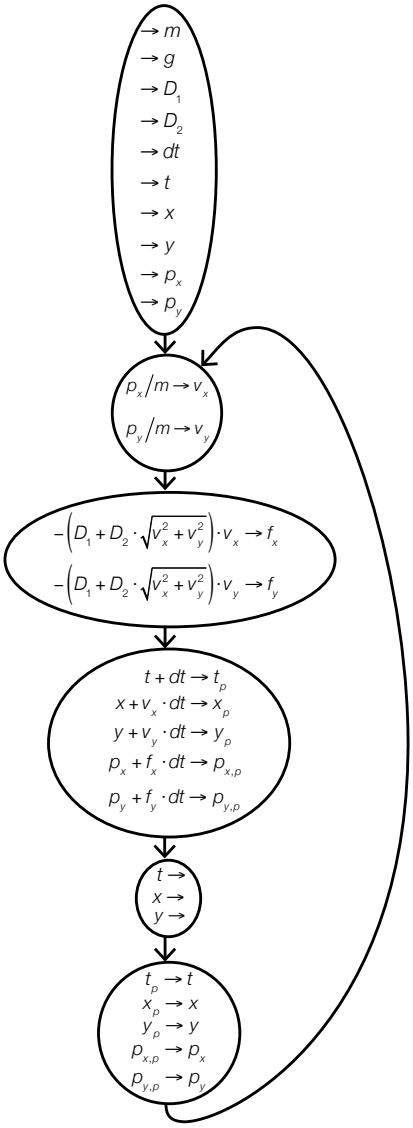


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

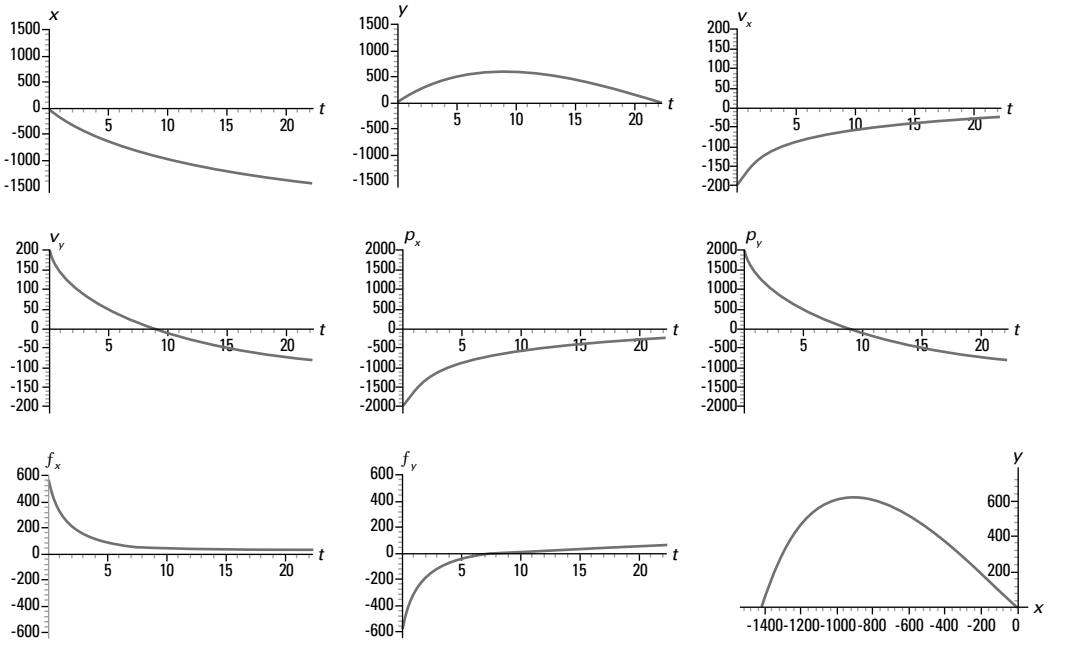


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7), (9), (1) y (2) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las distancias recorridas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (11), (4) y (6), derivando (9) e insertando (13), (4) y (6), derivando (1) e insertando (4), y derivando (2) e insertando (6):

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{p_x(t)}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y(t)}{m}\right)^2} \right) \cdot \frac{p_x(t)}{m} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = -\left(D_1 + D_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{p_x(t)}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y(t)}{m}\right)^2} \right) \cdot \frac{p_y(t)}{m} - m \cdot g \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p_x(t)}{m} \qquad \text{(a3)}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p_y(t)}{m} \qquad \text{(a4)}$$

CC BY NC ND

Apéndice acerca de la notación vectorial

La notación vectorial puede abreviar (1)-(16) según aparece enseguida.

$\vec{x}(t)$ es la posición vectorial de la bala, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde alguna referencia del plano de la figura 1:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau) \cdot d\tau$$

$\vec{x}(0)$ es la posición vectorial de la bala inicialmente, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde la referencia; $\vec{v}(t)$ es su velocidad vectorial, en [m s^{-1}] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector:

$\vec{x}(0) = (0,\ 0,\ 0)$ (por ejemplo)

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{m}$$

$\vec{p}(t)$ es el momentum vectorial en la bala, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; m es la masa en la bala, en [kg]:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) + \int_0^t \left(\vec{f}(\tau) + (0,\ -m \cdot g,\ 0)\right) \cdot d\tau$$

$m = 10$ (por ejemplo)

$\vec{p}(0)$ es el momentum vectorial inicialmente, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; $\vec{f}(t)$ es la fuerza vectorial del ambiente a la bala, por roce, en [N] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$\vec{p}(0) = (-2000,\ 2000,\ 0)$ (por ejemplo)

$$\vec{f}(t) = -\left(D_1 + D_2 \cdot \left|\vec{v}(t)\right|\right) \cdot \vec{v}(t)$$

$g = 9.8$

D_1 es un coeficiente de roce entre la bala y el aire, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce entre la bala y el aire, en [N m^{-2} s^2]:

$D_1 = 0.1$ (por ejemplo)

$D_2 = 0.01$ (por ejemplo)

CC BY NC ND

34.0

EL SOL Y LA TIERRA EN CAÍDAS MUTUAS (MOMENTA Y FUERZAS)

A fines del siglo 17, Newton publicó su *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, que hemos parodiado y comentado tácitamente con anterioridad; mientras, Gottfried Leibniz (1646-1716) estudiaba la existencia y el uso de determinantes en la resolución de algunos sistemas de ecuaciones simultáneas, lo cual contribuyó a la teoría matricial fundada por Arthur Cayley (1821-1885) durante el siglo 19, asentando la notación vectorial.

Considerando esa teoría y esa notación (para abreviar), imaginemos el Sol y la Tierra detenidos por un instante y dejados en libertad para caer mutuamente.

Fig.1: El Sol y la Tierra en caídas mutuas

Interesa predecir la evolución de la distancia entre ambos cuerpos celestes.

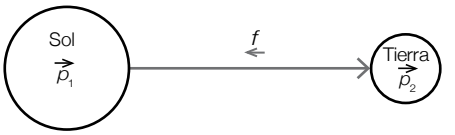


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\vec{x}(t)$ es la distancia (vectorial) del Sol a la Tierra, en [m]:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) \tag{1}$$

$\vec{x}_2(t)$ es la posición (vectorial) de la Tierra, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde alguna referencia del plano de la figura 1; $\vec{x}_1(t)$ es la posición vectorial del Sol, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde la referencia:

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_2(0) + \int_0^t \vec{v}_2(\boldsymbol{\tau}) \cdot d\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_1(0) + \int_0^t \vec{v}_1(\boldsymbol{\tau}) \cdot d\boldsymbol{\tau} \tag{3}$$

$\vec{x}_2(0)$ es la posición (vectorial) de la Tierra inicialmente, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde la referencia; $\vec{v}_2(t)$ es la velocidad (vectorial) de

CC BY NC ND

la Tierra, en [m s^{-1}] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; $\vec{x}_1(0)$ es la posición (vectorial) del Sol inicialmente, en [m] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector, desde la referencia; $\vec{v}_1(t)$ es la velocidad (vectorial) del Sol, en [m s^{-1}] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector:

$$\vec{x}_2(0) = \left(+1.49 \cdot 10^{11}, 0, 0\right) \text{ (por ejemplo)} \tag{4}$$

$$\vec{v}_2(t) = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{5}$$

$$\vec{x}_1(0) = \left(-4.50 \cdot 10^{5}, 0, 0\right) \text{ (por ejemplo)} \tag{6}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{7}$$

$\vec{p}_2(t)$ es el momentum (vectorial) en la Tierra, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; m_2 es la masa en la Tierra, en [kg]; $\vec{p}_1(t)$ es el momentum (vectorial) en el Sol, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; m_1 es la masa en el Sol, en [kg]:

$$\vec{p}_2(t) = \vec{p}_2(0) + \int_0^t \vec{f}(\tau) \cdot d\tau \tag{8}$$

$$m_2 = 5.98 \cdot 10^{24} \tag{9}$$

$$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_1(0) - \int_0^t \vec{f}(\tau) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m_1 = 1.98 \cdot 10^{30} \tag{11}$$

$\vec{p}_2(0)$ es el momentum (vectorial) en la Tierra inicialmente, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; $\vec{f}(t)$ es la fuerza (vectorial) neta del Sol a la Tierra por gravitación, en [N] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector; $\vec{p}_1(0)$ es el momentum (vectorial) en el Sol inicialmente, en [N s] hacia la derecha, hacia arriba y hacia el lector:

$$\vec{p}_1(0) = (0,0,0) \text{ (por ejemplo)} \tag{12}$$

$$\vec{f}(t) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}(t)\right|^3} \cdot \vec{x}(t) \tag{13}$$ [24]

$$\vec{p}_1(0) = (0,0,0) \text{ (por ejemplo)} \tag{14}$$

G es la constante gravitacional, en [N m^2 kg^{-2}]:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \tag{15}$$

[24] Aproximación de Hooke y Newton

BY NC ND

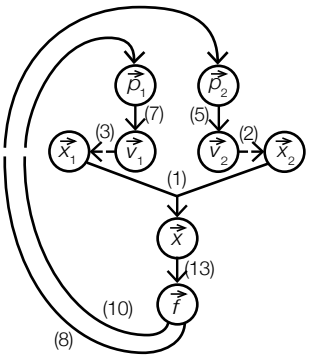


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (6), (9), (11), (12), (14) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (2), (3), (5), (7), (8), (10) y (13), contienen 2 cada una; (1), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^7 \cdot 3^1$ (=384) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(8) y (10) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 384 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^5 \cdot 3^1$ (=96).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 96 sistemas de ecuaciones restantes, 95 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesan las evoluciones de $\vec{x}$; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (3), (8) y (10); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $\vec{x}_1$ inicial, $\vec{x}_2$ inicial, $\vec{p}_1$ inicial, $\vec{p}_2$ inicial, m_1, m_2, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$$m_1 = \ldots \qquad (11')$$

$$m_2 = \ldots \qquad (9')$$

$$\vec{x}_{1,0} = \ldots \qquad (6')$$

$$\vec{x}_{2,0} = \ldots \qquad (4')$$

$$\vec{p}_{1,0} = \ldots \qquad (14')$$

BY NC ND

$$\vec{p}_{2,0} = \ldots \qquad (12')$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \qquad (15')$$

$$\vec{v}_{1,k} = \frac{\vec{p}_{1,k}}{m_1} \qquad (7')$$

$$\vec{v}_{2,k} = \frac{\vec{p}_{2,k}}{m_2} \qquad (5')$$

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k} \qquad (1')$$

$$\vec{f}_k = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_k\right|^3} \cdot \vec{x}_k \qquad (13')$$

$$\vec{x}_{1,k+1} = \vec{x}_{1,k} - \vec{v}_{1,k} \cdot dt \qquad (3')$$

$$\vec{x}_{2,k+1} = \vec{x}_{2,k} + \vec{v}_{2,k} \cdot dt \qquad (2')$$

$$\vec{p}_{1,k+1} = \vec{p}_{1,k} - \vec{f}_k \cdot dt \qquad (10')$$

$$\vec{p}_{2,k+1} = \vec{p}_{2,k} + \vec{f}_k \cdot dt \qquad (8')$$

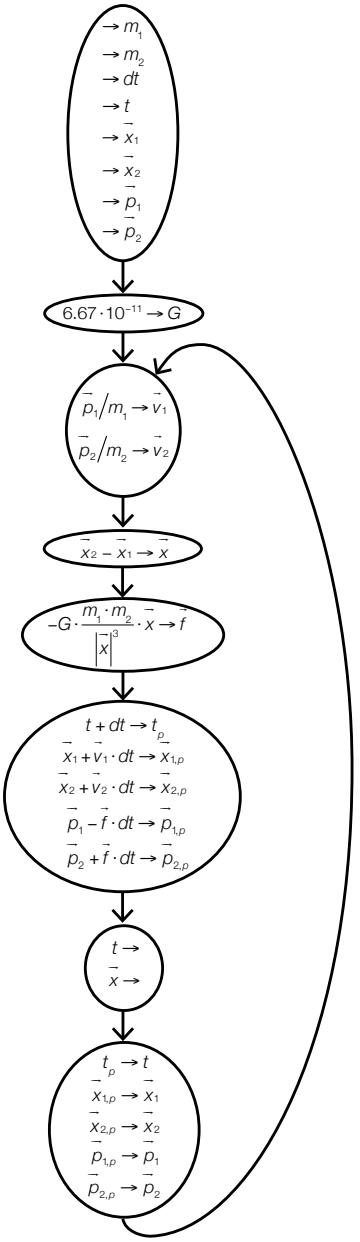


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=10000 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

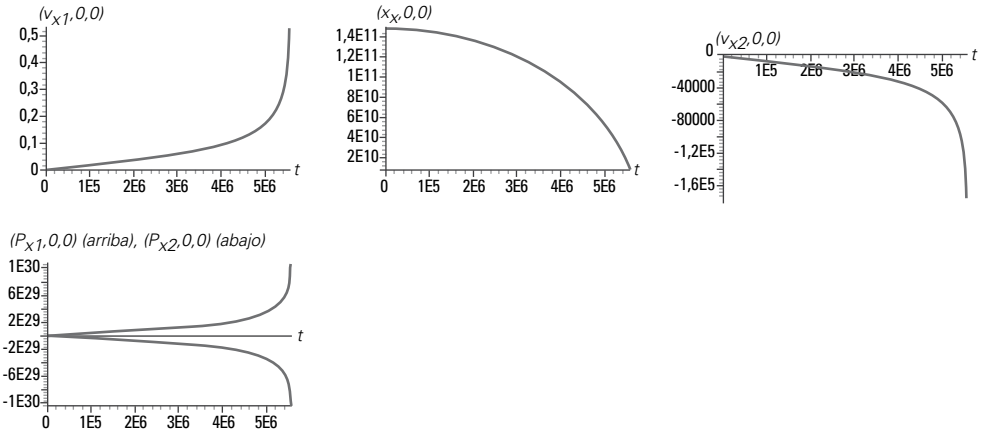


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (8), (10), (2) y (3) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las distancias recorridas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (8) e insertando (13) y (1), derivando (10) e insertando (13) y (1), derivando (2) e insertando (5), y derivando (3) e insertando (7):

$$\frac{d\vec{p}_1(t)}{dt} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \tag{a1}$$

$$\frac{d\vec{p}_2(t)}{dt} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \tag{a2}$$

$$\frac{d\vec{x}_1(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{a3}$$

$$\frac{d\vec{x}_2(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{a4}$$

Si nos interesa la evolución de la distancia entre los dos cuerpos celestes, aceptando (a1)-(a4), y considerando (1):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) \tag{a5}$$

Al respecto: restando (a3) a (a4), derivando, insertando (a2) y (a1), y usando (a5):

CC BY NC ND

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = -G \cdot \frac{m_1 + m_2}{\left|\vec{x}(t)\right|^3} \cdot \vec{x}(t)$$

Apéndice acerca de una resolución analítica

Si la caída mutua es en línea recta, podemos dejar de explicitar las direcciones dando por sentado que son todas en esa línea, y así podemos prescindir del planteamiento vectorial de las ecuaciones.

Prescindiendo de ese planteamiento en la última ecuación del apéndice anterior:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{x^2(t)}$$

$$\text{luego} \quad \frac{d^2\left(\frac{x(t)}{\sqrt[3]{G \cdot (m_1 + m_2)}}\right)}{dt^2} = -\frac{1}{\left(\frac{x(t)}{\sqrt[3]{G \cdot (m_1 + m_2)}}\right)^2}$$

$$\text{luego} \quad \frac{d^2x_*(t)}{dt^2} = -\frac{1}{x_*^2(t)} \quad \text{donde} \quad x_*(t) = \frac{x(t)}{\sqrt[3]{G \cdot (m_1 + m_2)}}$$

Para resolver esto analíticamente, podemos intentar lo siguiente:

$$d\frac{dx_*(t)}{dt} = -\frac{1}{x_*^2(t)}$$

$$\text{luego} \quad d\frac{dx_*(t)}{dt} \cdot dx_*(t) = -\frac{1}{x_*^2(t)} \cdot dx_*(t)$$

$$\text{luego} \quad d\frac{dx_*(t)}{dt} \cdot \frac{dx_*(t)}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{x_*^2(t)} \cdot dx_*(t)$$

$$\text{luego} \quad \frac{dx_*(t)}{dt} \cdot d\frac{dx_*(t)}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{x_*^2(t)} \cdot dx_*(t)$$

$$\text{luego} \quad \frac{dx_*(t)}{dt} \cdot d\frac{dx_*(t)}{dt} = -\frac{1}{x_*^2(t)} \cdot dx_*(t)$$

CC BY NC ND

$$\text{luego}\quad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(t)}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2=\frac{1}{x_*(t)}-\frac{1}{x_*(0)}$$

$$\text{luego}\quad \left(\frac{dx_*(t)}{dt}\right)^2=\frac{2}{x_*(t)}-\frac{2}{x_*(0)}+\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2$$

Con ello:

$$\text{luego}\quad \frac{dx_*(t)}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{x_*(t)}-\frac{2}{x_*(0)}+\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2}$$

$$\text{luego}\quad \frac{dx_*(t)}{dt}=\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(1-x_*(t)\cdot\left(\frac{1}{x_*(0)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2\right)\right)}}{\sqrt{x_*(t)}}$$

$$\text{luego}\quad x_*(0)\cdot\frac{d\frac{x_*(t)}{x_*(0)}}{dt}=\pm\sqrt{2\cdot\left|\left(\frac{1}{x_*(0)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2\right)\right|}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{x_*(0)\cdot\left|\left(\frac{1}{x_*(0)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2\right)\right|}-\frac{x_*(t)}{x_*(0)}\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x_*(0)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2\right)}}{\sqrt{\frac{x_*(t)}{x_*(0)}}}$$

$$\text{luego}\quad x_*(0)\cdot\frac{dx_{**}^2(t)}{dt}=\pm\sqrt{2\cdot|a|}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{x_*(0)\cdot|a|}\right)^2}-x_{**}^2(t)\cdot\operatorname{sgn}(a)}}{x_{**}(t)}$$

$$\text{donde}\quad x_{**}(t)=\sqrt{\frac{x_*(t)}{x_*(0)}}\quad\text{y}\quad a=\left(\frac{1}{x_*(0)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx_*(0)}{dt}\right)^2\right)$$

En seguida:

$$x_*(0)\cdot 2\cdot x_{**}(t)\cdot\frac{dx_{**}(t)}{dt}=\pm\sqrt{2\cdot|a|}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{x_*(0)\cdot|a|}\right)^2}-x_{**}^2(t)\cdot\operatorname{sgn}(a)}}{x_{**}(t)}$$

$$\text{luego}\quad \frac{x_{**}^2(t)}{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{x_*(0)\cdot|a|}\right)^2}-x_{**}^2(t)\cdot\operatorname{sgn}(a)}}\cdot dx_{**}(t)=\pm\frac{\sqrt{2\cdot|a|}}{2\cdot x_*(0)}\cdot dt$$

CC BY NC ND

$$\text{luego}\quad \begin{cases} \left(\begin{array}{l} -\dfrac{x_{\cdot\cdot}(t)}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}-x_{\cdot\cdot}^2(t)}+\dfrac{1}{2\cdot x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\arcsin\left(\sqrt{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot x_{\cdot\cdot}(t)\right) \\ +\dfrac{x_{\cdot\cdot}(0)}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}-x_{\cdot\cdot}^2(0)}-\dfrac{1}{2\cdot x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\arcsin\left(\sqrt{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot x_{\cdot\cdot}(t)\right) \end{array}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot a}}{2\cdot x_{\cdot}(0)}\cdot(t-0) \qquad \text{si}\quad 0\le a \\ \left(\begin{array}{l} \dfrac{x_{\cdot\cdot}(t)}{2}\cdot\sqrt{-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}+x_{\cdot\cdot}^2(t)}+\dfrac{1}{2\cdot x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\ln\left(x_{\cdot\cdot}(t)+\sqrt{-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}+x_{\cdot\cdot}^2(t)}\right) \\ -\dfrac{x_{\cdot\cdot}(0)}{2}\cdot\sqrt{-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}+x_{\cdot\cdot}^2(0)}-\dfrac{1}{2\cdot x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\ln\left(x_{\cdot\cdot}(0)+\sqrt{-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}+x_{\cdot\cdot}^2(0)}\right) \end{array}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{-2\cdot a}}{2\cdot x_{\cdot}(0)}\cdot(t-0) \quad \text{si}\quad a<0 \end{cases}$$

Y, por fin:

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{l} -\sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}-\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}}+\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\arcsin\left(\sqrt{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}}\right) \\ +\sqrt{\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}-1}-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\arcsin\left(\sqrt{x_{\cdot}(0)\cdot a}\right) \end{array}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot a}}{x_{\cdot}(0)}\cdot t \qquad \text{si}\quad 0\le a \\ \left(\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}}\cdot\sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}}+\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\ln\left(\sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}}+\sqrt{\dfrac{x_{\cdot}(t)}{x_{\cdot}(0)}-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}}\right) \\ -\sqrt{1-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}}-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}\cdot\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x_{\cdot}(0)\cdot a}}\right) \end{array}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{-2\cdot a}}{x_{\cdot}(0)}\cdot t \quad \text{si}\quad a<0 \end{cases}$$

$$\text{donde}\quad x_{\cdot}(t)=\frac{x(t)}{\sqrt[3]{G\cdot(m_1+m_2)}}\quad \text{y}\quad a=\left(\frac{\sqrt[3]{G\cdot(m_1+m_2)}}{x(0)}-\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{G\cdot(m_1+m_2)}}\cdot\left(\frac{dx(0)}{dt}\right)^2\right)$$

Es gracioso: la mera evolución de la distancia $\vec{x}$ entre dos cuerpos celestes que caen mutuamente en línea recta, no puede despejarse analíticamente.

CC BY NC ND

35.0
EL SOL Y LA TIERRA EN ÓRBITAS MUTUAS (MOMENTA Y FUERZAS)

En su *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, entre un cúmulo de conocimientos, Newton incluyó las explicaciones y el dibujo siguientes acerca de las fuerzas centrípetas: "Proposición 1. Teorema 1. Las áreas que los cuerpos girantes describen mediante radios trazados hasta un centro inmóvil de fuerza, yacen en los mismos planos inmóviles y son proporcionales a los tiempos en que son descritas". "Para ello suponga el tiempo dividido en partes iguales, y en la primera parte de ese tiempo deje que el cuerpo por su fuerza innata describa la línea recta AB. En la segunda parte de ese tiempo, el mismo proseguiría"... ", si no fuese perturbado, directamente a c, a lo largo de la línea Bc igual que AB; de manera que mediante los radios AS, BS, cS, trazados hasta el centro, serían descritas las áreas iguales ASB, BSc [25]. Pero cuando el cuerpo llega a B, suponga que una fuerza centrípeta actúa de repente con un gran impulso, y, desviando lateralmente al cuerpo de la línea recta Bc [26], lo obliga a continuar después su movimiento por la línea recta BC [27]. Dibuje cC paralela a BS, encontrándose con BC en C; y al final de la segunda parte del tiempo, el cuerpo"... "se encontrará en C, en el mismo plano que el triángulo ASB. Junte SC, y, porque SB y Cc son paralelas, el triángulo SBC será igual que el triángulo SBc [28], y por tanto también al triángulo SAB [29]. Por un argumento parecido, si la fuerza centrípeta actúa sucesivamente en C, D, E, &c., y hace que el cuerpo, en cada partícula de tiempo, describa las líneas rectas CD, DE, EF, &c., todas yacerán en el mismo plano; y el triángulo SCD será igual que el triángulo SBC, y SDE a SCD, y SEF a SDE [30]. Y por tanto, en tiempos iguales, serán descritas áreas iguales en un plano inmóvil: y, por composición, cualesquiera sumas SADS, SAFS, de esas áreas, son las unas a las otras como los tiempos en que son descritas. Ahora deje que el número de esos triángulos sea aumentado, y su ancho disminuido *in infinitum*; y"... "su perímetro último ADF será una línea curva: y en consecuencia la fuerza centrípeta, por la cual el cuerpo es retirado continuamente de la tangente de esta curva, actuará continuamente; y todas las áreas descritas SADS, SAFS, que son siempre proporcionales a los tiempos de descripción, serán, también en este caso, proporcionales a esos tiempos. Q.E.D."

[25] ... cuya igualdad se debe a que el área de SAc es dos veces la de SAB (porque son triángulos con la misma base, pero SAc con el doble de altura que SAB), y el área de SBc es la de SAc (dos veces la de SAB) menos la de SAP.

[26] ... de manera que lo haría seguir a lo largo de la línea recta BV si no existiera la fuerza innata que lo impulsa a proseguir a lo largo de la línea recta Bc.

[27] ... que resulta de combinar Bc con BV.

[28] ... mejor dicho, el área de SBC será igual que la de SBc (porque son triángulos con la misma base y la misma altura).

[29] ... mejor dicho, al área de SAB (porque ya está visto que es igual que la de SBc).

[30] ... mejor dicho, serán iguales el área de SCD y la de SBC, el área de SDE y la de SCD, y el área de SEF y la de SDE; en resumen, las áreas de SEF, SDE, SCD y SBC serán iguales a la de SAB.

CC BY NC ND

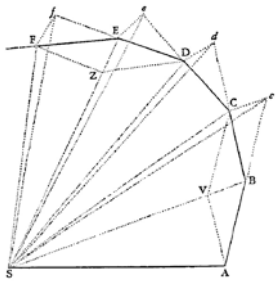


Fig. 1: Efectos de una fuerza centrípeta, en un dibujo de Newton

En el libro de Newton, y en los escritos de otros autores del siglo 17 de la Europa occidental, como Christiaan Huygens (1629-1695), iba explícita la propuesta con que empezamos este libro, en la sección 1: la predicción de las variaciones predecibles es, principalmente, una labor de animación escena a escena, y el realismo de cada escena depende de la sensatez de las cuentas en las escenas anteriores.

Imaginemos al Sol y a la Tierra moviéndose en órbitas mutuas, solitariamente.

Fig.2: El Sol y la Tierra en órbitas mutuas

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de ambos cuerpos celestes.

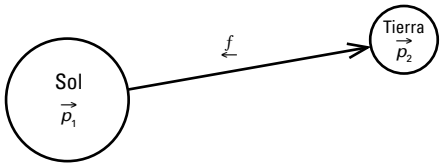


Fig. 3: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\vec{x}_1(t)$ es la posición del Sol, en [m]; $\vec{x}_2(t)$ es la de la Tierra, en [m]:

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_1(0) + \int_0^t \vec{v}_1(\tau)\cdot d\tau \qquad (1)$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_2(0) + \int_0^t \vec{v}_2(\tau)\cdot d\tau \qquad (2)$$

$\vec{x}_1(0)$ es la posición del Sol inicialmente, en [m]; $\vec{v}_1(t)$ es la velocidad del Sol, en [m s^{-1}]; $x_2(t)$ es la posición de la Tierra inicialmente, en [m]; $\vec{v}_2(t)$ es la velocidad de la Tierra, en [m s^{-1}]:

$$\vec{x}_1(0) = \left(-4.50\cdot 10^5, 0, 0\right) \text{ (por ejemplo)} \qquad (3)$$

CC BY NC ND

$$\vec{v}_1(t) = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{4}$$

$$\vec{x}_2(0) = (1.49 \cdot 10^{11}, 0, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$\vec{v}_2(t) = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{6}$$

$\vec{p}_1(t)$ es el momentum en el Sol, en [N s]; m_1 es la masa en el Sol, en [kg]; $\vec{p}_2(t)$ es el momentum en la Tierra, en [N s]; m_2 es la masa en la Tierra, en [kg]:

$$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_1(0) - \int_0^t \vec{f}(\tau) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$m_1 = 1.98 \cdot 10^{30} \tag{8}$$

$$\vec{p}_2(t) = \vec{p}_2(0) + \int_0^t \vec{f}(\tau) \cdot d\tau \tag{9}$$

$$m_2 = 5.98 \cdot 10^{24} \tag{10}$$

$\vec{p}_1(0)$ es el momentum en el Sol inicialmente, en [N s]; $\vec{f}(t)$ es la fuerza neta del Sol a la Tierra por gravitación, en [N]; $\vec{p}_2(t)$ es el momentum en la Tierra inicialmente, en [N s]:

$$\vec{p}_1(0) = (0, -1.7824 \cdot 10^{29}, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\vec{f}(t) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}(t)\right|^3} \cdot \vec{x}(t) \tag{12}$$

$$\vec{p}_2(0) = (0, 1.7824 \cdot 10^{29}, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

G es la constante gravitacional, en [N m^2 kg^{-2}]; $\vec{x}(t)$ es la distancia del Sol a la Tierra, en [m]:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \tag{14}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) \tag{15}$$

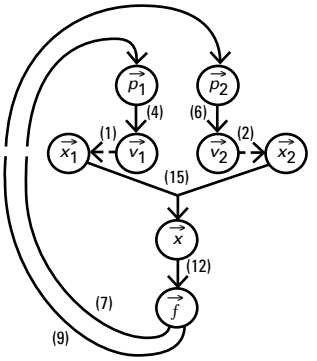


Fig. 4: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (5), (8), (10), (11), (13) y (14) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (4), (6), (7), (9) y (12), contienen 2 cada una; (15), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^7 \cdot 3^1$ (=384) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(7) y (9) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 384 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^5 \cdot 3^1$ (=96).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 96 sistemas de ecuaciones restantes, 95 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesan las evoluciones de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $\vec{x}_1$ inicial, $\vec{x}_2$ inicial, $\vec{p}_1$ inicial, $\vec{p}_2$ inicial, m_1, m_2, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$$m_1 = \ldots \qquad (8')$$

$$m_2 = \ldots \qquad (10')$$

$$\vec{x}_{1,0} = \ldots \qquad (3')$$

$$\vec{x}_{2,0} = \ldots \qquad (5')$$

$$\vec{p}_{1,0} = \ldots \qquad (11')$$

$$\vec{p}_{2,0} = \ldots \qquad (13')$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \qquad (14')$$

$$\vec{v}_{1,k} = \frac{\vec{p}_{1,k}}{m_1} \qquad (4')$$

$$\vec{v}_{2,k} = \frac{\vec{p}_{2,k}}{m_2} \qquad (6')$$

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k} \qquad (15')$$

$$\vec{f}_k = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_k\right|^3} \cdot \vec{x}_k \qquad (12')$$

CC BY NC ND

$$\vec{x}_{1,k+1} = \vec{x}_{1,k} + \vec{v}_{1,k} \cdot dt \quad (1')$$

$$\vec{x}_{2,k+1} = \vec{x}_{2,k} + \vec{v}_{2,k} \cdot dt \quad (2')$$

$$\vec{p}_{1,k+1} = \vec{p}_{1,k} - \vec{f}_k \cdot dt \quad (7')$$

$$\vec{p}_{2,k+1} = \vec{p}_{2,k} + \vec{f}_k \cdot dt \quad (9')$$

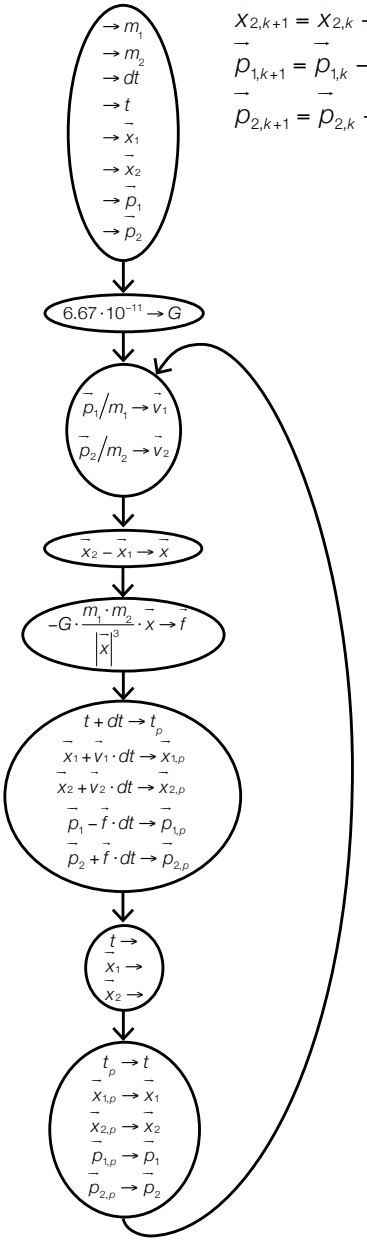


Fig. 5: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=10000 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 6.

cc BY NC ND

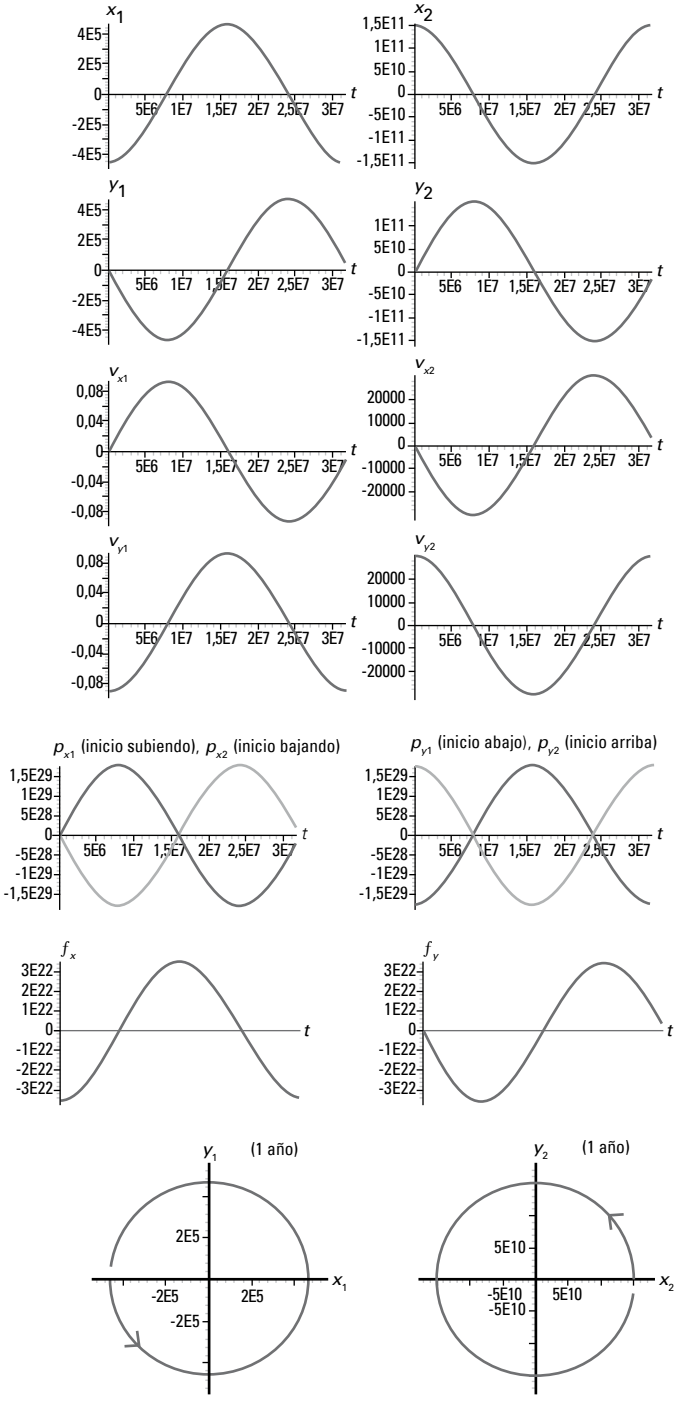


Fig. 6: Predicciones

BY NC ND

En las predicciones hay un problema, porque los gráficos corresponden a 1 año (31557600 segundos) y en ellos las órbitas predichas no se completan bien. El problema se hace más patente con gráficos correspondientes a 10 años, porque entonces se nota claramente que las órbitas predichas son, además, inestables.

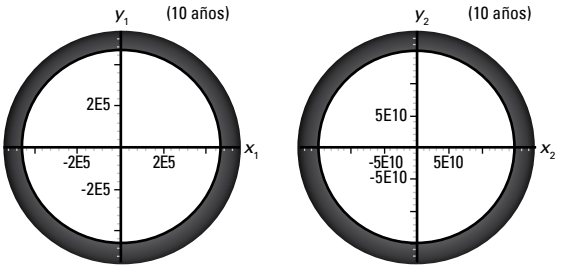


Fig. 7: Predicciones

Podría pensarse que se trata de equivocaciones en $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ iniciales; o en *G*, m_1 y m_2; sin embargo, manteniendo esos datos y achicando *dt*, las órbitas predichas mejoran.

La aproximación de Euler para las integrales, se equivoca en la predicción de variaciones cíclicas; se mejora achicando *dt* (lo cual es oneroso); pero sólo se vuelve confiable del todo si se hace tender *dt* a cero (lo cual tiende a ser infinitamente oneroso).

Newton sabía de problemas de esta especie. Por eso su libro pedía que "el número de esos triángulos sea aumentado, y su ancho disminuido *in infinitum*", e insistía en otras cautelas parecidas, propias del Cálculo.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7), (9), (1) y (2) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para los momenta y las distancias recorridas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (12) y (15), derivando (9) e insertando (12) y (15), derivando (1) e insertando (4), y derivando (2) e insertando (6):

$$\frac{d\vec{p}_1(t)}{dt} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{d\vec{p}_2(t)}{dt} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{d\vec{x}_1(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \qquad \text{(a3)}$$

CC BY NC ND

$$\frac{d\vec{x}_2(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \qquad \text{(a4)}$$

Al respecto: restando (a3) a (a4), derivando, insertando (a2) y (a1), y usando (1):

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = -G \cdot \frac{m_1 + m_2}{\left|\vec{x}(t)\right|^3} \cdot \vec{x}(t)$$

Apéndice acerca de las aproximaciones de Newton y Euler

En el dibujo de Newton, mostrado por la figura 1:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \left(\left(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1} \right) + \frac{\vec{f}_{c,k}}{m} \cdot \Delta t^2 \right)$$

$$\text{luego} \quad m \cdot \frac{\vec{x}_{k+1} - 2 \cdot \vec{x}_k + \vec{x}_{k-1}}{\Delta t^2} = \vec{f}_{c,k}$$

$$\text{luego} \quad \frac{m \cdot \dfrac{\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k}{\Delta t} - m \cdot \dfrac{\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \vec{f}_{c,k}$$

$$\text{luego} \quad \frac{\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k}{\Delta t} = \vec{f}_{c,k}, \quad \vec{p}_k = m \cdot \vec{v}_k \quad \text{y} \quad \vec{v}_k = \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}}{\Delta t}$$

$$\text{luego} \quad \vec{p}_{k+1} = \vec{p}_k + \vec{f}_{c,k} \cdot \Delta t, \quad \vec{v}_k = \frac{\vec{p}_k}{m} \quad \text{y} \quad \vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \vec{v}_k \cdot \Delta t$$

En la aproximación de Euler:

$$\vec{p}_{k+1} = \vec{p}_k + \vec{f}_{c,k} \cdot \Delta t, \quad \vec{v}_k = \frac{\vec{p}_k}{m} \quad \text{y} \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{v}_k \cdot \Delta t$$

$$\text{luego} \quad \vec{p}_{k+1} = \vec{p}_k + \vec{f}_{c,k} \cdot \Delta t \quad \text{y} \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \frac{\vec{p}_k}{m} \cdot \Delta t$$

$$\text{luego} \quad \vec{p}_{k+1} = \vec{p}_k + \vec{f}_{c,k} \cdot \Delta t \quad \text{y} \quad \vec{p}_k = m \cdot \frac{\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k}{\Delta t}$$

$$\text{luego} \quad m \cdot \frac{\vec{x}_{k+2} - \vec{x}_{k+1}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k}{\Delta t} + \vec{f}_{c,k} \cdot \Delta t$$

$$\text{luego} \quad \vec{x}_{k+2} = \vec{x}_{k+1} + \left(\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k \right) + \vec{f}_{c,k} \cdot \frac{\Delta t^2}{m};$$

$$\text{luego} \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \left(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1} \right) + \vec{f}_{c,k-1} \cdot \frac{\Delta t^2}{m}.$$

lo cual da el dibujo de la figura A1.

CC BY NC ND

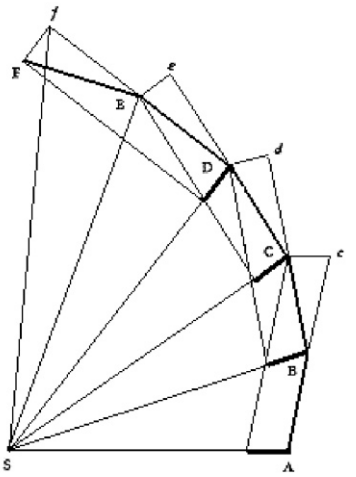


Fig. A1: Aproximación de Euler

Hay diferencias entre la aproximación de Newton y la de Euler; pero, según el Cálculo, ambas tienden a igualarse si se hace tender *dt* a 0 (en ausencia de discontinuidades).

BY NC ND

36.0

TRES CUERPOS CELESTES EN ÓRBITAS MUTUAS (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos a tres cuerpos celestes moviéndose en órbitas mutuas, solitariamente.

La especificación matemática de tales órbitas es muy difícil y mantuvo ocupados, entre otros, a Newton, a Daniel Bernoulli (1700-1782), a Euler, a Alexis Clairaut (1713-1765), a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), a Pierre Simon de Laplace (1749-1827), a Siméon Denis Poisson (1781-1840), a Charles Delaunay (1816-1872), a George Hill (1838-1914) y a Jules-Henri Poincaré (1854-1912).

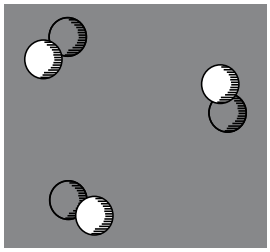


Fig. 1: Tres cuerpos celestes en órbitas mutuas

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de los tres cuerpos, por lo menos en un caso simple.

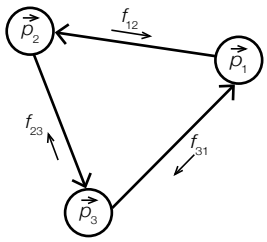


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\vec{x}_1(t)$ es la posición de un cuerpo, en [m]; $\vec{x}_2(t)$ es la de otro, en [m]; $\vec{x}_3(t)$ es la del otro, en [m]:

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_1(0) + \int_0^t \vec{v}_1(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_2(0) + \int_0^t \vec{v}_2(\tau) \cdot d\tau \qquad (2)$$

$$\vec{x}_3(t) = \vec{x}_3(0) + \int_0^t \vec{v}_3(\tau) \cdot d\tau \qquad (3)$$

CC BY NC ND

$\vec{x}_1(0)$ es la posición del primer cuerpo inicialmente, en [m]; $\vec{v}_1(t)$ es su velocidad, en [m s^{-1}]; $\vec{x}_2(0)$ es la posición del segundo cuerpo inicialmente, en [m]; $\vec{v}_2(t)$ es su velocidad, en [m s^{-1}]; $\vec{x}_3(t)$ es la posición del tercer cuerpo inicialmente, en [m]; $\vec{v}_3(t)$ es su velocidad, en [m s^{-1}]:

$$\vec{x}_1(0) = (1.0 \cdot 10^7, 0, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{5}$$

$$\vec{x}_2(0) = (-0.5 \cdot 10^7, 0.866025 \cdot 10^7, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$\vec{v}_2(t) = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{7}$$

$$\vec{x}_3(0) = (-0.5 \cdot 10^7, -0.866025 \cdot 10^7, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$\vec{v}_3(t) = \frac{\vec{p}_3(t)}{m_3} \tag{9}$$

$\vec{p}_1(t)$ es el momentum en el primer cuerpo, en [N s]; m_1 es la masa en él, en [kg]; $\vec{p}_2(t)$ es el momentum en el segundo cuerpo, en [N s]; m_2 es la masa en él, en [kg]; $\vec{p}_3(t)$ es el momentum en el tercer cuerpo, en [N s]; m_3 es la masa en él, en [kg]:

$$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_1(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{31}(\tau) - \vec{f}_{12}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m_1 = 1.0 \cdot 10^{24} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\vec{p}_2(t) = \vec{p}_2(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{12}(\tau) - \vec{f}_{23}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$m_2 = 1.0 \cdot 10^{24} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$\vec{p}_3(t) = \vec{p}_3(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{23}(\tau) - \vec{f}_{31}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{14}$$

$$m_3 = 1.0 \cdot 10^{24} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$\vec{p}_1(0)$ es el momentum en el primer cuerpo inicialmente, en [N s]; $\vec{f}_{31}(t)$ es la fuerza neta del tercer cuerpo al primero por gravitación, en [N] hacia el tercero; $\vec{f}_{12}(t)$ es la fuerza neta del primero al segundo, en [N] hacia el primero; $\vec{p}_2(0)$ es el momentum en el segundo inicialmente, en [N s]; $\vec{f}_{23}(t)$ es la fuerza neta del segundo al tercero, en [N] hacia el segundo; $\vec{p}_3(0)$ es el momentum en el tercero inicialmente, en [N s]:

$$\vec{p}_1(0) = (0, 1.962378 \cdot 10^{27}, 0) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

CC BY NC ND

$$\vec{f}_{31}(t) = -G \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{\left|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right) \quad (17)$$

$$\vec{f}_{12}(t) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \quad (18)$$

$$\vec{p}_2(0) = \left(-1.699469 \cdot 10^{27}, 0.981189 \cdot 10^{29}, 0\right) \text{ (por ejemplo)} \quad (19)$$

$$\vec{f}_{23}(t) = -G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{\left|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right) \quad (20)$$

$$\vec{p}_3(0) = \left(1.699469 \cdot 10^{27}, -0.981189 \cdot 10^{29}, 0\right) \text{ (por ejemplo)} \quad (21)$$

G es la constante gravitacional, en [N m2 kg-2]:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \quad (22)$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: $\vec{x}_1$ depende de $\vec{v}_1$; $\vec{x}_2$, de $\vec{v}_2$; $\vec{x}_3$, de $\vec{v}_3$; $\vec{v}_1$, de $\vec{p}_1$; $\vec{v}_2$, de $\vec{p}_2$; $\vec{v}_3$, de $\vec{p}_3$; $\vec{p}_1$, de $\vec{f}_{31}$ y $\vec{f}_{12}$; $\vec{p}_2$, de $\vec{f}_{12}$ y $\vec{f}_{23}$; $\vec{p}_3$, de $\vec{f}_{23}$ y $\vec{f}_{31}$; $\vec{f}_{12}$, de $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_1$; $\vec{f}_{23}$, de $\vec{x}_3$ y $\vec{x}_2$; y $\vec{f}_{31}$, de $\vec{x}_3$ y $\vec{x}_1$ (según (1), (2), (3), (5), (7), (9), (10), (12), (14), (18), (20) y (17), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (11), (13), (15), (16), (19), (21) y (22) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3), (5), (7) y (9), contienen 2 cada una; (10), (12), (14), (17), (18) y (20), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^6$ (=46656) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(22).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(10), (12) y (14) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 46656 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(22), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^6 \cdot 3^3$ (=1728).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1728 sistemas de ecuaciones restantes, 1727 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(22).

Si nos interesan las evoluciones de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las inte-

CC BY NC ND

graciones en (1), (2), (3), (10), (12) y (14); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $\vec{x}_1$ inicial, $\vec{x}_2$ inicial, $\vec{x}_3$ inicial, $\vec{p}_1$ inicial, $\vec{p}_2$ inicial, $\vec{p}_3$ inicial, m_1, m_2, m_3, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(22) como:

$$m_1 = \ldots \tag{11'}$$

$$m_2 = \ldots \tag{13'}$$

$$m_3 = \ldots \tag{15'}$$

$$\vec{x}_{1,0} = \ldots \tag{4'}$$

$$\vec{x}_{2,0} = \ldots \tag{6'}$$

$$\vec{x}_{3,0} = \ldots \tag{8'}$$

$$\vec{p}_{1,0} = \ldots \tag{16'}$$

$$\vec{p}_{2,0} = \ldots \tag{19'}$$

$$\vec{p}_{3,0} = \ldots \tag{21'}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \tag{22'}$$

$$\vec{v}_{1,k} = \frac{\vec{p}_{1,k}}{m_1} \tag{5'}$$

$$\vec{v}_{2,k} = \frac{\vec{p}_{2,k}}{m_2} \tag{7'}$$

$$\vec{v}_{3,k} = \frac{\vec{p}_{3,k}}{m_3} \tag{9'}$$

$$\vec{f}_{12,k} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left|\vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k}\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k}\right) \tag{18'}$$

$$\vec{f}_{23,k} = -G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{\left|\vec{x}_{3,k} - \vec{x}_{2,k}\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_{3,k} - \vec{x}_{2,k}\right) \tag{20'}$$

$$\vec{f}_{31,k} = -G \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{\left|\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{3,k}\right|^3} \cdot \left(\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{3,k}\right) \tag{17'}$$

$$\vec{x}_{1,k+1} = \vec{x}_{1,k} + \vec{v}_{1,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$\vec{x}_{2,k+1} = \vec{x}_{2,k} + \vec{v}_{2,k} \cdot dt \tag{2'}$$

$$\vec{x}_{3,k+1} = \vec{x}_{3,k} + \vec{v}_{3,k} \cdot dt \tag{3'}$$

$$\vec{p}_{1,k+1} = \vec{p}_{1,k} + \left(\vec{f}_{31,k} - \vec{f}_{12,k}\right) \cdot dt \tag{10'}$$

$$\vec{p}_{2,k+1} = \vec{p}_{2,k} + \left(\vec{f}_{12,k} - \vec{f}_{23,k}\right) \cdot dt \tag{12'}$$

CC BY NC ND

$$\vec{p}_{3,k+1} = \vec{p}_{3,k} + \left(\vec{f}_{23,k} - \vec{f}_{31,k}\right) \cdot dt \qquad (14')$$

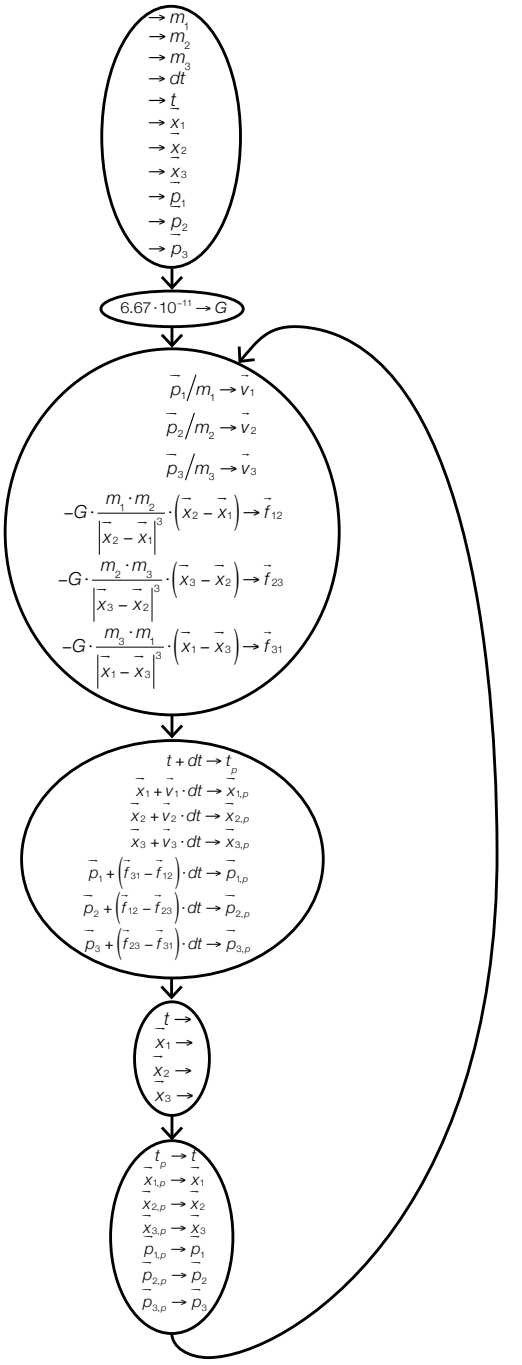


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.5 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4, que corresponde a 30000 segundos.

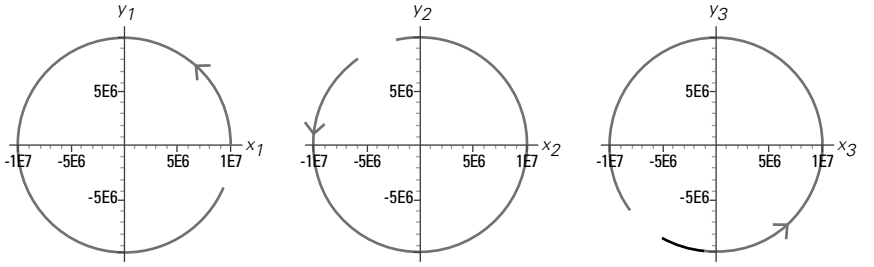


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (10), (12) y (14) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las distancias recorridas y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (5), derivando (2) e insertando (7), derivando (3) e insertando (9), derivando (10) e insertando (17) y (18), derivando (2) e insertando (5), y derivando (3) e insertando (7):

$$\frac{d\vec{x}_1(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{a1}$$

$$\frac{d\vec{x}_2(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{a2}$$

$$\frac{d\vec{x}_3(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_3(t)}{m_3} \tag{a3}$$

$$\frac{d\vec{p}_1(t)}{dt} = -G\cdot\left(\frac{m_3\cdot m_1\cdot\left(\vec{x}_1(t)-\vec{x}_3(t)\right)}{\left|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_3(t)\right|^3} - \frac{m_1\cdot m_2\cdot\left(\vec{x}_2(t)-\vec{x}_1(t)\right)}{\left|\vec{x}_2(t)-\vec{x}_1(t)\right|^3}\right) \tag{a4}$$

$$\frac{d\vec{p}_2(t)}{dt} = -G\cdot\left(\frac{m_1\cdot m_2\cdot\left(\vec{x}_2(t)-\vec{x}_1(t)\right)}{\left|\vec{x}_2(t)-\vec{x}_1(t)\right|^3} - \frac{m_2\cdot m_3\cdot\left(\vec{x}_3(t)-\vec{x}_2(t)\right)}{\left|\vec{x}_3(t)-\vec{x}_2(t)\right|^3}\right) \tag{a5}$$

$$\frac{d\vec{p}_3(t)}{dt} = -G\cdot\left(\frac{m_2\cdot m_3\cdot\left(\vec{x}_3(t)-\vec{x}_2(t)\right)}{\left|\vec{x}_3(t)-\vec{x}_2(t)\right|^3} - \frac{m_3\cdot m_1\cdot\left(\vec{x}_1(t)-\vec{x}_3(t)\right)}{\left|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_3(t)\right|^3}\right) \tag{a6}$$

BY NC ND

37.0

TRES CUERPOS Y TRES RESORTES (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos una figura triangular compuesta por tres cuerpos y tres resortes.

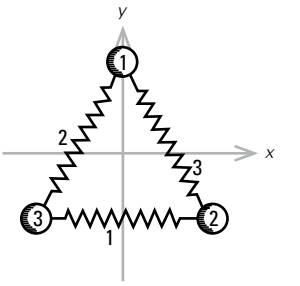


Fig. 1: Tres cuerpos y tres resortes

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de los cuerpos, suponiendo despreciables los roces y las masas de los resortes.

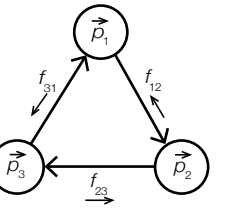


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\vec{x}_j(t)$ para $1 \le j \le 3$ es la posición del cuerpo j, en [m]:

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_1(0) + \int_0^t \vec{v}_1(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_2(0) + \int_0^t \vec{v}_2(\tau) \cdot d\tau \qquad (2)$$

$$\vec{x}_3(t) = \vec{x}_3(0) + \int_0^t \vec{v}_3(\tau) \cdot d\tau \qquad (3)$$

$\vec{x}_j(0)$ para $1 \le j \le 3$ es la posición del cuerpo j inicialmente, en [m]; $\vec{v}_j(t)$ para $1 \le j \le 3$ es la velocidad del cuerpo j, en [m s^{-1}]:

$$\vec{x}_1(0) = (0,\ 0.4330127,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \qquad (4)$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \qquad (5)$$

$$\vec{x}_2(0) = (0.5,\ -0.4330127,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \qquad (6)$$

CC BY NC ND

$$\vec{v}_2(t) = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{7}$$

$$\vec{x}_3(0) = (-0.5,\ -0.4330127,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \tag{8}$$

$$\vec{v}_3(t) = \frac{\vec{p}_3(t)}{m_3} \tag{9}$$

$\vec{p}_j(t)$ para $1 \le j \le 3$ es el momentum en el cuerpo *j*, en [N s]; mj para $1 \le j \le 3$ es la masa en el cuerpo *j*, en [kg]:

$$\vec{p}_1(t) = \vec{p}_1(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{31}(\tau) - \vec{f}_{12}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m_1 = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\vec{p}_2(t) = \vec{p}_2(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{12}(\tau) - \vec{f}_{23}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$m_2 = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{13}$$

$$\vec{p}_3(t) = \vec{p}_3(0) + \int_0^t \left(\vec{f}_{23}(\tau) - \vec{f}_{31}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{14}$$

$$m_3 = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{15}$$

$\vec{p}_j(0)$ para $1 \le j \le 3$ es el momentum inicialmente, en [N s]; $\vec{f}_{ij}(t)$ para $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$ y $j \ne i$ es la fuerza del cuerpo *i* al *j* a través del resorte *k* ($1 \le k \le 3$, $k \ne j$ y $k \ne i$), en [N] hacia el cuerpo *i*:

$$\vec{p}_1(0) = (0,\ -0.2,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \tag{16}$$

$$\vec{f}_{31}(t) = -K_2 \cdot \left(1 - \frac{L_2}{\left|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right) \tag{17}$$

$$\vec{f}_{12}(t) = -K_3 \cdot \left(1 - \frac{L_3}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \tag{18}$$

$$\vec{p}_2(0) = (0,\ 0.1,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \tag{19}$$

$$\vec{f}_{23}(t) = -K_1 \cdot \left(1 - \frac{L_1}{\left|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right) \tag{20}$$

$$\vec{p}_3(0) = (0,\ 0.1,\ 0) \text{ (por ejemplo)} \tag{21}$$

K_j para $1 \le j \le 3$ es el coeficiente de elasticidad del resorte *j*, en [N m^{-1}]; L_j para $1 \le j \le 3$ es la longitud del resorte *j* cuando está relajado, en [m]:

$$K_2 = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{22}$$

$$L_2 = 1 \text{ (por ejemplo)} \tag{23}$$

CC BY NC ND

$K_3 = 1$ (por ejemplo) (24)

$L_3 = 1$ (por ejemplo) (25)

$K_1 = 1$ (por ejemplo) (26)

$L_1 = 1$ (por ejemplo) (27)

El dibujo de la estructura causal es un poco enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: $\vec{x}_1$ depende de $\vec{v}_1$; $\vec{x}_2$, de $\vec{v}_2$; $\vec{x}_3$, de $\vec{v}_3$; $\vec{v}_1$, de $\vec{p}_1$; $\vec{v}_2$, de $\vec{p}_2$; $\vec{v}_3$, de $\vec{p}_3$; $\vec{p}_1$, de $\vec{f}_{31}$ y $\vec{f}_{12}$; $\vec{p}_2$, de $\vec{f}_{12}$ y $\vec{f}_{23}$; $\vec{p}_3$, de $\vec{f}_{23}$ y $\vec{f}_{31}$; $\vec{f}_{31}$, de $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_3$; $\vec{f}_{12}$, de $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_1$; y $\vec{f}_{23}$, de $\vec{x}_3$ y $\vec{x}_2$ (según (1), (2), (3), (5), (7), (9), (10), (12), (14), (17), (18) y (20), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (11), (13), (15), (16), (19), (21), (22), (23), (24), (25), (26) y (27) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3), (5), (7) y (9) contienen 2 cada una; (10), (12), (14), (17), (18) y (20), contienen 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^6$ (=46656) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(27).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(10), (12) y (14) tienen momenta despejados en el lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 7 despejes imaginables en cada una se reducen al planteado y, de los 46656 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(27), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^6 \cdot 3^3$ (=1728)

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1728 sistemas de ecuaciones restantes, 1727 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(27).

Si nos interesan las evoluciones de las posiciones $\vec{x}_j(t)$ para $1 \le j \le 3$; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (16), (19) y (21); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $\vec{x}_j$ inicial para $1 \le j \le 3$, $\vec{p}_j$ inicial para $1 \le j \le 3$, m_j para $1 \le j \le 3$, K_j para $1 \le j \le 3$, L_j para $1 \le j \le 3$, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(27) como:

$m_1 = \ldots$ (11′)

$m_2 = \ldots$ (13′)

$m_3 = \ldots$ (15′)

$K_1 = \ldots$ (26′)

$K_2 = \ldots$ (22′)

$K_3 = \ldots$ (24′)

CC BY NC ND

$$L_1 = \ldots \tag{27'}$$

$$L_2 = \ldots \tag{23'}$$

$$L_3 = \ldots \tag{25'}$$

$$\vec{x}_{1,0} = \ldots \tag{4'}$$

$$\vec{x}_{2,0} = \ldots \tag{6'}$$

$$\vec{x}_{3,0} = \ldots \tag{8'}$$

$$\vec{p}_{1,0} = \ldots \tag{16'}$$

$$\vec{p}_{2,0} = \ldots \tag{19'}$$

$$\vec{p}_{3,0} = \ldots \tag{21'}$$

$$\vec{v}_{1,k} = \frac{\vec{p}_{1,k}}{m_1} \tag{5'}$$

$$\vec{v}_{2,k} = \frac{\vec{p}_{2,k}}{m_2} \tag{7'}$$

$$\vec{v}_{3,k} = \frac{\vec{p}_{3,k}}{m_3} \tag{9'}$$

$$\vec{f}_{31,k} = -K_2 \cdot \left(1 - L_2 / \left|\vec{x}_{1.k} - \vec{x}_{3,}\right|\right) \cdot \left(\vec{x}_{1.k} - \vec{x}_{3,}\right) \tag{17'}$$

$$\vec{f}_{12,k} = -K_3 \cdot \left(1 - L_3 / \left|\vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k}\right|\right) \cdot \left(\vec{x}_{2,k} - \vec{x}_{1,k}\right) \tag{18'}$$

$$\vec{f}_{23,k} = -K_1 \cdot \left(1 - L_1 / \left|\vec{x}_{3,k} - \vec{x}_{2,k}\right|\right) \cdot \left(\vec{x}_{3,k} - \vec{x}_{2,k}\right) \tag{20'}$$

$$\vec{x}_{1,k+1} = \vec{x}_{1,k} + \vec{v}_{1,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$\vec{x}_{2,k+1} = \vec{x}_{2,k} + \vec{v}_{2,k} \cdot dt \tag{2'}$$

$$\vec{x}_{3,k+1} = \vec{x}_{3,k} + \vec{v}_{3,k} \cdot dt \tag{3'}$$

$$\vec{p}_{1k+1} = \vec{p}_{1,k} + \left(\vec{f}_{31,k} - \vec{f}_{12,k}\right) \cdot dt \tag{10'}$$

$$\vec{p}_{2.k+1} = \vec{p}_{2,k} + \left(\vec{f}_{12,k} - \vec{f}_{23,k}\right) \cdot dt \tag{12'}$$

$$\vec{p}_{3,k+1} = \vec{p}_{3,k} + \left(\vec{f}_{23,k} - \vec{f}_{31,k}\right) \cdot dt \tag{14'}$$

BY NC ND

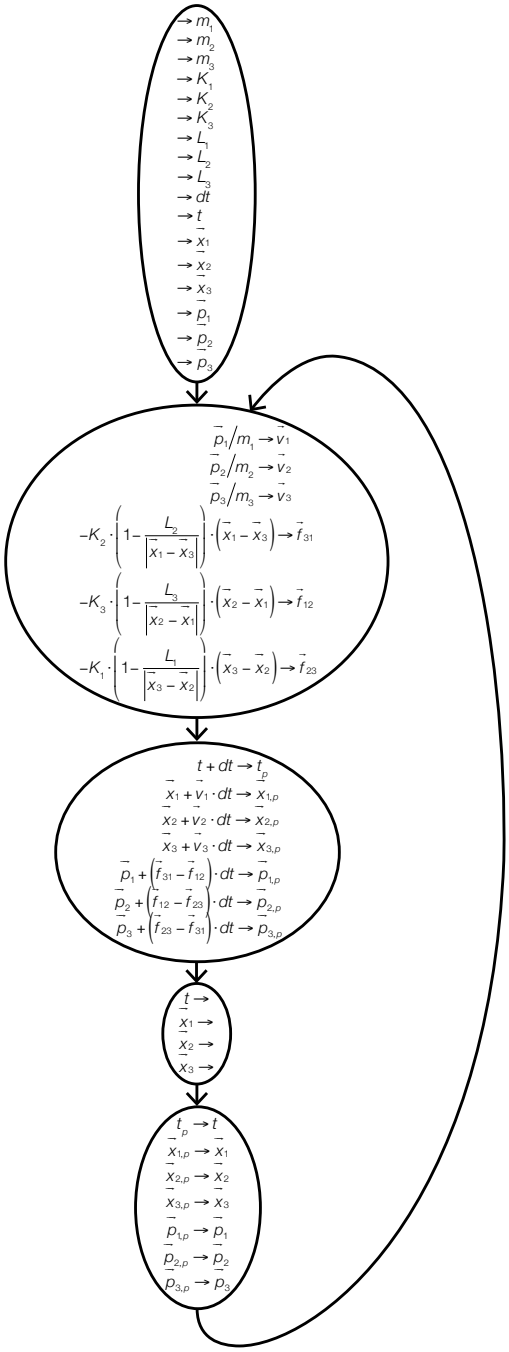


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.0002 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

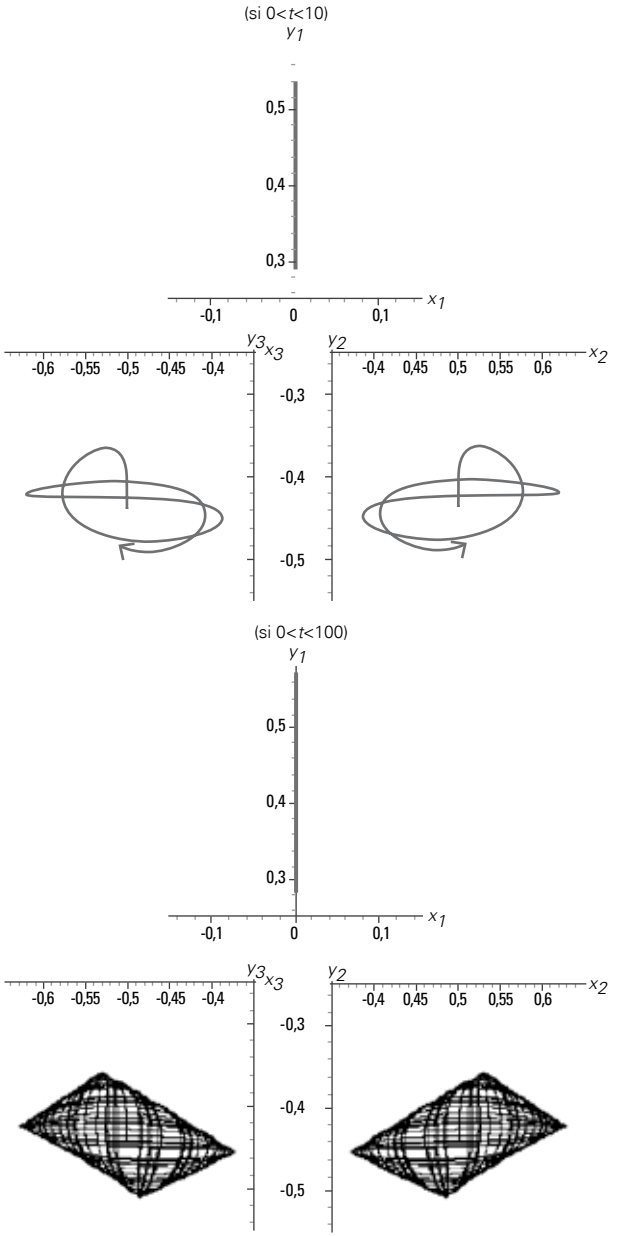


Fig.4: Predicciones

BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (10), (12) y (14) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las distancias recorridas y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (5), derivando (2) e insertando (7), derivando (3) e insertando (9), derivando (10) e insertando (17) y (18), derivando (12) e insertando (18) y (20), y derivando (14) e insertando (20) y (17):

$$\frac{d\vec{x}_1(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_1(t)}{m_1} \tag{a1}$$

$$\frac{d\vec{x}_2(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_2(t)}{m_2} \tag{a2}$$

$$\frac{d\vec{x}_3(t)}{dt} = \frac{\vec{p}_3(t)}{m_3} \tag{a3}$$

$$\frac{d\vec{p}_1(t)}{dt} = -K_2 \cdot \left(1 - \frac{L_2}{\left|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right) + K_3 \cdot \left(1 - \frac{L_3}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) \tag{a4}$$

$$\frac{d\vec{p}_2(t)}{dt} = -K_3 \cdot \left(1 - \frac{L_3}{\left|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\right) + K_1 \cdot \left(1 - \frac{L_1}{\left|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right) \tag{a5}$$

$$\frac{d\vec{p}_3(t)}{dt} = -K_1 \cdot \left(1 - \frac{L_1}{\left|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\right) + K_2 \cdot \left(1 - \frac{L_2}{\left|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right|}\right) \cdot \left(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_3(t)\right) \tag{a6}$$

Apéndice acerca de la Mecánica para (17), (18) y (20)

Según la aproximación de Hooke, para un resorte horizontal con un extremo en una posición derecha $x_d(t)$ y el otro en una posición izquierda $x_i(t)$:

$$\begin{aligned} f_{di}(t) &= K \cdot \left(\left|x_d(t) - x_i(t)\right| - L\right) \\ &= K \cdot \left(\left|x_i(t) - x_d(t)\right| - L\right) \end{aligned}$$

donde $f_{di}(t)$ es la fuerza del cuerpo derecho al izquierdo a través del resorte, en [N] hacia la derecha.

Si el resorte está oblicuo, vectorialmente:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{di}(t) &= -K \cdot \left(\left|x_i(t) - x_d(t)\right| - L\right) \cdot \frac{x_i(t) - x_d(t)}{\left|x_i(t) - x_d(t)\right|} \\ &= -K \cdot \left(1 - \frac{L}{\left|x_i(t) - x_d(t)\right|}\right) \cdot \left(x_i(t) - x_d(t)\right) \end{aligned}$$

donde $\vec{f}_{id}(t)$ es la fuerza vectorial del cuerpo derecho al izquierdo a través del resorte, en [N] hacia el cuerpo derecho.

(17), (18) y (20) resultan de ahí.

CC BY NC ND

38.0

UNA MOTO, OTRA VEZ (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos una moto que viaja por un camino plano en línea recta, hacia la derecha.

Fig. 1: Una moto

Interesa predecir la evolución de la posición horizontal de la moto.

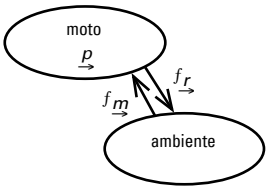


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y(t)$ es la posición horizontal de la moto, en [m] hacia la derecha de una referencia:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \tag{1}$$

$y(0)$ es la posición de la moto inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v(t)$ es su velocidad, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$y(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$v(t) = \frac{p(t)}{m} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum en la moto, en [N s] hacia la derecha; m es la masa en la moto, en [kg]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(f_m(\tau) - f_r(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{4}$$

CC BY NC ND

$m = 200$ (por ejemplo) (5)

$p(0)$ es el momentum en la moto inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f_m(t)$ es la fuerza del camino a la moto mediante el motor, en [N] hacia la derecha; $f_r(t)$ es la fuerza de la moto al aire por roce, en [N] hacia la derecha:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f_m(t) = \mathrm{T}(t) / r \tag{7}$$

$$f_r(t) = \left(D_1 + D_2 \cdot |v(t)|\right) \cdot v(t) \tag{8}$$

$\mathrm{T}(t)$ es el torque del motor a través de la transmisión, en [N m] con sentido horario; r es el radio de las ruedas de la moto, en [m]; D_1 es un coeficiente de roce, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce, en [N m^{-2} s^2]:

$$\mathrm{T}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 200 & \text{si } 6 \le t < 12 \\ 100 & \text{si } 12 \le t < 24 \\ 50 & \text{si } 24 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$r = 0.28$ (por ejemplo) (10)

$D_1 = 2$ (por ejemplo) (11)

$D_2 = 0.1$ (por ejemplo) (12)

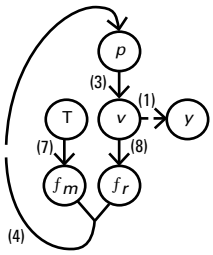


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (5), (6), (10), (11) y (12) no contienen ninguna variable que evoluciona: (9) contiene 1; (1), (3), (7) y (8) contienen 2 cada una; (4), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 6 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^4 \cdot 3^1$ (=48) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(12).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(4) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 48 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(12), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^4$ (=16).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

CC BY NC ND

De los 16 sistemas de ecuaciones restantes, 15 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(12).

Si nos interesa la evolución de la posición *y*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1) y (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *p* inicial, **T**, *m, r, D_1, D_2, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(12) como:

$$m = \ldots \quad (5')$$
$$r = \ldots \quad (10')$$
$$D_1 = \ldots \quad (11')$$
$$D_2 = \ldots \quad (12')$$
$$y_0 = \ldots \quad (2')$$
$$p_0 = \ldots \quad (6')$$
$$\mathrm{T}_k = \ldots \quad (9')$$
$$v_k = \frac{p_k}{m} \quad (3')$$
$$f_{m,k} = \mathrm{T}_k / r_k \quad (7')$$
$$f_{r,k} = \left(D_1 + D_2 \cdot |v_k|\right) \cdot v_k \quad (8')$$
$$y_{k+1} = y_k + v_k \cdot dt \quad (1')$$
$$p_{k+1} = p_k + \left(f_{m,k} - f_{r,k}\right) \cdot dt \quad (4')$$

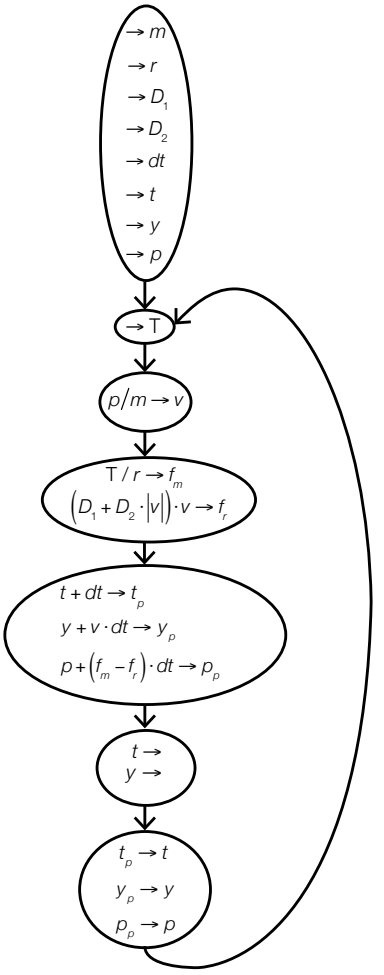


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

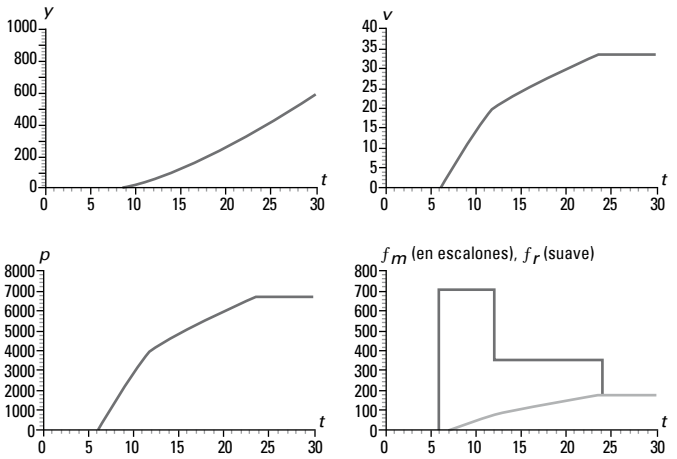


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y (1) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para el momentum y la distancia recorrida con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8) y (3), y derivando (1) e insertando (3):

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{T(t)}{r} - \left(D_1 + D_2 \cdot \left| \frac{p(t)}{m} \right| \right) \cdot \frac{p(t)}{m} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m} \qquad \text{(a2)}$$

Al respecto, derivando (a2) e insertando (a1) y (a2) invertida:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{T(t)}{m \cdot r} - \left(\frac{D_1}{m} + \frac{D_2}{m} \cdot \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| \right) \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

CC BY NC ND

39.0

UNA CARGA Y UN MONTACARGAS (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos una carga pesada colgada en un extremo de un cable, cuyo otro extremo gira en torno a un gancho de un montacargas con desplazamiento horizontal.

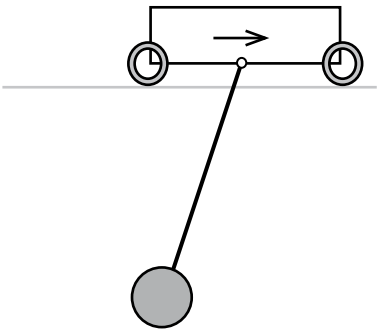


Fig. 1: Una carga y un montacargas

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones de la carga y el montacargas, suponiendo que el momentum de inercia de la carga, los de las ruedas, la masa del cable y los roces son insignificantes; y suponiendo también que un torque mueve al montacargas mediante sus ruedas.

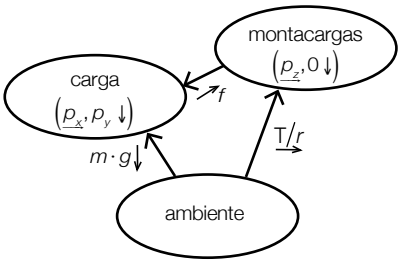


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es la posición vertical de la carga, en [m] sobre el suelo; $x(t)$ es su posición horizontal, en [m] hacia la derecha de una referencia vertical; $z(t)$ es la posición horizontal del gancho del montacargas, en [m] hacia la derecha de la referencia:

$$h\left(t\right) = H - y\left(t\right) \tag{1}$$

$$x\left(t\right) = x\left(0\right) + \int_0^t v_x\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

BY NC ND

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(\tau) \cdot d\tau \tag{3}$$

H es la posición vertical del gancho del montacargas, en [m] sobre el suelo; $y(t)$ es la distancia vertical desde el gancho hasta la carga, en [m] hacia abajo; $x(0)$ es la posición horizontal de la carga inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_x(t)$ es la velocidad horizontal de la carga, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $z(0)$ es la posición horizontal del gancho inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_z(t)$ es la velocidad horizontal del gancho, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$H = 4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(\tau) \cdot d\tau \tag{5}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$v_x(t) = \frac{p_x(t)}{m} \tag{7}$$

$$z(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$v_z(t) = \frac{p_z(t)}{m_z} \tag{9}$$

$y(0)$ es la distancia vertical desde el gancho hasta la carga inicialmente, en [m] hacia abajo; $v_y(t)$ es la velocidad vertical de la carga, en [m s^{-1}] hacia abajo; $p_x(t)$ es el momentum horizontal en la carga, en [N s] hacia la derecha; m es la masa en la carga, en [kg]; $p_z(t)$ es el momentum horizontal en el montacargas, en [N s] hacia la derecha; m_z es la masa en el montacargas, en [kg]:

$$y(0) = 3.02 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$v_y(t) = \frac{p_y(t)}{m} \tag{11}$$

$$p_x(t) = p_x(0) + \int_0^t \left(\left(+f(\tau) \cdot \frac{z(\tau) - x(\tau)}{l(\tau)} \right) \right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$m = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$p_z(t) = p_z(0) + \int_0^t \left(\left(+ \frac{\mathrm{T}(\tau)}{r} \right) - \left(+f(\tau) \cdot \frac{z(\tau) - x(\tau)}{l(\tau)} \right) \right) \cdot d\tau \tag{14}$$

$$m_z = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$p_y(t)$ es el momentum vertical en la carga, en [N s] hacia abajo; $p_x(0)$ es el momentum horizontal en la carga inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f(t)$ es la fuerza del montacargas a la carga por elasticidad del cable, en [N] hacia el montacargas; $l(t)$ es la longitud del cable, en [m]; $p_z(0)$ es el momentum horizontal en el montacargas inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $\mathrm{T}(t)$ es el torque del ambiente al montacargas mediante un motor, en [N m] con sentido horario; r es el radio de las ruedas, en [m]:

CC BY NC ND

$$p_y(t) = p_y(0) + \int_0^t \left(\left(-f(\tau) \cdot \frac{y(\tau)}{l(\tau)} \right) + (+m \cdot g) \right) \cdot d\tau \tag{16}$$

$$p_x(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$f(t) = K \cdot (l(t) - L) \tag{18}$$

$$l(t) = \sqrt{(z(t) - x(t))^2 + y^2(t)} \tag{19}$$

$$p_z(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$\mathrm{T}(t) = \begin{cases} +10 & \text{si } 0 \le t < 10 \\ -100 & \text{si } 10 \le t < 12 \\ 0 & \text{si } 12 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$r = 0.1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$p_y(0)$ es el momentum vertical en la carga inicialmente, en [N s] hacia abajo; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; K es el coeficiente de elasticidad del cable, en [N m^{-1}]; L es la longitud del cable cuando está relajado, en [m]:

$$p_y(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$g = 9.8 \tag{24}$$

$$K = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$L = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: h depende de y; x, de v_x; z, de v_z; y, de v_y; v_x, de p_x; v_z, de p_z; v_y, de p_y; p_x, de f, z, x y l; p_z, de T, f, z, x y l; p_y, de f, y y l; f, de l; y l, de z, x e y (según (1), (2), (3), (5), (7), (9), (11), (12), (14), (16), (18) y (19), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (10), (13), (15), (17), (20), (22), (23), (24), (25) y (26) no contienen ninguna variable que evoluciona: (21) contiene 1; (1), (2), (3), (5) y (18) contienen 2 cada una; (7), (9) y (11), 3; (16) y (19), 4; (12), 5; (14), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 13 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^5 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^1 \cdot 6^1$ (=414720) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(26).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(12), (14) y (16) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 414720 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(26), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^5 \cdot 3^3 \cdot 4^1$ (=3456).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 3456 sistemas de ecuaciones restantes, 3455 tienen por lo menos una

CC BY NC ND

variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(26).

Si nos interesan las evoluciones de las posiciones *h, x* y *z*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (3), (5), (12), (14) y (16); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *x* inicial, *y* inicial, *z* inicial, p_x inicial, p_y inicial, p_z inicial, *T, H, m, m*$_z$, *r, K L, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(26) como:

$H = \ldots$ (4′)

$m = \ldots$ (13′)

$m_z = \ldots$ (15′)

$r = \ldots$ (22′)

$K = \ldots$ (25′)

$L = \ldots$ (26′)

$x_0 = \ldots$ (6′)

$y_0 = \ldots$ (10′)

$z_0 = \ldots$ (8′)

$p_{x,0} = \ldots$ (17′)

$p_{y,0} = \ldots$ (23′)

$p_{z,0} = \ldots$ (20′)

$g = 9.8$ (24′)

$T_k = \ldots$ (21′)

$h_k = H - y_k$ (1′)

$$l_k = \sqrt{\left(z_k - x_k\right)^2 + y_k^2}$$ (19′)

$$v_{x,k} = \frac{p_{x,k}}{m}$$ (7′)

$$v_{y,k} = \frac{p_{y,k}}{m}$$ (11′)

$$v_{z,k} = \frac{p_{z,k}}{m_z}$$ (9′)

$$f_k = K \cdot \left(l_k - L\right)$$ (18′)

$$x_{k+1} = x_k + v_{x,k} \cdot dt$$ (2′)

$$y_{k+1} = y_k + v_{y,k} \cdot dt$$ (5′)

$$z_{k+1} = z_k + v_{z,k} \cdot dt$$ (3′)

$$p_{x,k+1} = p_{x,k} + f_k \cdot \frac{z_k - x_k}{l_k} \cdot dt$$ (12′)

CC BY NC ND

$$p_{y,k+1} = p_{y,k} + \left(-f_k \cdot \frac{y_k}{l_k} + m \cdot g \right) \cdot dt \qquad (16')$$

$$p_{z,k+1} = p_{z,k} + \left(\frac{\mathrm{T}_k}{r} - f_k \cdot \frac{z_k - x_k}{l_k} \right) \cdot dt \qquad (14')$$

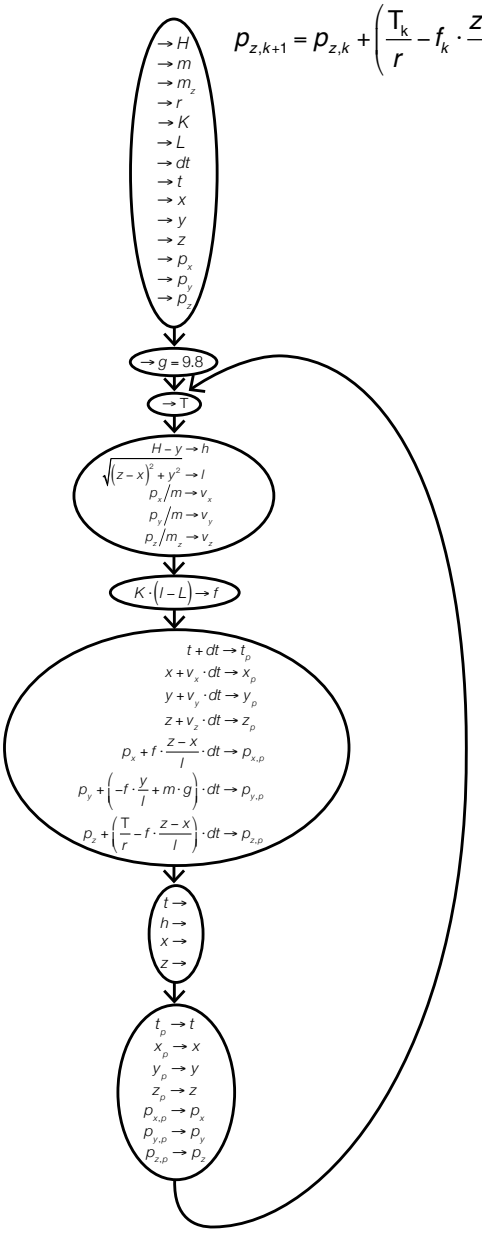


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

CC BY NC ND

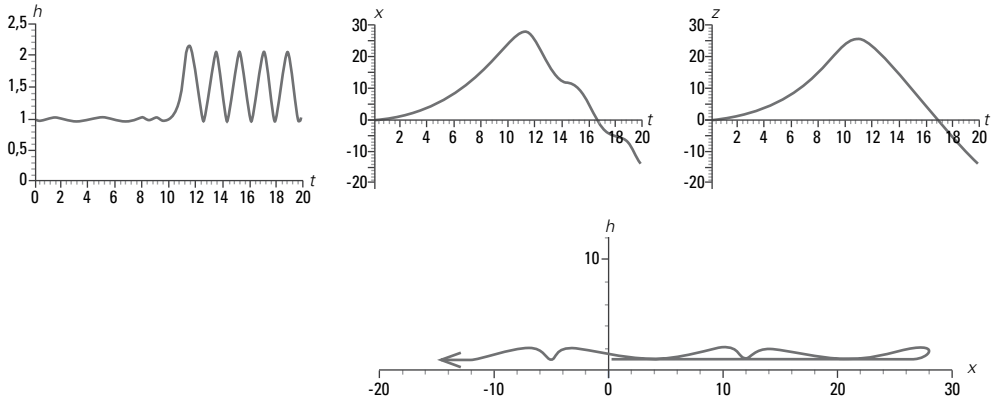


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), (3), (5), (12), (14) y (16) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las distancias recorridas y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (7), derivando (5) e insertando (11), derivando (3) e insertando (9), derivando (12) e insertando (18) y (19), derivando (16) e insertando (18) y (19), y derivando (14) e insertando (18) y (19):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p_x(t)}{m} \tag{a1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p_y(t)}{m} \tag{a2}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{p_z(t)}{m_z} \tag{a3}$$

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot \left(z(t) - x(t)\right) \tag{a4}$$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = m \cdot g - K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot y(t) \tag{a5}$$

$$\frac{dp_z(t)}{dt} = \frac{\mathrm{T}(t)}{r} - K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot \left(z(t) - x(t)\right) \tag{a6}$$

Si nos interesa la evolución de la altura de la carga desde el suelo, aceptando (a2) y considerando (1):

CC BY NC ND

$$h(t) = H - y(t) \tag{a7}$$

Apéndice acerca de más ecuaciones diferenciales y de una compactación si el cable es muy rígido longitudinalmente.

Derivando (a1) e insertando (a4), derivando (a2) e insertando (a5), y derivando (a3) e insertando (a6):

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot \left(z(t) - x(t) \right)$$

$$m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} = m \cdot g - K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot y(t)$$

$$m_z \cdot \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{\mathrm{T}(t)}{r} - K \cdot \left(1 - \frac{L}{\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)}} \right) \cdot \left(z(t) - x(t) \right)$$

Considerando (18) y (19), las tres ecuaciones anteriores pueden replantearse como:

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) \cdot \frac{z(t) - x(t)}{l(t)}$$

$$m \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} = m \cdot g - f(t) \cdot \frac{y(t)}{l(t)}$$

$$m_z \cdot \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{\mathrm{T}(t)}{r} - f(t) \cdot \frac{z(t) - x(t)}{l(t)}$$

Si K tiende a ∞, $l(t)$ tiende a L.
En el límite:

$$\sqrt{\left(z(t) - x(t)\right)^2 + y^2(t)} = l(t) = L$$

Elevando al cuadrado y derivando:

$$\left(z(t) - x(t) \right) \cdot \left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right) + y(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = 0$$

Volviendo a derivar e insertando las tres ecuaciones replanteadas recién:

CC BY NC ND

$$\left(\frac{dz(t)}{dt}-\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(z(t)-x(t)\right)\cdot\left(\frac{1}{m_z}\cdot\left(\frac{T(t)}{r}-f(t)\cdot\frac{z(t)-x(t)}{L}\right)-\frac{1}{m}\cdot f(t)\cdot\frac{z(t)-x(t)}{L}\right)$$
$$+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+y(t)\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(-f(t)\cdot\frac{y(t)}{L}+m\cdot g\right)=0$$

En consecuencia:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{1}{m}\cdot f(t)\cdot\frac{z(t)-x(t)}{L}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=g-\frac{1}{m}\cdot f(t)\cdot\frac{y(t)}{L}$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2}=\frac{T(t)}{m_z\cdot r}-\frac{1}{m_z}\cdot f(t)\cdot\frac{z(t)-x(t)}{L}$$

$$f(t)=\frac{\frac{1}{m_z}\cdot\frac{z(t)-x(t)}{r}\cdot T(t)+y(t)\cdot g+\left(\frac{dz(t)}{dt}-\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}{\frac{1}{m}\cdot\frac{y^2(t)}{L}+\left(\frac{1}{m_z}+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{\left(z(t)-x(t)\right)^2}{L}}$$

CC BY NC ND

40.0

UN PÉNDULO INVERTIDO SOBRE UN CARRO (MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un cuerpo pesado fijo en un extremo de una barra liviana, cuyo otro extremo gira en torno a un eje montado en la superficie superior de un carro con desplazamiento horizontal. Con el carro detenido, el cuerpo debiera caer, tendiendo a comportarse como un péndulo; con el carro moviéndose adecuadamente, podría mantenerse en alto, comportándose como un péndulo invertido.

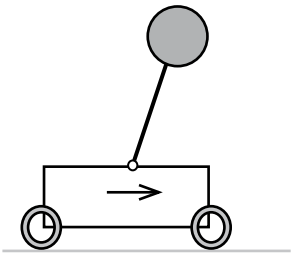


Fig. 1: Un péndulo invertido sobre un carro con desplazamiento horizontal

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones del cuerpo y del carro, suponiendo que son insignificantes el momentum de inercia del cuerpo, los de las ruedas, la masa de la barra y los roces, y suponiendo también que un torque mueve al carro mediante sus ruedas.

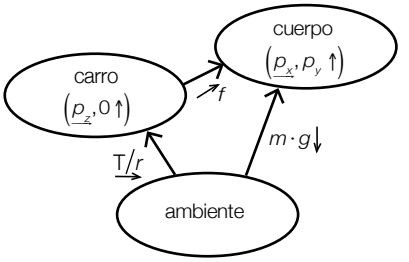


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y(t)$ es la distancia vertical desde el eje de giro de la barra hasta el cuerpo, en [m] hacia arriba; $x(t)$ es la posición horizontal del cuerpo, en [m] hacia la derecha de una referencia vertical; $z(t)$ es la posición horizontal del eje de giro de la barra, en [m] hacia la derecha de la referencia:

$$y\left(t\right) = y\left(0\right) + \int_0^t v_y\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{1}$$

$$x\left(t\right) = x\left(0\right) + \int_0^t v_x\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{2}$$

BY NC ND

$$z\left(t\right) = z\left(0\right) + \int_0^t v_z\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{3}$$

$y(0)$ es la distancia vertical desde el eje de giro hasta el cuerpo inicialmente, en [m]; $v_y(t)$ es la velocidad vertical del cuerpo, en [m s^{-1}] hacia arriba; $x(0)$ es la posición horizontal del cuerpo inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_x(t)$ es la velocidad horizontal del cuerpo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $z(0)$ es la posición horizontal del eje de giro inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_z(t)$ es la velocidad horizontal del eje de giro, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$y\left(0\right) = 0.99 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$v_y\left(t\right) = \frac{p_y\left(t\right)}{m} \tag{5}$$

$$x\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$v_x\left(t\right) = \frac{p_x\left(t\right)}{m} \tag{7}$$

$$z\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$v_z\left(t\right) = \frac{p_z\left(t\right)}{m_z} \tag{9}$$

$p_y(t)$ es el momentum vertical en el cuerpo, en [N s] hacia arriba; m es la masa en el cuerpo, en [kg]; $p_x(t)$ es el momentum horizontal en el cuerpo, en [N s] hacia la derecha; $p_z(t)$ es el momentum horizontal en el carro donde está montado el eje de giro de la barra, en [N s] hacia la derecha; m_z es la masa en el carro, en [kg]:

$$p_y\left(t\right) = p_y\left(0\right) + \int_0^t \left(\left(+f\left(\tau\right) \cdot \frac{y\left(\tau\right)}{l\left(\tau\right)} \right) + \left(-m \cdot g \right) \right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$p_x\left(t\right) = p_x\left(0\right) + \int_0^t \left(\left(+f\left(\tau\right) \cdot \frac{x\left(\tau\right) - z\left(\tau\right)}{l\left(\tau\right)} \right) \right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$p_z\left(t\right) = p_z\left(0\right) + \int_0^t \left(\left(+\frac{\mathrm{T}\left(\tau\right)}{r} \right) - \left(+f\left(\tau\right) \cdot \frac{x\left(\tau\right) - z\left(\tau\right)}{l\left(\tau\right)} \right) \right) \cdot d\tau \tag{13}$$

$$m_z = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$p_y(0)$ es el momentum vertical en el cuerpo inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f(t)$ es la fuerza del carro al cuerpo por elasticidad de la barra, en [N] hacia el cuerpo; $L(t)$ es la longitud de la barra, en [m]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; $\mathbf{T}(t)$ es el torque del ambiente al carro mediante un motor, en [N m] con sentido horario; r es el radio de las ruedas, en [m]; $p_x(0)$ es el momentum horizontal en el cuerpo inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $p_z(0)$ es el momentum horizontal en el carro inicialmente, en [N s] hacia la derecha:

CC BY NC ND

$$p_y\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$f\left(t\right) = K \cdot \left(L - l\left(t\right)\right) \tag{16}$$

$$l\left(t\right) = \sqrt{\left(x\left(t\right) - z\left(t\right)\right)^2 + y^2\left(t\right)} \tag{17}$$

$$g = 9.8 \tag{18}$$

$$p_x\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$p_z\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$\mathrm{T}\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 5 \\ 3 & \text{si } 5 < \mathrm{t} \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$r = 0.025 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

K es el coeficiente de elasticidad de la barra, en [N m^{-1}]; *L* es la longitud de la barra cuando está relajada, en [m]:

$$K = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$L = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: *y* depende de v_y; *x*, de v_x; *z*, de v_z; v_y, de p_y; v_x, de p_x; v_z, de p_z; p_y, de *f, y* y *l*; p_x, de *f, x, z* y *l*; p_z, de *T, f, x, z* y *l*; *f*, de *l*; y l, de *x, z* e *y* (según (1), (2), (3), (5), (7), (9), (10), (12), (13), (16) y (17), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (11), (14), (15), (18), (19), (20), (22), (23) y (24) no contienen ninguna variable que evoluciona: (21) contiene 1; (1), (2), (3), (5), (7), (9) y (16) contienen 2 cada una; (10) y (17), 4; (12) y (13), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^7 \cdot 4^2 \cdot 5^2$ (=51200) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(24).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(10), (12) y (13) tiene momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 51200 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(24), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^7 \cdot 2^4 \cdot 4^1$ (=320).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 320 sistemas de ecuaciones restantes, 319 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(24).

Si nos interesan las evoluciones de *y, x* y *z*; si queremos hacer predicciones

BY NC ND

usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (10), (12) y (13); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *x* inicial, *z* inicial, p_y inicial, p_x inicial, p_z inicial, *T, m,* m_z, *r, K* y *L*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(24) como:

$$m = \ldots \quad (11')$$

$$m_z = \ldots \quad (14')$$

$$r = \ldots \quad (22')$$

$$K = \ldots \quad (23')$$

$$L = \ldots \quad (24')$$

$$y_0 = \ldots \quad (4')$$

$$x_0 = \ldots \quad (6')$$

$$z_0 = \ldots \quad (8')$$

$$p_{y,0} = \ldots \quad (15')$$

$$p_{x,0} = \ldots \quad (19')$$

$$p_{z,0} = \ldots \quad (20')$$

$$g = 9.8 \quad (18')$$

$$\mathrm{T}_k = \ldots \quad (21')$$

$$l_k = \sqrt{\left(x_k - z_k\right)^2 + y_k^2} \quad (17')$$

$$v_{y,k} = \frac{p_{y,k}}{m} \quad (5')$$

$$v_{x,k} = \frac{p_{x,k}}{m} \quad (7')$$

$$v_{z,k} = \frac{p_{z,k}}{m_z} \quad (9')$$

$$f_k = K \cdot \left(L - l_k\right) \quad (16')$$

$$y_{k+1} = y_k + v_{y,k} \cdot dt \quad (1')$$

$$x_{k+1} = x_k + v_{x,k} \cdot dt \quad (2')$$

$$z_{k+1} = z_k + v_{z,k} \cdot dt \quad (3')$$

$$p_{y,k+1} = p_{y,k} + \left(f_k \cdot \frac{y_k}{l_k} - m \cdot g\right) \cdot dt \quad (10')$$

$$p_{x,k+1} = p_{x,k} + f_k \cdot \frac{x_k - z_k}{l_k} \cdot dt \quad (12')$$

$$p_{z,k+1} = p_{z,k} + \left(\frac{\mathrm{T}_k}{r} - f_k \cdot \frac{x_k - z_k}{l_k}\right) \cdot dt \quad (13')$$

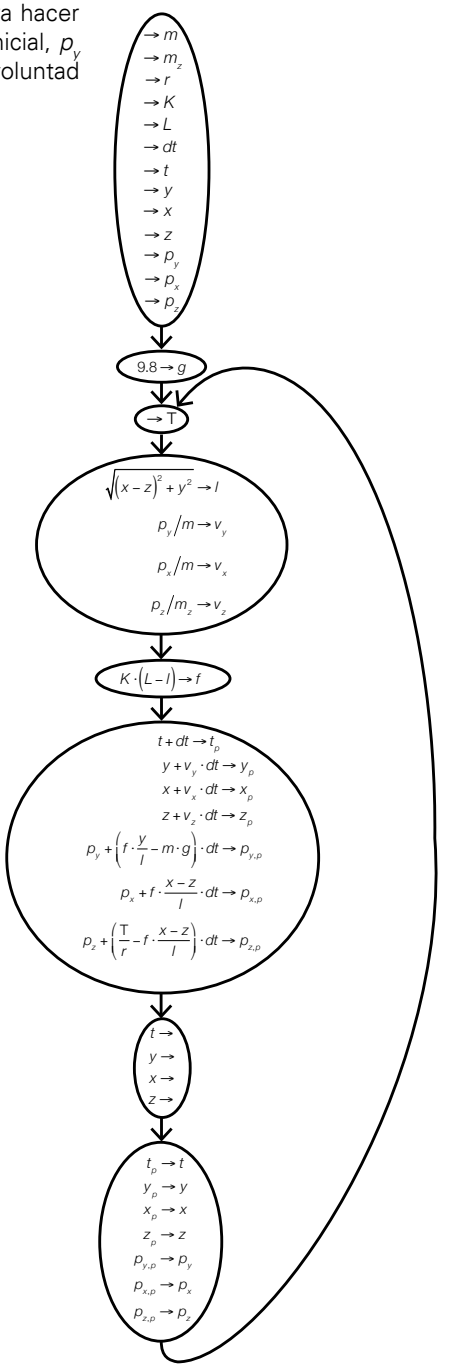


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

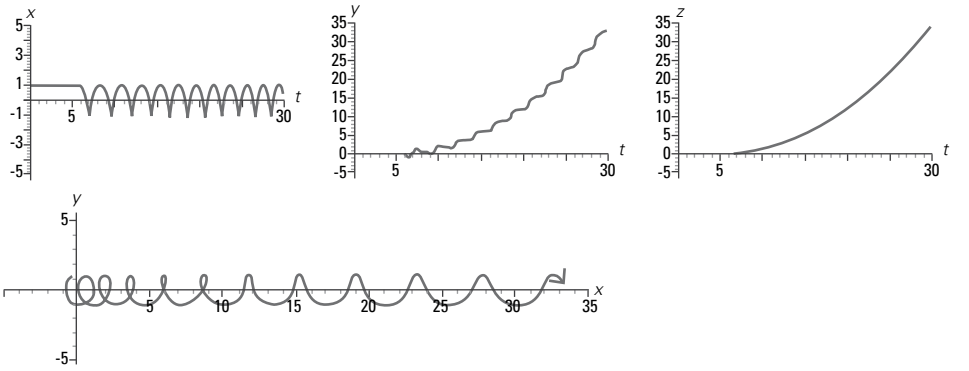


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (10), (12) y (13) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las posiciones y momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (5), derivando (2) e insertando (7), derivando (3) e insertando (9), derivando (10) e insertando (16) y (17), derivando (12) e insertando (16) y (17), y derivando (13) e insertando (16) y (17):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p_y(t)}{m} \tag{a1}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p_x(t)}{m} \tag{a2}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{p_z(t)}{m_z} \tag{a3}$$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - z(t)\right)^2 + y^2(t)}} - 1 \right) \cdot y(t) - m \cdot g \tag{a4}$$

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - z(t)\right)^2 + y^2(t)}} - 1 \right) \cdot \left(x(t) - z(t)\right) \tag{a5}$$

$$\frac{dp_z(t)}{dt} = \frac{\mathrm{T}(t)}{r} - K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - z(t)\right)^2 + y^2(t)}} - 1 \right) \cdot \left(x(t) - z(t)\right) \tag{a6}$$

CC BY NC ND

Apéndice acerca de más ecuaciones diferenciales y de una compactación si la barra es muy rígida.

Derivando (a1) e insertando (a4), derivando (a2) e insertando (a5), y derivando (a3) e insertando (a6):

$$m\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}=K\cdot\left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t)-z(t)\right)^2+y^2(t)}}-1\right)\cdot y(t)-m\cdot g$$

$$m\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2}=K\cdot\left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t)-z(t)\right)^2+y^2(t)}}-1\right)\cdot\left(x(t)-z(t)\right)$$

$$m_z\cdot\frac{d^2z(t)}{dt^2}=\frac{\mathrm{T}(t)}{r}-K\cdot\left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t)-z(t)\right)^2+y^2(t)}}-1\right)\cdot\left(x(t)-z(t)\right)$$

Considerando (16) y (17), las tres ecuaciones anteriores pueden replantearse como:

$$m\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}=f(t)\cdot\frac{y(t)}{l(t)}-m\cdot g$$

$$m\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2}=f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{l(t)}$$

$$m_z\cdot\frac{d^2z(t)}{dt^2}=\frac{\mathrm{T}(t)}{r}-f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{l(t)}$$

Si K tiende a ∞, $l(t)$ tiende a L.
En el límite:

$$\sqrt{\left(z(t)-x(t)\right)^2+y^2(t)}=l(t)=L$$

Elevando al cuadrado y derivando:

$$\left(x(t)-z(t)\right)\cdot\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dz(t)}{dt}\right)+y(t)\cdot\frac{dy(t)}{dt}=0$$

Volviendo a derivar e insertando las tres ecuaciones replanteadas recién:

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dz(t)}{dt}\right)^2+\left(x(t)-z(t)\right)\cdot\left(\frac{1}{m}\cdot f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{L}-\frac{1}{m_z}\cdot\left(\frac{\mathrm{T}(t)}{r}-f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{L}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2+y(t)\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(f(t)\cdot\frac{y(t)}{L}-m\cdot g\right)=0$$

BY NC ND

En consecuencia:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\cdot f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{L}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\cdot\left(f(t)\cdot\frac{y(t)}{L}-m\cdot g\right)$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_z}\cdot\left(\frac{T(t)}{r}-f(t)\cdot\frac{x(t)-z(t)}{L}\right)$$

$$f(t) = \frac{\frac{1}{m_z}\cdot\frac{x(t)-z(t)}{r}\cdot T(t)+y(t)\cdot g-\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dz(t)}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}{\frac{1}{m}\cdot\frac{y^2(t)}{L_0}+\left(\frac{1}{m_z}+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{\left(x(t)-z(t)\right)^2}{L}}$$

CC BY NC ND

41.0

UN PÉNDULO INVERTIDO SOBRE UNA RUEDA (MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

Imaginemos un cuerpo pesado fijo en un extremo de una barra liviana, cuyo otro extremo gira en torno a un eje montado en la periferia de una rueda vertical cuyo eje, a su vez, está quieto. Con la rueda detenida, el cuerpo debiera caer, tendiendo a comportarse como un péndulo; con la rueda moviéndose adecuadamente, podría mantenerse en alto, comportándose como un péndulo invertido.

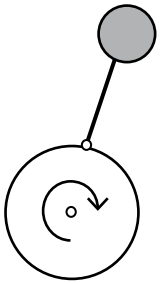


Fig. 1: Péndulo invertido en una rueda

Interesa predecir las evoluciones de las posiciones del cuerpo y de la rueda, suponiendo que son insignificantes el momentum de inercia del cuerpo, la masa de la barra y los roces, y suponiendo también que un torque mueve a la rueda.

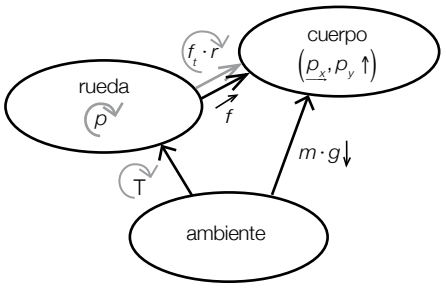


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y(t)$ es la distancia vertical desde el eje de giro de la rueda hasta el cuerpo, hacia arriba, en [m]; $x(t)$ es la distancia horizontal desde el eje de giro de la rueda hasta el cuerpo, hacia la derecha, en [m]; $\theta(t)$ es el ángulo desde la vertical sobre el eje de giro de la rueda hasta el eje de giro de la barra, en [rad] con sentido horario:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(\tau) \cdot d\tau \qquad (2)$$

BY NC ND

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau \tag{3}$$

$y(0)$ es la distancia vertical desde el eje de giro de la rueda hasta el cuerpo inicialmente, en [m] hacia arriba; $v_y(t)$ es la velocidad vertical del cuerpo, en [m s^{-1}] hacia arriba; $x(0)$ es la distancia horizontal desde el eje de giro de la rueda hasta el cuerpo inicialmente, en [m] hacia la derecha; $v_x(t)$ es la velocidad horizontal del cuerpo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $\theta(t)$ es el ángulo desde la vertical sobre el eje de giro de la rueda hasta el eje de giro de la barra inicialmente, en [rad] con sentido horario; $\omega(t)$ es la velocidad angular de la rueda, en [rad s^{-1}] con sentido horario:

$$y(0) = 1.24 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$v_y(t) = \frac{p_y(t)}{m} \tag{5}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$v_x(t) = \frac{p_x(t)}{m} \tag{7}$$

$$\theta(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$\omega(t) = \frac{p(t)}{J} \tag{9}$$

$p_y(t)$ es el momentum vertical en el cuerpo, en [N s] hacia arriba; m es la masa en el cuerpo, en [kg]; $p_x(t)$ es el momentum horizontal en el cuerpo, en [N s] hacia la derecha; $p(t)$ es el momentum angular en la rueda, en [N m s] con sentido horario; J es el momentum de inercia de la rueda, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p_y(t) = p_y(0) + \int_0^t \left(\left(+f(\tau) \cdot \frac{y(\tau) - r \cdot \cos(\theta(\tau))}{l(\tau)} \right) + (-m \cdot g) \right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$p_x(t) = p_x(0) + \int_0^t \left(\left(+f(\tau) \cdot \frac{x(\tau) - r \cdot \sin(\theta(\tau))}{l(\tau)} \right) \right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left((+\mathrm{T}(\tau)) - (+f_t(\tau) \cdot r) \right) \cdot d\tau \tag{13}$$

$$J = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$p_y(0)$ es el momentum vertical en el cuerpo inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f(t)$ es la fuerza de la rueda al cuerpo por elasticidad de la barra, en [N] hacia el cuerpo; r es el radio de la rueda, en [m]; $l(t)$ es la longitud de la barra, en [m]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; $p_x(0)$ es el momentum horizontal en el cuerpo inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $p(0)$ es el momentum angular en la rueda inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $\mathrm{T}(t)$ es el torque del ambiente a la rueda mediante un motor, en [N m] con sentido horario; $f_t(t)$ es la componente de $f(t)$ que es tangente a la rueda, en [N] con sentido horario:

CC BY NC ND

$$p_y\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$f\left(t\right) = K \cdot \left(L - l\left(t\right)\right) \tag{16}$$

$$r = 0.25 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$l\left(t\right) = \sqrt{\left(x\left(t\right) - r \cdot \sin\left(\theta\left(t\right)\right)\right)^2 + \left(y\left(t\right) - r \cdot \cos\left(\theta\left(t\right)\right)\right)^2} \tag{18}$$

$$g = 9.8 \tag{19}$$

$$p_z\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$\mathrm{T}\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 5 \\ 30 & \text{si } 5 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$f_t\left(t\right) = f\left(t\right) \cdot \frac{x\left(t\right) \cdot \cos\left(\theta\left(t\right)\right) - y\left(t\right) \cdot \sin\left(\theta\left(t\right)\right)}{l\left(t\right)} \tag{23}$$

K es el coeficiente de elasticidad de la barra, en [N m^{-1}]; *L* es la longitud de la barra cuando está relajada, en [m]:

$$K = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$L = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: *y* depende de v_y; *x*, de v_x; θ, de ω; v_y, de p_y; v_x, de p_x; ω, de *p*; p_y, de *f*, *y*, θ y *l*; p_x, de *f*, *x*, θ y *l*; *p*, de *T* y f_t; *f*, de *l*; *l*, de *x*, θ e *y*; y f_t de *x*, θ, *y* y *l* (según (1), (2), (3), (5), (7), (9), (10), (12), (13), (16), (18) y (23), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (11), (14), (15), (17), (19), (20), (21), (24) y (25) no contienen ninguna variable que evoluciona: (22) contiene 1; (1), (2), (3), (5), (7), (9) y (16) contienen 2 cada una; (13), 3; (18), 4; (10) y (12), 5; (23), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 13 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^7 \cdot 3^1 \cdot 4^1 \cdot 5^2 \cdot 6^1$ (=230400) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(25).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todas las fuerzas.

(10), (12) y (13) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 230400 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(25), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^7 \cdot 4^1 \cdot 6^1$ (=3072).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 3072 sistemas de ecuaciones restantes, 3071 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente

BY NC ND

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(25).

Si nos interesan las evoluciones de *y*, *x* y θ; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (10), (12) y (13); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *x* inicial, θ inicial, p_y inicial, p_x inicial, *p* inicial, *T, m, J, r, K* y *L*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(25) como:

$$m = \ldots \tag{11'}$$

$$J = \ldots \tag{14'}$$

$$r = \ldots \tag{17'}$$

$$K = \ldots \tag{24'}$$

$$L = \ldots \tag{25'}$$

$$y_0 = \ldots \tag{4'}$$

$$x_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$\theta_0 = \ldots \tag{8'}$$

$$p_{y,0} = \ldots \tag{15'}$$

$$p_{x,0} = \ldots \tag{20'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{21'}$$

$$g = 9.8 \tag{19'}$$

$$\mathrm{T}_k = \ldots \tag{22'}$$

$$l_k = \sqrt{\left(x_k - r \cdot \sin\left(\theta_k\right)\right)^2 + \left(y_k - r \cdot \cos\left(\theta_k\right)\right)^2} \tag{18'}$$

$$v_{y,k} = \frac{p_{y,k}}{m} \tag{5'}$$

$$v_{x,k} = \frac{p_{x,k}}{m} \tag{7'}$$

$$\omega_k = \frac{p_k}{J} \tag{9'}$$

$$f_k = K \cdot \left(L - l_k\right) \tag{16'}$$

$$f_{t,k} = f_k \cdot \frac{x_k \cdot \cos\left(\theta_k\right) - y_k \cdot \sin\left(\theta_k\right)}{l_k} \tag{23'}$$

$$y_{k+1} = y_k + v_{y,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$x_{k+1} = x_k + v_{x,k} \cdot dt \tag{2'}$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k \cdot dt \tag{3'}$$

$$p_{y,k+1} = p_{y,k} + \left(f_k \cdot \frac{y_k - r \cdot \cos\left(\theta_k\right)}{l_k} - m \cdot g\right) \cdot dt \tag{10'}$$

$$p_{x,k+1} = p_{x,k} + f_k \cdot \frac{x_k - r \cdot \sin\left(\theta_k\right)}{l_k} \cdot dt \tag{12'}$$

CC BY NC ND

$$p_{k+1} = p_k + \left(\mathsf{T}_k - f_{t,k} \cdot r\right) \cdot dt \qquad (13')$$

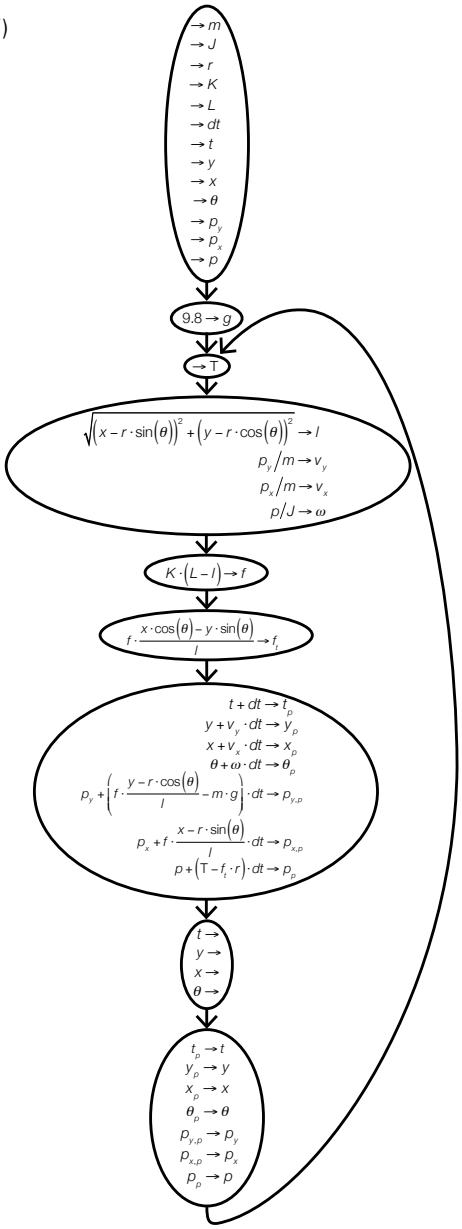


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

CC BY NC ND

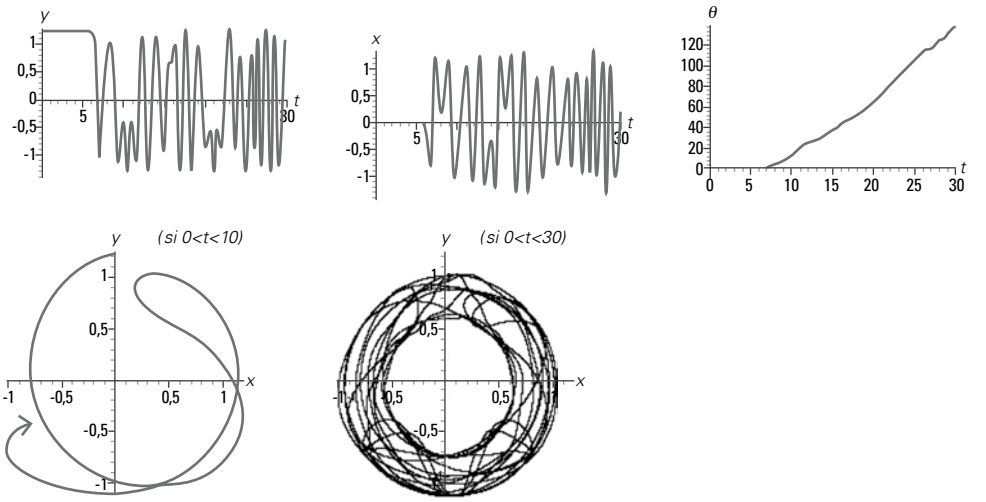


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (10), (12) y (13) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las posiciones y momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (5), derivando (2) e insertando (7), derivando (3) e insertando (9), derivando (10) e insertando (16) y (18), derivando (12) e insertando (16) y (18), y derivando (13) e insertando (23), (16) y (18):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p_y(t)}{m} \tag{a1}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p_x(t)}{m} \tag{a2}$$

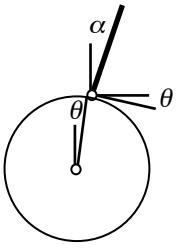
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{p(t)}{J} \tag{a3}$$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - r \cdot \sin\left(\theta(t)\right)\right)^2 + \left(y(t) - r \cdot \cos\left(\theta(t)\right)\right)^2}} - 1 \right) \cdot \left(y(t) - r \cdot \cos\left(\theta(t)\right)\right) - m \cdot g \tag{a4}$$

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - r \cdot \sin\left(\theta(t)\right)\right)^2 + \left(y(t) - r \cdot \cos\left(\theta(t)\right)\right)^2}} - 1 \right) \cdot \left(x(t) - r \cdot \sin\left(\theta(t)\right)\right) \tag{a5}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = T(t) - K \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\left(x(t) - r \cdot \sin\left(\theta(t)\right)\right)^2 + \left(y(t) - r \cdot \cos\left(\theta(t)\right)\right)^2}} - 1 \right) \cdot \left(x(t) \cdot \cos\left(\theta(t)\right) - y(t) \cdot \sin\left(\theta(t)\right)\right) \cdot r \tag{a6}$$

BY NC ND



$$f_t = f \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= f \cdot \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\alpha) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\alpha)\right)$$

$$= f \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\theta) \cdot \sin(\alpha)\right) = f \cdot \sin(\alpha - \theta)$$

$$= f \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot \frac{y - r \cdot \cos(\theta)}{L} + \cos(\theta) \cdot \frac{x - r \cdot \sin(\theta)}{L}\right)$$

$$f_t = f \cdot \frac{x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta)}{L}$$

BY NC ND

42.0

DOS RUEDAS ENGRANADAS (MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

Imaginemos dos ruedas cuyos ejes son mantenidos fijos, horizontales y paralelos entre sí (por fuerzas sospechosamente complacientes, que ignoramos), de manera que ambas ruedas quedan engranadas sin resbalamiento en sus superficies externas. Una de las ruedas recibe un torque en torno a su eje por la existencia de un motor allí y la otra, un torque en torno al suyo por roce.

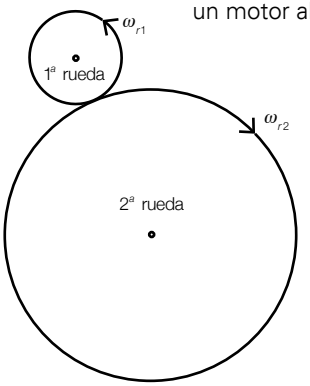


Fig. 1: Dos ruedas engranadas (la primera con motor en el eje, y la segunda con roce en el eje)

Interesa predecir la evolución de la velocidad angular de la segunda rueda.

Saltemos la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$\omega_{r2}(t)$ es la velocidad angular de la segunda rueda, en [rad s^{-1}] con sentido horario:

$$\omega_{r2}\left(t\right) = \frac{p_{r2}\left(t\right)}{J_{r2}} \tag{1}$$

$p_{r2}(t)$ es el momentum angular en la segunda rueda, en [N m s] con sentido horario; J_{r2} es el momentum de inercia de la segunda rueda, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p_{r2}\left(t\right) = p_{r2}\left(0\right) + \int_0^t \left(\left(+f_{r1r2}\left(\tau\right)\right)\cdot r_{r2} - D\cdot\omega_{r2}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

$$J_{r2} = \frac{1}{2}\cdot m_{r2}\cdot r_{r2}^2 \tag{3}$$

$p_{r2}(0)$ es el momentum angular en la segunda rueda inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $f_{r1r2}(t)$ es la fuerza de la primera rueda a la segunda, en [N] con dirección perpendicular a la de separación entre ambos ejes y sentido parecido a los de las velocidades angulares de las ruedas en el punto de acoplamiento; r_{r2} es el radio de la segunda rueda, en [m]; D es el coeficiente de roce angular entre la segunda rueda y su eje, en [N m rad^{-1} s]; m_{r2} es la masa en la segunda rueda, en [kg]:

CC BY NC ND

$$p_{r2}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$f_{r1r2}\left(t\right) = K \cdot \left(\theta_{r1}\left(t\right) \cdot r_{r1} - \theta_{r2}\left(t\right) \cdot r_{r2}\right) \tag{5}$$

$$r_{r2} = 0.3 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$D = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$m_{r2} = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

K es un coeficiente relativo a la elasticidad entre ambas ruedas, en [N rad^{-1} s]; $\theta_{r1}(t)$ es la posición angular de la primera rueda, en [rad] con sentido anti-horario desde la dirección de separación entre ambos ejes; r_{r1} es el radio de la primera rueda, en [m]; $\theta_{r2}(t)$ es la posición angular de la segunda rueda, en [rad] con sentido horario desde la dirección de separación entre ambos ejes:

$$K = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$\theta_{r1}\left(t\right) = \theta_{r1}\left(0\right) + \int_0^t \omega_{r1}\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$r_{r1} = 0.05 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\theta_{r2}\left(t\right) = \theta_{r2}\left(0\right) + \int_0^t \omega_{r2}\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$\theta_{r1}(0)$ es la posición angular de la primera rueda inicialmente, en [rad] con sentido anti-horario desde la dirección de separación entre ambos ejes; $\omega_{r1}(t)$ es la velocidad angular de la primera rueda, en [rad s^{-1}] con sentido anti-horario; $\theta_{r2}(0)$ es la posición angular de la segunda rueda inicialmente, en [rad] con sentido horario desde la dirección de separación entre ambos ejes:

$$\theta_{r1}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$\omega_{r1}\left(t\right) = \frac{p_{r1}\left(t\right)}{J_{r1}} \tag{14}$$

$$\theta_{r2}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$p_{r1}(t)$ es el momentum angular en la primera rueda, en [N m s] con sentido anti-horario; J_{r1} es el momentum de inercia de la primera rueda, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p_{r1}\left(t\right) = p_{r1}\left(0\right) + \int_0^t \left(\mathrm{T}\left(\tau\right) - \left(+f_{r1r2}\left(\tau\right)\right)\right) \cdot r_{r1}\right) \cdot d\tau \tag{16}$$

$$J_{r1} = \frac{1}{2} \cdot m_{r1} \cdot r_{r1}^2 \tag{17}$$

$p_{r1}(0)$ es el momentum angular en la primera rueda inicialmente, en [N m s] con sentido anti-horario; $T(t)$ es el torque del ambiente a la primera rueda por el motor, en [N m] con sentido anti-horario; m_{r1} es la masa en la primera rueda, en [kg]:

$$p_{r1}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$\mathrm{T}\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ 4 & \text{si } 3 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

CC BY NC ND

$m_{r1} = 1$ (por ejemplo) (20)

El dibujo de la estructura causal es un poco enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción: ω_{r2} depende de p_{r2}; p_{r2}, de f_{r1r2} y ω_{r2}; f_{r1r2}, de θ_{r1} y θ_{r2}; θ_{r1}, de ω_{r1}; θ_{r2}, de ω_{r2}; ω_{r1}, de p_{r1}; y p_{r1}, de T y f_{r1r2}; mientras, T queda independiente.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (3), (4), (6), (7), (8), (9), (11), (13), (15), (17), (18) y (20) no contienen ninguna variable que evoluciona: (19) contiene 1; (1), (10), (12) y (14), 2 cada una; (2), (5) y (16), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^4 \cdot 3^3$ (=432) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(20).

Pero no es cuerdo plantear que un torque a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum en el recinto, sino que el momentum depende por integración de todos los torques.

(2) y (16) tienen momenta despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 432 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(20), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^4 \cdot 3^1$ (=48).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 48 sistemas de ecuaciones restantes, 47 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (con retardos en todas las dependencias mutuas: (1)-(20).

Si nos interesa la evolución de la velocidad angular ω_{r2}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (10), (12) y (16); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar p_{r2} inicial, θ_{r1} inicial, θ_{r2} inicial, p_{r1} inicial, r_{r2}, D, m_{r2}, K, r_{r1}, m_{r1}, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(20) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son un poco aburridos. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

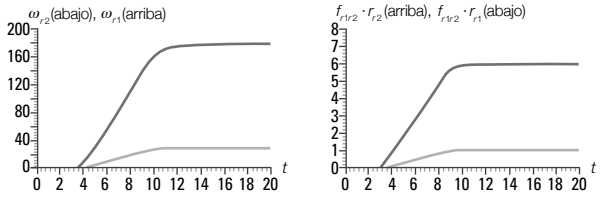


Fig. 2: Predicciones

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), (10), (12) y (16) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las posiciones angulares y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (12) e insertando (1); derivando (10) e insertando (14); derivando (2) e insertando (5) y (1); y derivando (16) e insertando (5):

$$\frac{d\theta_{r2}(t)}{dt} = \frac{1}{J_{r2}} \cdot p_{r2}(t) \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{d\theta_{r1}(t)}{dt} = \frac{1}{J_{r1}} \cdot p_{r1}(t) \qquad \text{(a2)}$$

$$\frac{dp_{r2}(t)}{dt} = -K \cdot r_{r2}^2 \cdot \theta_{r2}(t) + K \cdot r_{r1} \cdot r_{r2} \cdot \theta_{r1}(t) - \frac{D}{J_{r2}} \cdot p_{r2}(t) \qquad \text{(a3)}$$

$$\frac{dp_{r1}(t)}{dt} = K \cdot r_{r1} \cdot r_{r2} \cdot \theta_{r2}(t) - K \cdot r_{r1}^2 \cdot \theta_{r1}(t) + \mathrm{T}(t) \qquad \text{(a4)}$$

Apéndice acerca de más ecuaciones diferenciales

Derivando (a1), insertando (a3) y usando (a1); y derivando (a2) e insertando (a4):

$$J_{r2} \cdot \frac{d^2\theta_{r2}(t)}{dt^2} = -K \cdot r_{r2}^2 \cdot \theta_{r2}(t) + K \cdot r_{r1} \cdot r_{r2} \cdot \theta_{r1}(t) - D \cdot \frac{d\theta_{r2}(t)}{dt}$$

$$J_{r1} \cdot \frac{d^2\theta_{r1}(t)}{dt^2} = K \cdot r_{r1} \cdot r_{r2} \cdot \theta_{r2}(t) - K \cdot r_{r1}^2 \cdot \theta_{r1}(t) + \mathrm{T}(t)$$

Por cierto, estas son ecuaciones cinemáticas que quienes se han adiestrado en la Mecánica de momenta de inercia fijos, plantearían (casi) directamente.

Si K tiende a ∞, f_{r1r2} puede ser finita sólo si $\theta_{r1} \cdot r_{r1} - \theta_{r2} \cdot r_{r2}$ tiende a 0; vale decir, sólo si la tendencia es a:

$$\theta_{r1}(t) = \frac{r_{r2}}{r_{r1}} \cdot \theta_{r2}(t)$$

luego, a:

$$\frac{d^2\theta_{r1}(t)}{dt^2} = \frac{r_{r2}}{r_{r1}} \cdot \frac{d^2\theta_{r2}(t)}{dt^2}$$

y luego, por uso de esta última ecuación y las dos antepenúltimas, a:

$$\left(r_{r1}^2 \cdot J_{r2} + r_{r1}^2 \cdot J_{r2}\right) \cdot \frac{d^2\theta_{r2}(t)}{dt^2} + r_{r1}^2 \cdot D \cdot \frac{d\theta_{r2}(t)}{dt} = r_{r1} \cdot r_{r2} \cdot \mathrm{T}(t)$$

CC BY NC ND

43.0

UN DISCO Y DOS ELÁSTICOS [31] (MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

Imaginemos un disco con un eje en el punto del centro y dos elásticos sujetos en un punto de la periferia; el eje se fija en una superficie plana; el extremo libre de uno de los elásticos se fija en la misma superficie de manera que ese elástico quede estirado, y el extremo libre del otro elástico se mueve sobre la superficie (por ejemplo, circularmente en torno al eje) de manera que este elástico también quede estirado.

Fig. 1: Un disco y dos elásticos

La pugna entre las fuerzas introducidas por los elásticos en el disco, hace que la conducta de éste sea llamativa.

Interesa predecir la evolución del ángulo de giro del disco.

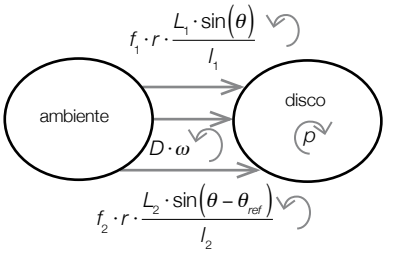


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$\theta(t)$ es el ángulo desde el radio donde está el extremo del primer elástico que se fijó en la superficie plana, hasta el radio donde está el punto de la periferia del disco que sujeta a los dos elásticos, en [rad] con sentido horario:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$\theta(0)$ es el ángulo inicialmente, en [rad] con sentido horario; $\omega(t)$ es la velocidad angular del disco, en [rad s^{-1}] con sentido horario:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

[31] De: J. Glaría y O. Orellana, 2006, Un disco y dos elásticos, *Informe interno.Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso*

CC BY NC ND

$$\omega(t) = \frac{p(t)}{J} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum angular en el disco, en [N m s] con sentido horario; J es el momentum de inercia del disco, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(-f_1(\tau) \cdot r \cdot \frac{L_1 \cdot \sin(\theta(\tau))}{l_1(\tau)} - f_2(\tau) \cdot r \cdot \frac{L_2 \cdot \sin(\theta(\tau) - \theta_{ref}(\tau))}{l_2(\tau)} - D \cdot \omega(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2} \tag{5}$$

$p(0)$ es el momentum angular inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $f_1(t)$ es la fuerza del primer elástico al disco, en [N] hacia el elástico; r es el radio del disco, en [m]; L_1 es la distancia entre el centro del disco y el extremo del primer elástico que se fijó en la superficie plana, en [m]; $l_1(t)$ es la distancia entre los dos extremos del primer elástico, en [m]; $f_2(t)$ es la fuerza del segundo elástico al disco, en [N] hacia el elástico; L_2 es la distancia entre el centro del disco y el extremo del segundo elástico que se mueve, en [m]; $\theta_{ref}(t)$ es el ángulo desde el radio donde está el extremo del primer elástico que se fijó en la superficie plana, hasta el radio donde está el extremo del segundo elástico que se mueve, en [rad] con sentido horario; $l_2(t)$ es la distancia entre los dos extremos del segundo elástico, en [m]; D es un coeficiente de roce angular entre el disco y el eje, en [N m rad^{-1} s]; m es la masa en el disco, en [kg]:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f_1(t) = K \cdot \frac{l_1(t) - L_{01}}{L_{01}} \tag{7}$$

$$r = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$L_1 = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$l_1(t) = \sqrt{L_1^2 + r^2 - 2 \cdot L_1 \cdot r \cdot \cos(\theta(t))} \tag{10}$$

$$f_2(t) = K \cdot \frac{l_2(t) - L_{02}}{L_{02}} \tag{11}$$

$$L_2 = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$\theta_{ref}(t) = \pi \cdot (1 - \cos(t / 10)) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$l_2(t) = \sqrt{L_2^2 + r^2 - 2 \cdot L_2 \cdot r \cdot \cos(\theta(t) - \theta_{ref}(t))} \tag{14}$$

$$D = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$m = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

K es un coeficiente relativo a la elasticidad de ambos elásticos, en [N]; L_{01} es la longitud del primer elástico cuando está relajado, en [m]; L_{02} es la longitud del segundo elástico cuando está relajado, en [m]:

$$K = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

CC BY NC ND

$$L_{01} = 1 \text{ (por ejemplo)} \quad (18)$$

$$L_{02} = 1 \text{ (por ejemplo)} \quad (19)$$

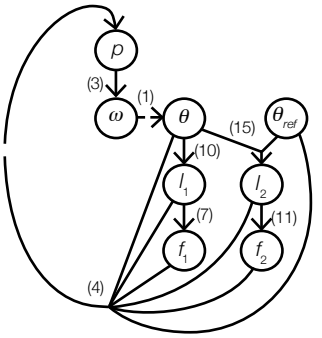


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (5), (6), (8), (9), (12) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (13) contiene 1; (1), (3), (7), (10) y (11) contienen 2 cada una; (14) contiene 3; (4) contiene 8; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^5 \cdot 3^1 \cdot 8^1$ (=768) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(19).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza a través de una frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum en la recinto, sino que el momentum depende, por integración, de todas las fuerzas.

(4) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 8 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 768 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(19), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^5 \cdot 3^1$ (=96).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

De los 96 sistemas de ecuaciones restantes, 95 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(19).

Si nos interesa la evolución del ángulo de giro θ; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1) y (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar θ inicial, *p* inicial, θ_{ref}, *r*, L_1, L_2, *D*, *m*, *K*, L_{01}, L_{02}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(19) como:

$$r = \ldots \quad (8')$$

$$L_1 = \ldots \quad (9')$$

$$L_2 = \ldots \quad (12')$$

$$D = .. \quad (15')$$

BY NC ND

$$m = \ldots \tag{16'}$$

$$K = \ldots \tag{17'}$$

$$L_{01} = \ldots \tag{18'}$$

$$L_{02} = \ldots \tag{19'}$$

$$\theta_0 = \ldots \tag{2'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$J = \frac{m \cdot r^2}{2} \tag{5'}$$

$$\theta_{ref,k} = \ldots \tag{13'}$$

$$l_{1,k} = \sqrt{L_1^2 + r^2 - 2 \cdot L_1 \cdot r \cdot \cos\left(\theta_k\right)} \tag{10'}$$

$$l_{2,k} = \sqrt{L_2^2 + r^2 - 2 \cdot L_2 \cdot r \cdot \cos\left(\theta_k - \theta_{ref,k}\right)} \tag{14'}$$

$$\omega_k = \frac{p_k}{J} \tag{3'}$$

$$f_{1,k} = K \cdot \frac{l_{1,k} - L_{01}}{L_{01}} \tag{7'}$$

$$f_{2,k} = K \cdot \frac{l_{2,k} - L_{02}}{L_{02}} \tag{11'}$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k \cdot dt \tag{1'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(-f_{1,k} \cdot r \cdot \frac{L_1 \cdot \sin\left(\theta_k\right)}{l_{1,k}} - f_{2,k} \cdot r \cdot \frac{L_2 \cdot \sin\left(\theta_k - \theta_{ref,k}\right)}{l_{2,k}} - D \cdot \omega_k \right) \cdot dt \tag{4'}$$

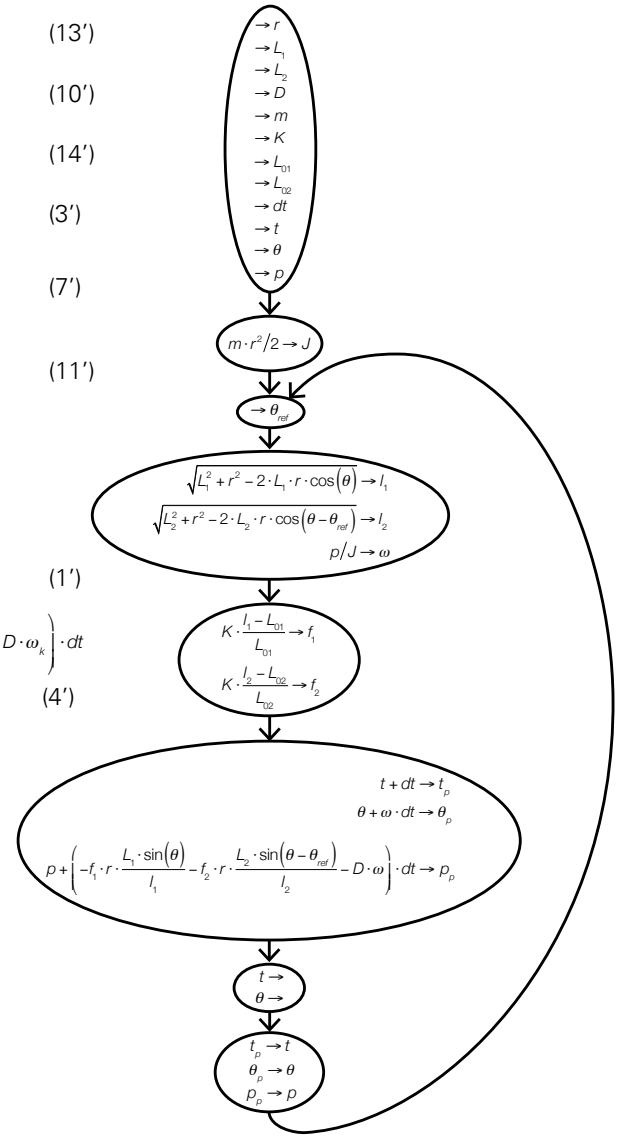


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, dt=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

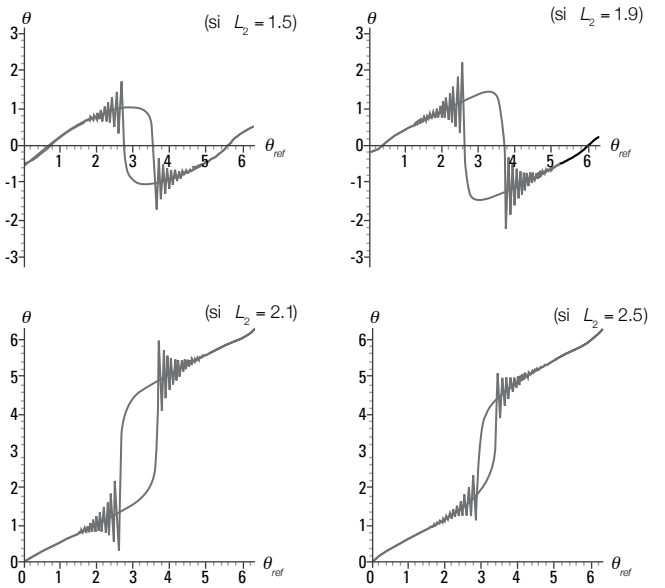


Fig. 5: Predicciones

La figura 5 muestra distintas relaciones entre θ y θ_{ref} según L_2, que no se supuso igual a 2 sino igual a 1.5 (arriba, a la izquierda), a 1.9 (al lado), a 2.1 (abajo a la izquierda) y a 2.5 (al lado), sucesivamente. Si esto se compara con L_1, que sí se supuso igual a 2, se entiende: que en los dos casos de arriba $L_2<L_1$ y en los dos de abajo, $L_1<L_2$; que en los dos casos de arriba el segundo elástico tiende a estar menos estirado que el primero y en los dos de abajo, más estirado; que en los dos casos de arriba el segundo elástico tiende a introducir en el disco fuerzas menores que el primer elástico, y en los dos casos de abajo, fuerzas mayores; que en los dos casos de arriba el disco tiende a rotar más hacia el radio donde está el extremo del primer elástico que se fijó en la superficie plana, y en los dos de abajo, hacia el radio donde está el extremo del segundo elástico que se mueve; y que en los dos casos de arriba $\theta(t)$ tiende a permanecer cerca de 0 y en los dos de abajo, cerca de $\theta_{ref}(t)$.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

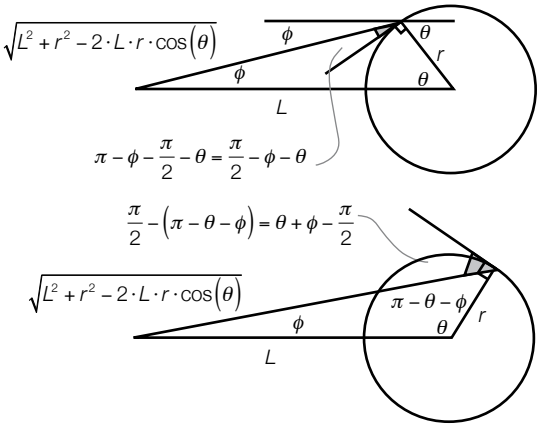
Aprovechando el carácter de (1) y (4) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para el ángulo de giro y el momentum angular con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (2), y derivando (4) e insertando (7), (11), (10), (13) y (2):

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{p(t)}{J} \qquad \text{(a1)}$$

BY NC ND

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{K\cdot r\cdot L_1}{L_{01}}\cdot\left(1-\frac{L_{01}}{\sqrt{L_1^2+r^2-2\cdot L_1\cdot r\cdot\cos(\theta(t))}}\right)\cdot\sin(\theta(t))$$
$$-\frac{K\cdot r\cdot L_2}{L_{02}}\cdot\left(1-\frac{L_{02}}{\sqrt{L_2^2+r^2-2\cdot L_2\cdot r\cdot\cos(\theta(t))}}\right)\cdot\left(\sin(\theta(t)-\theta_{ref}(t))\right)-D\cdot\frac{p(t)}{J} \qquad \text{(a2)}$$

Apéndice acerca de la Geometría para (4)



$$\cos\left(\theta+\phi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\theta\right)$$
$$=\sin(\phi+\theta)$$
$$=\sin(\phi)\cdot\cos(\theta)+\cos(\phi)\cdot\sin(\theta)$$
$$=\sin(\phi)\cdot\cos(\theta)+\sqrt{1-\sin^2(\phi)}\cdot\sin(\theta)$$

No hay ambigüedad de signo para la raíz, porque $r<L$ implica que $-\pi/2<\phi<\pi/2$ y, así, que $0<\cos(\phi)\leq 1$. Por otro lado:

$$\frac{\sin(\phi)}{r}=\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}$$

Por lo tanto:

$$\cos\left(\theta+\phi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\theta\right)$$
$$=\frac{r\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}\cdot\cos(\theta)+\sqrt{1-\frac{r^2\cdot\sin^2(\theta)}{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}\cdot\sin(\theta)$$
$$=\frac{r\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}\cdot\cos(\theta)+\frac{L-r\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}\cdot\sin(\theta)$$
$$=\frac{L\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{L^2+r^2-2\cdot L\cdot r\cdot\cos(\theta)}}$$

CC BY NC ND

44.0

UNA MIRADA A UN CUERPO LUMINOSO (MASAS Y CAUDALES, MOMENTA Y FUERZAS)

"Hacer una fuerza" es una expresión vulgar; pero puede no ser desatinada.

Imaginemos un móvil luminoso avanzando solitariamente por un espacio oscuro y vacío de campos físicos ajenos. Por un lado, para simplificar, imaginemos que el móvil es un cilindro rígido, que tiene una densidad homogénea y que avanza con velocidad constante *v*, en la dirección de su eje de simetría. Por el otro, para complicar, imaginemos que la luminosidad del móvil se va apagando paulatinamente desde el extremo anterior (el más avanzado) hasta el posterior (el más retrasado), de manera que lo más visible se acorta paulatinamente.

E imaginemos que concentramos la mirada en ello: en lo más visible.

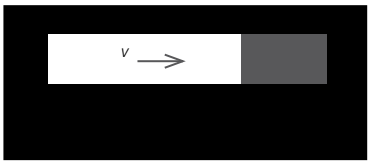


Fig. 1: La mirada

Interesa predecir la evolución de la velocidad del cuerpo que miramos o, más sugerentemente, que hacemos con la mirada.

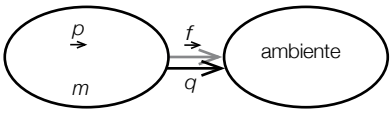


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

v(*t*) es la velocidad (media) de avance (axial) del cuerpo hecho con la mirada, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$v(t) = \frac{p(t)}{m(t)} \tag{1}$$

p(*t*) es el momentum de avance en el cuerpo, en [N s] hacia la derecha; *m*(*t*) es la masa en el cuerpo, en [kg]:

$$p(t) = p(0) - \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$m(t) = m(0) - \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau \tag{3}$$

CC BY NC ND

p(0) es el momentum en el cuerpo inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f(t)$ es la fuerza del cuerpo al ambiente, en [N] hacia la derecha; m(0) es la masa en el cuerpo inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal del cuerpo al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$p(0) = 6283200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$f(t) = q(t) \cdot v(t) \tag{5}$$

$$m(0) = 62832 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q(t) = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(v(t) - v_S(t)\right) \tag{7}$$

ρ es la densidad del cuerpo, en [kg m^{-3}]; r es su radio transversal, en [m]; $v_S(t)$ es la velocidad de la superficie anterior (derecha) del cuerpo, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$\rho = 5000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$r = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$v_S(t) = 100 - 0.2 \cdot t \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

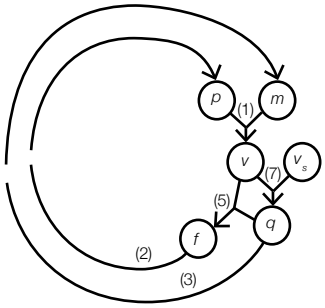


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (6), (8) y (9) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10) contiene 1; (2), (3) y (7) contienen 2 cada una; (1) y (5) contienen 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 6 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^2$ (=72) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de las otras o los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todas las fuerzas o los caudales de masa.

(2) tiene un momentum despejado en su lado izquierdo y (3) tiene una masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 72 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^1 \cdot 3^2$ (=18).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 18 sistemas de ecuaciones restantes, 17 tienen por lo menos una va-

BY NC ND

riable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de la velocidad *v*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2) y (3); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *p* inicial, *m* inicial, v_s, ρ, *r*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(10) como:

$$\rho = \ldots \quad (8')$$

$$r = \ldots \quad (9')$$

$$p_0 = \ldots \quad (4')$$

$$m_0 = \ldots \quad (6')$$

$$v_{S,k} = \ldots \quad (10')$$

$$v_k = \frac{p_k}{m_k} \quad (1')$$

$$q_k = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(v_k - v_{S,k}\right) \quad (7')$$

$$f_k = q_k \cdot v_k \quad (5')$$

$$p_{k+1} = p_k - f_k \cdot dt \quad (2')$$

$$m_{k+1} = m_k - q_k \cdot dt \quad (3')$$

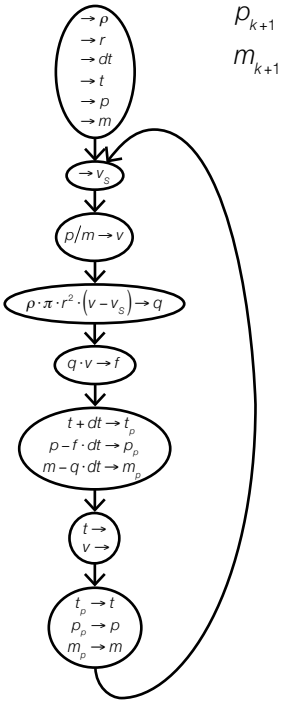


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

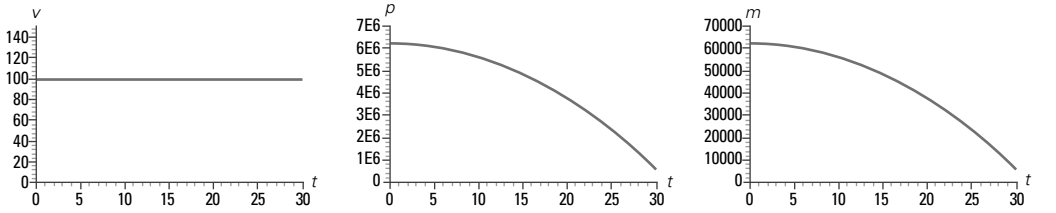


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2) y (3) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para el momentum y la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (5), (7) y (1), y derivando (3) e insertando (7) y (1):

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{p(t)}{m(t)} - v_S(t) \right) \cdot \frac{p(t)}{m(t)} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{p(t)}{m(t)} - v_S(t) \right) \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesa la evolución de la velocidad, aceptando (a1) y (a2) y considerando (1):

$$v(t) = \frac{p(t)}{m(t)} \qquad \text{(a3)}$$

Apéndice con algo de Matemática, de Física normal y de vulgaridad

Derivando (a3) e insertando (a1) y (a2):

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

Por consiguiente, apelando a (1), (2) y (3):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d\left(m(t) \cdot v(t)\right)}{dt} \\ &= \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t) + m(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \\ &= q(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot 0 \\ &= q(t) \cdot v(t) \end{aligned}$$

CC BY NC ND

No hemos cometido ningún desatino y podemos decir la expresión vulgar sin merecer censura: hemos hecho una fuerza no nula… y con la pura mirada.

Además, hemos evitado hablar de la velocidad del centro de masa, que es:

$$v_{cm}\left(t\right)=\frac{v\left(t\right)+v_S\left(t\right)}{2}$$

y que no coincide con $v(t)$, la velocidad (media) de la materia en el cuerpo hecho, a no ser que $v_S(t)=v(t)$.

BY NC ND

45.0

UNA ANDANADA A BORDO DE UN BARCO (MASAS Y CAUDALES, MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un barco de guerra a la deriva sobre aguas quietas, disparando con sus cañones de estribor, uno tras otro, una andanada horizontal de balas a quemarropa.

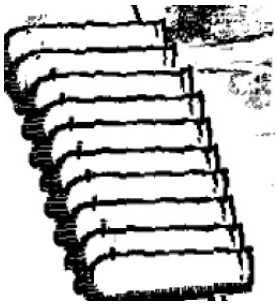


Fig. 1: Andanada de balas desde un barco

Interesa predecir la evolución de la posición del barco.

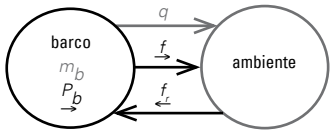


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x_b(t)$ es la posición del barco, en [m] hacia la derecha de una referencia:

$$x_b(t) = x_b(0) + \int_0^t v_b(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$x_b(0)$ es la posición del barco inicialmente, en [m] hacia la derecha de la referencia; $v_b(t)$ es la velocidad del barco, en [m s-1] hacia la derecha:

$$x_b(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

$$v_b(t) = \frac{p_b(t)}{m_b(t)} \qquad (3)$$

$p_b(t)$ es el momentum en el barco, en [N s] hacia la derecha; $m_b(t)$ es la masa en el barco, en [kg]:

$$p_b(t) = p_b(0) + \int_0^t \left(-f(\tau) + f_r(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (4)$$

$$m_b(t) = m_b(0) - \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau \qquad (5)$$

CC BY NC ND

$p_b(0)$ es el momentum en el barco inicialmente, en [N s] hacia la derecha; $f(t)$ es la fuerza del barco al ambiente con el caudal de balas, en [N] hacia la derecha; $f_r(t)$ es la suma neta de las otras fuerzas que viajan al barco (fundamentalmente, por el roce con el agua que suponemos quieta), en [N] hacia la derecha; $m_b(0)$ es la masa en el barco inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal de balas disparadas (promediado entre disparos), en [kg s^{-1}]:

$$p_b(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f(t) = q(t) \cdot v(t) \tag{7}$$

$$f_r(t) = -\left(D_1 + D_2 \cdot |v_b(t)|\right) \cdot v_b(t) \tag{8}$$

$$m_b(0) = 200000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$q(t) = \frac{m}{T(t)} \tag{10}$$

$v(t)$ es la velocidad de las balas buscando al enemigo, en [m s^{-1}] hacia la derecha; D_1 es un coeficiente de roce entre el barco (de costado) y el agua, en [N m^{-1} s]; D_2 es otro coeficiente de roce entre el barco y el agua, en [N m^{-2} s^2]; m es la masa en cualquier bala, en [kg]; $T(t)$ es el período entre disparos, en [s]:

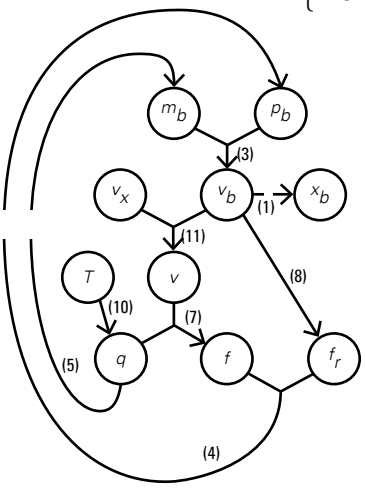
$$v(t) = v_b(t) + v_x(t) \tag{11}$$

$$D_1 = 5000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$D_2 = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$m = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$T(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 20 \\ 1 & \text{si} \quad 20 \le t < 60 \\ 10 & \text{si} \quad 60 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$



$v_x(t)$ es la velocidad con que las balas son disparadas por los cañones, desde el barco, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$v_x(t) = \begin{cases} 300 & \text{si} \quad 0 \le t < 60 \\ 350 & \text{si} \quad 60 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (6), (9), (12) y (13) no contienen ninguna variable que evoluciona: (14) y (15) contienen 1 cada una; (1), (5) y (8) contienen 2; (3), (4), (7), (10) y (11) contienen 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^5$ (=1944) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(16).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de las otras o los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todas las fuerzas o los caudales de masa.

(4) tiene un momentum despejado en su lado izquierdo y (5) tiene una masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 1944 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(16), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4$ (=324).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 324 sistemas de ecuaciones restantes, 323 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(16).

Si nos interesa la evolución de la posición x_b; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (4) y (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x_b inicial, p_b inicial, m_b inicial, T, v_x, D_1, D_2, m, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(16) como:

$$D_1 = \ldots \tag{12'}$$

$$D_2 = \ldots \tag{13'}$$

$$m = \ldots \tag{14'}$$

$$x_{b,0} = \ldots \tag{2'}$$

$$p_{b,0} = \ldots \tag{6'}$$

$$m_{b,0} = \ldots \tag{9'}$$

$$T_k = \ldots \tag{15'}$$

$$v_{x,k} = \ldots \tag{16'}$$

$$v_{b,k} = \frac{p_{b,k}}{m_{b,k}} \tag{3'}$$

$$v_k = v_{b,k} + v_{x,k} \tag{11'}$$

$$q_k = \frac{m}{T_k} \tag{10'}$$

$$f_k = q_k \cdot v_k \tag{7'}$$

$$f_{r,k} = -\left(D_1 + D_2 \cdot \left|v_{b,k}\right|\right) \cdot v_{b,k} \tag{8'}$$

$$x_{b,k+1} = x_{b,k} + v_{b,k} \cdot dt \tag{1'}$$

CC BY NC ND

$$p_{b,k+1} = p_{b,k} + \left(-f_k + f_{r,k}\right) \cdot dt \tag{4'}$$

$$m_{b,k+1} = m_{b,k} - q_k \cdot dt \tag{5'}$$

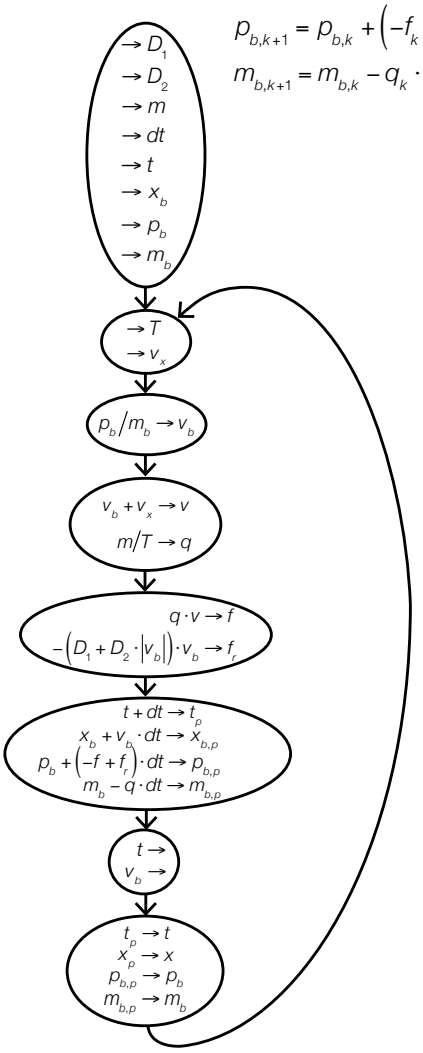
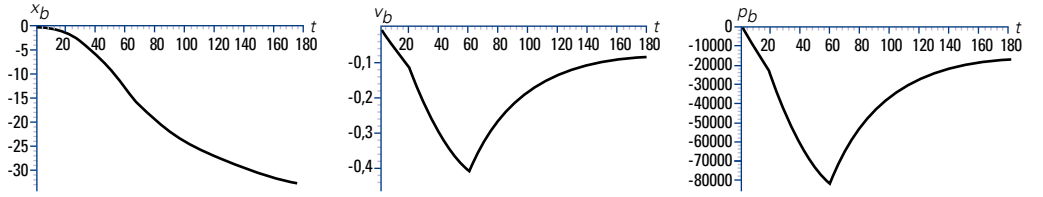


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.



BY NC ND

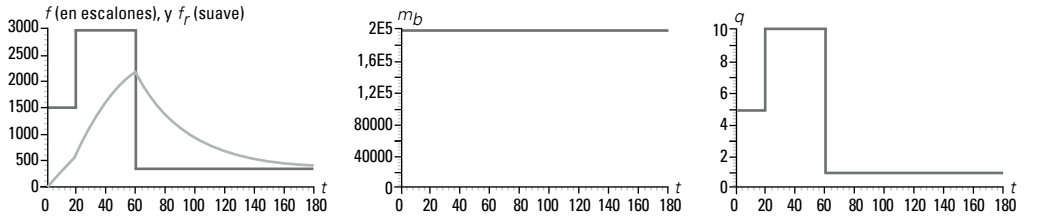


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (4) y (5) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para el momentum y la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8), (10), (1) y (3), y derivando (5) e insertando (10):

$$\frac{dp_b(t)}{dt} = -\frac{m}{T(t)} \cdot \left(v_x(t) + \frac{p_b(t)}{m_b(t)} \right) - \left(D_1 + D_2 \cdot \left| \frac{p_b(t)}{m_b(t)} \right| \right) \cdot \frac{p_b(t)}{m_b(t)} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm_b(t)}{dt} = -\frac{m}{T(t)} \qquad \text{(a2)}$$

CC BY NC ND

46.0

UN COHETE
(MASAS Y CAUDALES, MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un cohete ascendiendo desde la superficie lunar.

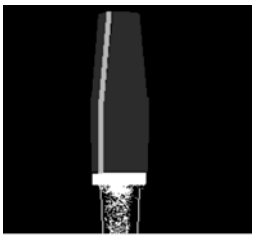


Fig. 1: Un cohete

Interesa predecir la evolución de la posición vertical del cohete.

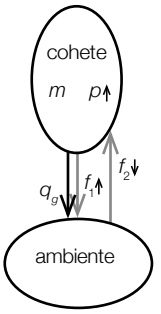


Fig.2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].
$y(t)$ es la posición (vertical) del cohete, en [m] hacia arriba:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$y(0)$ es la posición inicialmente, en [m] hacia arriba; $v(t)$ es la velocidad del cohete, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$y(0) = 1740000 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

$$v(t) = \frac{p(t)}{m(t)} \qquad (3)$$

$p(t)$ es el momentum en el cohete, en [N s] hacia arriba; $m(t)$ es la masa en el cohete, en [kg]:

BY NC ND

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(-\left(+f_1(\tau)\right) + \left(-f_2(\tau)\right)\right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$m(t) = m(0) - \int_0^t q_g(\tau) \cdot d\tau \tag{5}$$

$p(0)$ es el momentum en el cohete inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_1(t)$ es la fuerza del cohete al ambiente con los gases, en [N] hacia arriba; $f_2(t)$ es la fuerza de la Luna al cohete por gravitación, en [N] hacia abajo; $m(0)$ es la masa en el cohete inicialmente, en [kg]; $q_g(t)$ es el caudal de los gases salidos del cohete al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f_1(t) = q_g(t) \cdot v_g(t) \tag{7}$$

$$f_2(t) = G \cdot \frac{m(t) \cdot m_L}{y^2(t)} \tag{8}$$

$$m(0) = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$q_g(t) = q_{gc}(t) \tag{10}$$

$v_g(t)$ es la velocidad de los gases salidos del cohete al ambiente, en [m s^{-1}] hacia arriba; G es la constante gravitacional, en [N m^2 kg^{-2}]; m_L es la masa en la Luna, en [kg]; $q_{gc}(t)$ es el caudal de gases expulsados desde el cohete (según imposición del piloto), en [m s^{-1}]:

$$v_g(t) = v(t) - v_{gc}(t) \tag{11}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \tag{12}$$

$$m_L = 7.34 \cdot 10^{22} \tag{13}$$

$$q_{gc} = \begin{cases} 3 & \text{si } t < 900 \\ 0 & \text{si } 900 \le t < 1800 \\ 0.3 & \text{si } 1800 \le t < 2400 \\ 0 & \text{si } 2400 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$v_{gc}(t)$ es la velocidad con que los gases son expulsados, desde el cohete, en [m s^{-1}] hacia abajo:

$$v_{gc} = \begin{cases} 10000 & \text{si } t < 900 \\ 0 & \text{si } 900 \le t < 1800 \\ 10000 & \text{si } 1800 \le t < 2400 \\ 0 & \text{si } 2400 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

CC BY NC ND

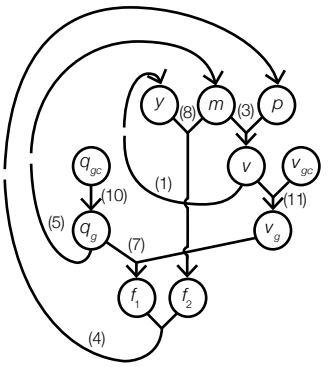


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (6), (9), (12) y (13) no contienen ninguna variable que evoluciona: (14) y (15) contienen 1 cada una; (1), (5) y (10) contienen 2; (3), (4), (7), (8) y (11) contienen 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^5$ (=1944) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de las otras o los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todas las fuerzas o los caudales de masa.

(4) tiene un momentum despejado en su lado izquierdo y (5) tiene una masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 1944 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4$ (=324).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 324 sistemas de ecuaciones restantes, 323 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesa la evolución de la posición y; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (4) y (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *p* inicial, *m* inicial, q_{gc}, v_{gc}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$$y_0 = \ldots \qquad (2')$$

$$m_0 = \ldots \qquad (9')$$

$$p_0 = \ldots \qquad (6')$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \qquad (12')$$

BY NC ND

$$m_L = 7.34 \cdot 10^{22} \quad (13')$$

$$q_{gc,k} = \ldots \quad (14')$$

$$v_{gc,k} = \ldots \quad (15')$$

$$q_{g,k} = q_{gc,k} \quad (10')$$

$$v_k = \frac{p_k}{m_k} \quad (3')$$

$$v_{g,k} = v_k - v_{gc,k} \quad (11')$$

$$f_{1,k} = q_{g,k} \cdot v_{g,k} \quad (7')$$

$$f_{2,k} = G \cdot \frac{m_k \cdot m_L}{y_k^2} \quad (8')$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k \cdot dt \quad (1')$$

$$m_{k+1} = m_k - q_{g,k} \cdot dt \quad (5')$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(-f_{1,k} - f_{2,k}\right) \cdot dt \quad (4')$$

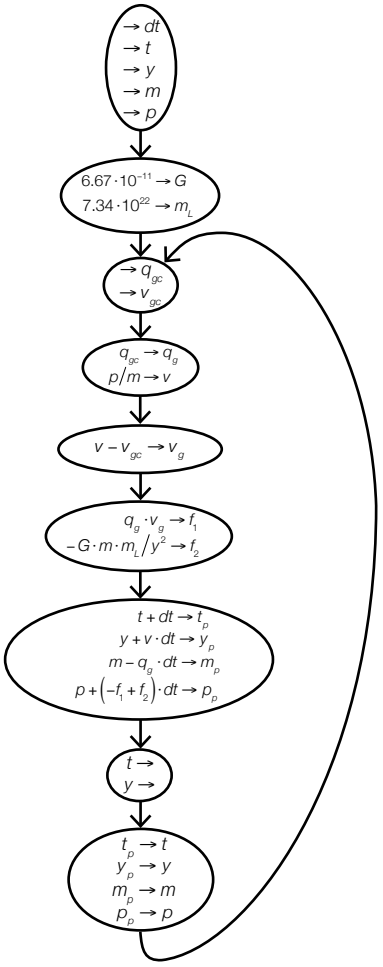


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

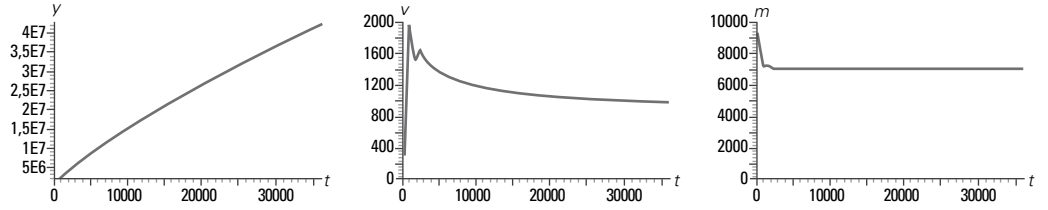


Fig. 5: Predicciones

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (4) y (5) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la posición, el momentum y la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (3), derivando (4) e insertando (7), (8), (10), (11) y (3), y derivando (5) e insertando (19):

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m(t)} \tag{a1}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -q_{gc}(t) \cdot \left(\frac{p(t)}{m(t)} - v_{gc}(t) \right) - G \cdot \frac{m(t) \cdot m_L}{y^2(t)} \tag{a2}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = -q_{gc}(t) \tag{a3}$$

CC BY NC ND

47.0

UN COHETE DE JUGUETE (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un cohete de juguete, metálico, hueco, fusiforme y con un tubo cilíndrico pequeño abierto en un extremo. Imaginemos que hacemos con él lo siguiente: ponemos hacia arriba el extremo con el tubo, metemos algo de agua por él, lo tapamos con la boca de un bombín, y bombeamos aire adentro del cohete, manteniendo sujetos el tubo y el bombín; luego invertimos el cohete poniendo el otro extremo hacia arriba y soltamos bruscamente la sujeción quedándonos con el bombín. Es fácil sospechar que, en la última situación, el agua metida en el cohete estará debajo del aire bombeado; que saldrá expulsada a través del tubo y hacia abajo por la presión del aire bombeado (primordialmente); y que moverá al cohete hacia arriba (por un rato).

Fig. 1: Un cohete de juguete

Interesa predecir la evolución de la altura de la punta superior del cohete.

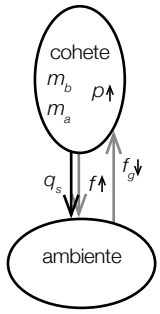


Fig.2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y_c(t)$ es la altura alcanzada por la punta superior del fuselaje, en [m] hacia arriba del suelo:

$$y_c\left(t\right) = y_c\left(0\right) + \int_0^t v_c\left(\tau\right)\cdot d\tau \qquad (1)$$

$y_c(0)$ es la altura inicialmente, en [m] hacia arriba; $v_c(t)$ es la velocidad de ascenso del fuselaje, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$y_c\left(0\right) = 0.35 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

$$v_c\left(t\right) \approx v\left(t\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_a\left(t\right)+m_b\left(t\right)}{m_a\left(t\right)+m_b\left(t\right)+m_c}\cdot\frac{\pi\cdot\left(D^2/4\right)}{A}\cdot v_s\left(t\right) \qquad (3)$$

$v(t)$ es el promedio de las velocidades de ascenso del agua dentro del fuselaje, del aire y del fuselaje mismo, con ponderaciones según $m_a(t)$, $m_b(t)$ y m_c, y en [m s^{-1}] hacia arriba; $m_a(t)$ es la masa en el agua dentro del fuselaje, en [kg]; $m_b(t)$ es la masa en el aire, en [kg]; m_c es la del fuselaje, en [kg]; D es el diámetro del tubo de salida, en [m]; A es el promedio de las áreas transversales del cohete, en [m^2]; $v_s(t)$ es la velocidad con que el agua (o el aire, si se agota el agua) es expulsada (o expulsado) a través del tubo, desde el cohete, en [m s^{-1}]:

CC BY NC ND

$$v(t) = \frac{p(t)}{m_a(t) + m_b(t) + m_c} \tag{4}$$

$$m_a(t) = m_a(0) - \int_0^t \left(\begin{cases} q_s(\tau) & \text{si } 0 < m_a(\tau) \\ 0 & \text{si } m_a(\tau) = 0 \end{cases} \right) \cdot d\tau \tag{5}$$

$$m_b(t) = m_b(0) - \int_0^t \left(\begin{cases} 0 & \text{si } 0 < m_a(t) \\ q_s(\tau) & \text{si } m_a(t) = 0 \end{cases} \right) \cdot d\tau \tag{6}$$

$$m_c = 0.7 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$D = 0.005 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$A = 1.26 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$v_s(t) = \begin{cases} 3.423 \cdot \dfrac{D^{0.6834}}{L^{0.5611} \cdot \rho_a^{0.5611} \cdot \upsilon_a^{0.1222}} \cdot \left(P_i(t) - P_{atm}\right)^{0.5611} & \text{si } 0 < m_a(t) \\ 3.423 \cdot \dfrac{D^{0.6834}}{L^{0.5611} \cdot \rho_b^{0.5611} \cdot \upsilon_b^{0.1222}} \cdot \left(P_i(t) - P_{atm}\right)^{0.5611} & \text{si } m_a(t) = 0 \end{cases} \tag{10}$$ [32]

$p(t)$ es el momentum de ascenso del cohete completo, en [N s] hacia arriba; $m_a(0)$ es la masa en el agua dentro del fuselaje inicialmente, en [kg]; $q_s(t)$ es el caudal de agua expulsada (o aire expulsado, si se agota el agua) a través del tubo, desde el cohete, en [kg s^{-1}]; $m_b(0)$ es la masa en el aire dentro del cohete inicialmente, en [kg]; L es la longitud del tubo de salida, en [m]; ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; υ_a es la viscosidad cinemática del agua, en [m^2 s^{-1}]; $P_i(t)$ es la presión interna, dentro del fuselaje, en [N m^2]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; $\rho_b(t)$ es la densidad del aire dentro del cohete, en [kg m^{-3}]; υ_b es la viscosidad cinemática del aire, en [m^2 s^{-1}]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(\left(-f_g(\tau) \right) - \left(+f(\tau) \right) \right) \cdot d\tau \tag{11}$$ [33]

$$m_a(0) = 0.30 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

---

[32] Con (10) y (13) estamos afinando la aproximación de Hooke según datos de: R. Boltz y G. Tuve, ed. 1973, *Handbook of tables for applied engineering*, CRC Press, Cleveland.
Despreciando los efectos del peso y la aceleración del aire y del agua interiores, los datos dicen que, para el tubo:

$$P_i - P_{atm} \approx f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot (v_s)^2}{2}$$

y que, si la superficie del tubo es suave y $10^4 < v_s \cdot D/\upsilon < 10^6$:

$$\log\left(\frac{f}{0.03}\right) \approx -\frac{\log\left(\frac{0.03}{0.011}\right)}{\log\left(\frac{10^6}{10^4}\right)} \cdot \log\left(\frac{v_s \cdot \frac{D}{\upsilon}}{10^4}\right)$$

(10) proviene de despejar f en la segunda ecuación, insertar el resultado en la primera, y despejar v_s.

[33] Estamos despreciando los efectos del roce con el aire atmosférico.

CC BY NC ND

$$q_s(t) = \begin{cases} \rho_a \cdot \pi \cdot \dfrac{D^2}{4} \cdot v_s & \text{si } 0 < m_a(t) \\ \rho_b \cdot \pi \cdot \dfrac{D^2}{4} \cdot v_s & \text{si } m_a(t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$m_b(0) = 4.0 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$L = 0.020 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$\rho_a = 1000 \quad (16)$$

$$\upsilon_a = 9.8 \cdot 10^{-7} \quad (17)\ [34]$$

$$P_i(t) = \frac{m_b(t) \cdot k_B \cdot T_{atm}}{\mu_b \cdot (V_c - V_a(t))} \quad (18)$$

$$P_{atm} = 1.013 \cdot 10^5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (19)$$

$$\rho_b(t) = \frac{m_b(t)}{V_c - V_a(t)} \quad (20)$$

$$\upsilon_b = 1.6 \cdot 10^{-5} \quad (21)\ [35]$$

$p(0)$ es el momentum de ascenso inicialmente, en [N s] hacia arriba; $f_g(t)$ es la fuerza de la Tierra al cohete por gravitación, en [N] hacia abajo; $f(t)$ es la fuerza del cohete a la atmósfera con el caudal de agua o aire, en [N]; k_B es la constante de Boltzmann, en [J K^{-1}]; $T_{atm}(t)$ es la temperatura del aire, en [K]; μ_b es el promedio de las masas moleculares del aire, en [kg]; V_c es el volumen total dentro del fuselaje, en [m^3]; $V_a(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (22)$$

$$f_g(t) = (m_a(t) + m_b(t) + m_c) \cdot g \quad (23)$$

$$f(t) = q_s(t) \cdot (v_c(t) - v_s(t)) \quad (24)$$

$$k_B = 1.3803 \cdot 10^{-23} \quad (25)$$

$$T_{atm} = 295 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (26)\ [36]$$

$$\mu_b = 4.81 \cdot 10^{-26} \quad (27)$$

$$V_c = 4.0 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (28)$$

[34] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1973, *Handbook of tables for applied engineering*, CRC Press, Cleveland.

[35] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1973, *Handbook of tables for applied engineering*, CRC Press, Cleveland.

[36] Estamos suponiendo que el fuselaje metálico deja pasar potencias térmicas entre el ambiente y el cohete con tanta facilidad que la energía en el interior del cohete (casi) replica la temperatura atmosférica en ese interior; y estamos compactando las fórmulas de acuerdo con ello.

CC BY NC ND

$$V_a(t) = \frac{m_a(t)}{\rho_a} \tag{29}$$

g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$$g = 9.8 \tag{30}$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (7), (8), (9), (12), (14), (15), (16), (17), (19), (21), (22), (25), (26), (27), (28) y (30) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (5), (6) y (29) contienen 2 cada una; (10), (11), (13), (18), (20) y (23) contienen 3; (4) y (24), 4; (3), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 13 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^4 \cdot 3^6 \cdot 4^2 \cdot 5^1$ (=933120) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(30).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de las otras o los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todas las fuerzas o los caudales de masa.

(5), (6) y (12) tienen una masa o un momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 933120 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(30), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2 \cdot 5^1$ (=77760).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 77760 sistemas de ecuaciones restantes, 77759 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(30).

Si nos interesa la evolución de la posición y; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (5), (6) y (11); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar y inicial, m_a inicial, m_b inicial, p inicial, D, A, L, ρ_a, υ_a, P_{atm}, υ_b, T_{atm}, μ_b, V_c, g, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(30) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son un poco aburridos y se parecen suficientemente a los del caso anterior. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.

BY NC ND

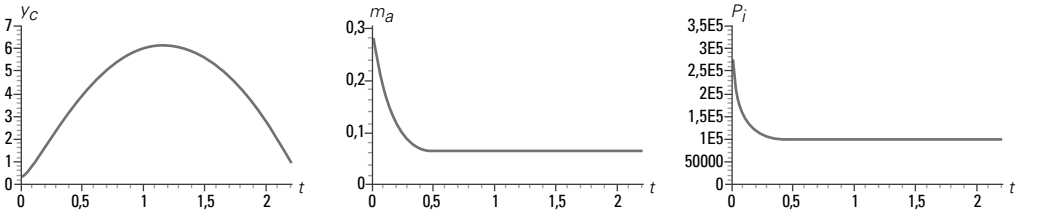


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (5), (6) y (11) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero lo aburrimiento es demasiado.

CC BY NC ND

48.0

AGUA EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE VERTICAL, SOPORTADO POR RESORTES (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS)

Imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical, soportado por resortes (o por una estructura con alguna elasticidad), y con agua que entra por encima, reposa y sale por debajo.

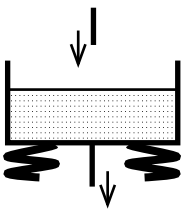


Fig. 1: Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical, soportado por resortes

Interesa predecir la evolución de la fuerza por los resortes.

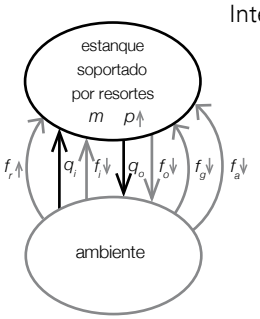


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$f_r(t)$ es la fuerza del ambiente al estanque, por los resortes, en [N] hacia arriba:

$$f_r(t) = K \cdot \left(X - \left(x(t) - \frac{h(t)}{2} \right) \right) \tag{1}$$

K es el coeficiente de elasticidad de los resortes, en [N m^{-1}]; X es la longitud de los resortes cuando están relajados, en [m]; $x(t)$ es la distancia desde el suelo hasta el centro del agua dentro del estanque, en [m] hacia arriba; $h(t)$ es la altura de esa agua, desde el fondo del estanque hasta la superficie, en [m] hacia arriba:

$$K = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$X = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$h(t) = \frac{V(t)}{\pi \cdot r^2} \tag{5}$$

CC BY NC ND

x(0) es la distancia hasta el centro del agua inicialmente, en [m] hacia arriba; $v(t)$ es la velocidad de ese centro, en [m s^{-1}] hacia arriba; $V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]; r es el radio transversal del estanque, en [m]:

$$x\left(0\right) = 1.0024 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$v\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{m\left(t\right)} \tag{7}$$

$$V\left(t\right) = \frac{m\left(t\right)}{\rho} \tag{8}$$

$$r = 0.564 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$p(t)$ es el momentum en el agua (y el estanque), en [N s] hacia arriba; $m(t)$ es la masa en el agua (y el estanque), en [kg]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$$p\left(t\right) = p\left(0\right) + \int_0^t \left(\left(+f_r\left(\tau\right)\right) + \left(-f_i\left(\tau\right)\right) - \left(-f_o\left(\tau\right)\right) + \left(-f_g\left(\tau\right)\right) + \left(-f_a\left(\tau\right)\right)\right) \cdot d\tau \tag{10}$$

$$m\left(t\right) = m\left(0\right) + \int_0^t \left(q_i\left(\tau\right) - q_o\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{11}$$

$$\rho = 1000 \tag{12}$$

p(0) es el momentum inicialmente, en [N s]; $f_i(t)$ es la fuerza del ambiente al estanque con el agua, por arriba, en [N] hacia abajo; $f_o(t)$ es la fuerza del estanque al ambiente con el agua, por abajo, en [N] hacia abajo; $f_g(t)$ es la fuerza de la Tierra al estanque, por gravitación, en [N] hacia abajo; $f_a(t)$ es la fuerza de la Tierra al estanque por roce contra los costados (o entre las partes de la estructura), en [N] hacia abajo; m(0) es la masa inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$f_i\left(t\right) = q_i\left(t\right) \cdot v_i\left(t\right) \tag{14}$$

$$f_o\left(t\right) = q_o\left(t\right) \cdot v_o\left(t\right) \tag{15}$$

$$f_g\left(t\right) = m\left(t\right) \cdot g \tag{16}$$

$$f_a\left(t\right) = D \cdot v\left(t\right) \tag{17}$$

$$m\left(0\right) = 12.1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$q_i\left(t\right) = \rho \cdot \pi \cdot \frac{\phi_i^2}{4} \cdot v_i\left(t\right) \tag{19}$$

$$q_o\left(t\right) = \rho \cdot \pi \cdot \frac{\phi_o^2}{4} \cdot v_o\left(t\right) \tag{20}$$

$v_i(t)$ es la velocidad del agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [m s^{-1}] hacia abajo; $v_o(t)$ es la velocidad del agua que viaja del estanque al ambiente,

por abajo, en [m s^{-1}] hacia abajo; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; D es un coeficiente de roce, en [N m^{-1} s] hacia abajo; ϕ_i es el diámetro interno de la cañería por la que viaja el agua del ambiente al estanque, por arriba, en [m]; ϕ_o es el diámetro interno de la cañería por la que viaja el agua del estanque al ambiente, por abajo, en [m]:

$$v_i(t) = \begin{cases} 3 & \forall t < 10 \\ 1 & \forall 10 \le t < 20 \\ 5 & \forall 20 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$v_o(t) = C \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h(t) + \frac{f_j(t)}{\pi \cdot r^2}} \tag{22}$$

$$g = 9.8 \tag{23}$$

$$D = 500 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$\phi_i = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$\phi_o = 0.22 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

C es un coeficiente de paso del agua del estanque al ambiente, por abajo, en [$kg^{-1/2}$ $m^{3/2}$]:

$$C = 0.045 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

El dibujo de la estructura causal es un poco aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: f_r depende de x y h; x, de v; h, de V; v, de p y m; V, de m; p, de f_r, f_i, f_o y f_g; m, de q_j y q_o; f_i, de q_i y v_j; f_o, de q_o y v_o; f_g, de m_g; q_i, de v_j; q_o, de v_o; y v_o, de h y f_j; mientras, v_i queda independiente.

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (3), (6), (9), (12), (13), (18), (23), (24), (25), (26) y (27) no contienen ninguna variable que evoluciona: (21) contiene 1; (4), (5), (8), (16), (17), (19) y (20) contienen 2 cada una; (1), (7), (11), (14), (15) y (22), 3; (10), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 15 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 6^1$ (=559872) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(27).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa o una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de los otros o de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o del momentum en el recinto, sino que la masa o el momentum depende por integración de todos los caudales o de todas las fuerzas.

(10) tiene el momentum despejado en su lado izquierdo y (11) tiene la masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 559872 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(27), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5 \cdot 6^0$ (=31104).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 31104 sistemas de ecuaciones restantes, 31103 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(27).

CC BY NC ND

Si nos interesa la evolución de f_r; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (4), (10) y (11); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *x* inicial, *p* inicial, *m* inicial, *K, X, r,* ρ, *D,* ϕ_i, φ_o, *C, dt* y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(27) como:

$K = \ldots$ (2′)

$X = \ldots$ (3′)

$r = \ldots$ (9′)

$\rho = \ldots$ (12′)

$D = \ldots$ (24′)

$\phi_i = \ldots$ (25′)

$\phi_o = \ldots$ (26′)

$C = \ldots$ (27′)

$x_0 = \ldots$ (6′)

$p_0 = \ldots$ (13′)

$m_0 = \ldots$ (18′)

$g = 9.8$ (23′)

$v_{i,k} = \ldots$ (21′)

$V_k = m_k / \rho$ (8′)

$h_k = V_k / \left(\pi \cdot r^2\right)$ (5′)

$v_k = p_k / m_k$ (7′)

$q_{i,k} = \rho \cdot \left(\phi_i^2 / 4\right) \cdot v_{i,k}$ (19′)

$f_{i,k} = q_{i,k} \cdot v_{i,k}$ (14′)

$v_{o,k} = C \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h_k + f_{i,k} / \left(\pi \cdot r^2\right)}$ (22′)

$q_{o,k} = \rho \cdot \left(\phi_o^2 / 4\right) \cdot v_{o,k}$ (20′)

$f_{o,k} = q_{o,k} \cdot v_{o,k}$ (15′)

$f_{g,k} = m_k \cdot g$ (16′)

$f_{a,k} = D \cdot m_k$ (17′)

$f_{r,k} = K \cdot \left(X - \left(x_k - h_k / 2\right)\right)$ (1′)

$x_{k+1} = x_k + v_k \cdot dt$ (4′)

$p_{k+1} = p_k + \left(f_{r,k} - f_{i,k} + f_{o,k} . - f_{g,k}\right) \cdot dt$ (10′)

$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k}\right) \cdot dt$ (11′)

El dibujo de la estructura temporal del método de computación, también es un poco aburrido. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3. En ella, para dar información más vivida, se ha agregado $x_h=x+h/2$ y $x_l=x-h/2$, que son las distancias desde el suelo hasta la superficie superior del agua y hasta la superficie inferior del agua (el fondo del estanque), respectivamente, en [m].

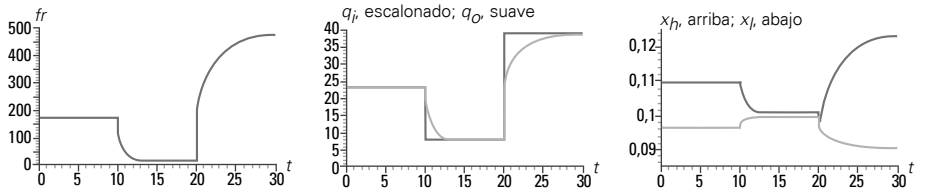


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4), (10) y (11) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la distancia desde el suelo hasta el centro del agua, para el momentum y para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7); derivando (10) e insertando (1), (14), (15), (16), (17), (20), (7), (22), (5), (8), (14) y (19); y derivando (11), insertando (20), (22), (5), (8), (14) y (19):

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{p(t)}{m(t)} \tag{a1}$$

$$\frac{dp(t)}{dt}=-\left(1-\frac{\rho\cdot\phi_o^2\cdot C^2}{4\cdot r^2}\right)\cdot\frac{\rho\cdot\pi\cdot\phi_i^2}{4}\cdot v_i^2(t)+\left(\frac{K}{2\cdot\pi\cdot r^2\cdot\rho}-\left(1-\frac{\rho\cdot\phi_o^2\cdot C^2}{4\cdot r^2}\right)\cdot g\right)\cdot m(t) - D\cdot\frac{p(t)}{m(t)}-K\cdot x(t)+K\cdot X \tag{a2}$$

$$\frac{dm(t)}{dt}=\frac{\rho\cdot\pi\cdot\phi_i^2}{4}\cdot v_i(t)-\frac{\rho\cdot\pi\cdot\phi_o^2\cdot C}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi\cdot r^2}\cdot\left(\frac{\rho\cdot\pi\cdot\phi_i^2}{4}\cdot v_i^2(t)+g\cdot m(t)\right)} \tag{a3}$$

Si nos interesa la evolución de la fuerza por los resortes, aceptando (a1), (a2) y (a3), considerando (1) e insertando (5) y (8):

$$f_r(t)=\frac{K}{2\cdot\pi\cdot r^2\cdot\rho}\cdot m(t)-K\cdot x(t)+K\cdot X \tag{a4}$$

BY NC ND

49.0

MOVIMIENTOS A LO LARGO DE UNA CORREA [37] (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS)

Los artefactos en que, como medios de tracción, se usa correas, bandas, barras, cables, cadenas, cintas, cuerdas u otros cuerpos parecidamente filiformes, son antiguos y muchos; por ejemplo, andariveles, funiculares y teleféricos (en el transporte humano), huinches y correas transportadoras (en el traslado de sólidos inertes), mecanismos con piñones y cadenas, o con poleas y correas (en el acoplamiento de partes de máquinas).

Imaginemos una correa –quizás viajera– que se mantiene horizontal con algún estiramiento promedio, en un ambiente quieto [38] y rebanado ficticiamente en forma de rodajas delgadas, presuntamente homogéneas por dentro, y numeradas de izquierda a derecha.

Fig. 1: Correa (quizás viajera) en ambiente quieto y rebanado

Interesa predecir las evoluciones de las velocidades a lo largo de la correa.

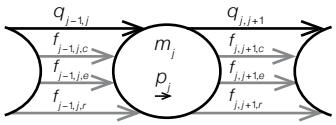


Fig. 2: Estructura espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

t es el tiempo, en [s].

$v_j(t)$ es la velocidad media de la masa en la rodaja j, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$v_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j(t)} \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{1}$$

$p_j(t)$ es el momentum en la rodaja j, en [N s] hacia la derecha; $m_j(t)$ es la masa en la rodaja j, en [kg]; J es el número de rodajas:

[37] Reformulación de: J. Glaría, D. Erraz y O. Orellana, 2004, Masses and momentums along strings and the like, *Informe interno, Universidad Técnica Federico Santa María*; y de: D. Erraz, J. Glaría y O. Orellana, 2004, Masses and momentums along strings including inner friction, *Informe interno, Universidad Técnica Federico Santa María*.

[38] La quietud es respecto a algún sistema de coordenadas (casi) inercial.

CC BY NC ND

$$p_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ p_j(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} f_{j-1,j,e}(\tau) - f_{j,j+1,e}(\tau) \\ + f_{j-1,j,r}(\tau) - f_{j,j+1,r}(\tau) \\ + f_{j-1,j,c}(\tau) - f_{j,j+1,c}(\tau) \end{pmatrix} \cdot d\tau & \text{si } 1 < j < J \\ 0 & \text{si } j = J \end{cases}$$

(en los extremos, por ejemplo) (2) [39]

$$m_j(t) = m_j(0) + \int_0^t \left(q_{j-1,j}(\tau) - q_{j,j+1}(\tau) \right) \cdot d\tau \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{3}$$

$J = 7$ (por ejemplo) (4)

$p_j(0)$ es el momentum inicial en la rodaja *j*, en [N s] hacia la derecha; $f_{j-1,j,e}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja *j-1* a la *j* por elasticidad, en [N] hacia la derecha; $f_{j-1,j,r}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja *j-1* a la *j* por roce interno, en [N] hacia la derecha; $f_{j-1,j,c}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja *j-1* a la *j* con el caudal, en [N] hacia la derecha; $m_j(0)$ es la masa inicial en la rodaja *j*, en [kg]; $q_{j-1,j}(t)$ es el caudal neto de la rodaja *j-1* a la *j*, en [kg s^{-1}]:

$$p_j(0) = 0 \quad \text{si } 1 \le j \le J \text{ (por ejemplo)} \tag{5}$$

$$f_{j-1,j,e}(t) = -E \cdot A \cdot \left(\frac{\rho_0}{\frac{\rho_{j-1}(t) + \rho_j(t)}{2}} - 1 \right) \quad \text{si } 1 < j \le J \tag{6} [40]$$

$$f_{j-1,j,r}(t) = \frac{D \cdot A}{dx} \cdot \frac{v_{j-1}(t) - v_j(t)}{\frac{\rho_{j-1}(t) + \rho_j(t)}{2}} \quad \text{si } 1 < j \le J \tag{7}$$

$$f_{j-1,j,c}(t) = q_{j-1,j}(t) \cdot \frac{v_{j-1}(t) + v_j(t)}{2} \quad \text{si } 1 < j \le J \tag{8} [41]$$

[39] Suponemos que hay fuerzas periféricas ocultas y sospechosamente complacientes.

[40] Suponemos que la densidad en la frontera entre cualquier par de rodajas es el promedio de las densidades de las rodajas mismas, y que domina tanto a la fuerza de una rodaja a la otra por elasticidad como a la fuerza por roce interno.

[41] Suponemos que la velocidad en la frontera entre cualquier par de rodajas es el promedio de las velocidades de las rodajas mismas, y que domina tanto a la fuerza que va con el caudal como al caudal mismo.

CC BY NC ND

$$m_j(0) = \begin{cases} 0.77 & \text{si } j = 1 \\ 0.77 & \text{si } j = 2 \\ 0.83 & \text{si } j = 3 \\ 0.86 & \text{si } j = 4 \\ 0.83 & \text{si } j = 5 \\ 0.77 & \text{si } j = 6 \\ 0.77 & \text{si } j = 7 \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (9)$$

$$q_{j-1,j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ \rho_{j-1}(t) \cdot A \cdot \dfrac{v_{j-1}(t) + v_j(t)}{2} & \text{si } 0 < \dfrac{v_{j-1}(t) + v_j(t)}{2} \text{ y } 1 < j \le J \\ \rho_j(t) \cdot A \cdot \dfrac{v_{j-1}(t) + v_j(t)}{2} & \text{si } \dfrac{v_{j-1}(t) + v_j(t)}{2} \le 0 \text{ y } 1 < j \le J \\ 0 & \text{si } j = J + 1 \end{cases}$$

(en los extremos, por ejemplo) (10) [42]

E es el módulo de Thomas Young (1773-1829) para la correa, en [N m^{-2}]; A es su área transversal en [m^2]; ρ_0 es la densidad de la correa estando relajada, en [kg m^{-3}]; $\rho_j(t)$ es la densidad de la rodaja j, en [kg m^{-3}]; D es un coeficiente relativo al roce interno de la correa, en [kg^2 m^{-4} s^{-1}]; dx es la longitud de cualquier rodaja, en [m]:

$$E = 1 \cdot 10^6 \quad \text{(por ejemplo, si la correa es de caucho)} \qquad (11)$$

$$A = 1 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (12)$$

$$\rho_0 = 960 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (13)$$

$$\rho_j(t) = \frac{m_j(t)}{A \cdot dx} \quad \text{si } 1 \le j \le J \qquad (14)$$

$$D = 1 \cdot 10^6 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (15)$$

$$dx = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (16)$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: v_j depende de p_j y m_j; p_j, de $f_{j-1,j,e}$, $f_{j,j+1,e}$, $f_{j-1,j,r}$, $f_{j,j+1,r}$, $f_{j-1,j,c}$ y $f_{j,j+1,c}$; m_j, de $q_{j-1,j}$ y $q_{j,j+1}$; $f_{j-1,j,e}$, de ρ_{j-1} y ρ_j; $f_{j-1,j,r}$, de ρ_{j-1}, ρ_j, v_{j-1} y v_j; $f_{j-1,j,c}$, de $q_{j-1,j}$, v_{j-1} y v_j; $q_{j-1,j}$, de ρ_{j-1}, ρ_j, v_{j-1} y v_j; y ρ_j, de m_j.

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (9), (11), (12), (13), (15) y (16) no contienen ninguna variable que evoluciona: (14) contiene 2; (1), (3) y (6), 3 cada una; (8), 4; (7) y (19), 5; (2), 7; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede

[42] Suponemos que hay caudales periféricos nulos.

BY NC ND

plantear $2^1 \cdot 3^3 \cdot 4^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ (=37800) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(16).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa o una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de los otros o de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o del momentum en el recinto, sino que la masa o el momentum depende por integración de todos los caudales o de todas las fuerzas.

(2) tiene un momentum despejado en su lado izquierdo, y (3) tiene una masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado (para todas las rodajas) y, de los 37800 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(16), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^1 \cdot 5^2$ (=1800).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1800 sistemas de ecuaciones restantes, 1799 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j* o alguna otra), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(16).

Si nos interesa la evolución de las velocidades v_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2) y (3); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar p_j inicial, m_j inicial, *J*, *E*, *A*, ρ_0, *D*, *dx*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(16) como:

$$J = \ldots \tag{4'}$$

$$E = \ldots \tag{11'}$$

$$A = \ldots \tag{12'}$$

$$\rho_0 = \ldots \tag{13'}$$

$$p_{j,0} = \ldots \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{5'}$$

$$m_{j,0} = \ldots \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{9'}$$

$$D = \ldots \tag{15'}$$

$$dx = \ldots \tag{16'}$$

$$\rho_{j,k} = \frac{m_{j,k}}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{14'}$$

$$v_{j,k} = \frac{p_{j,k}}{m_{j,k}} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \tag{1'}$$

$$q_{j-1,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j = 1 \\ \rho_{j-1} \cdot A \cdot \dfrac{v_{j,k} + v_{j,k-1}}{2} & \text{si} \quad 0 < \dfrac{v_{j,k} + v_{j-1,k}}{2} \\ & \text{y} \quad 1 < j \le J \\ \rho_j \cdot A \cdot \dfrac{v_{j,k} + v_{j-1,k}}{2} & \text{si} \quad \dfrac{v_{j,k} + v_{j-1,k}}{2} \le 0 \\ & \text{y} \quad 1 < j \le J \\ 0 & \text{si} \quad j = J + 1 \end{cases} \tag{10'}$$

CC BY NC ND

$$f_{j-1,j,e,k} = -E \cdot A \cdot \left(\frac{\rho_0}{\frac{\rho_{j,k} + \rho_{j-1,k}}{2}} - 1 \right) \qquad \text{si} \quad 1 < j \le J \qquad (6')$$

$$f_{j-1,j,r,k} = -\frac{D \cdot A}{dx} \cdot \frac{v_{j,k} - v_{j-1,k}}{\frac{\rho_{j,k} + \rho_{j-1,k}}{2}} \qquad \text{si} \quad 1 < j \le J \qquad (7')$$

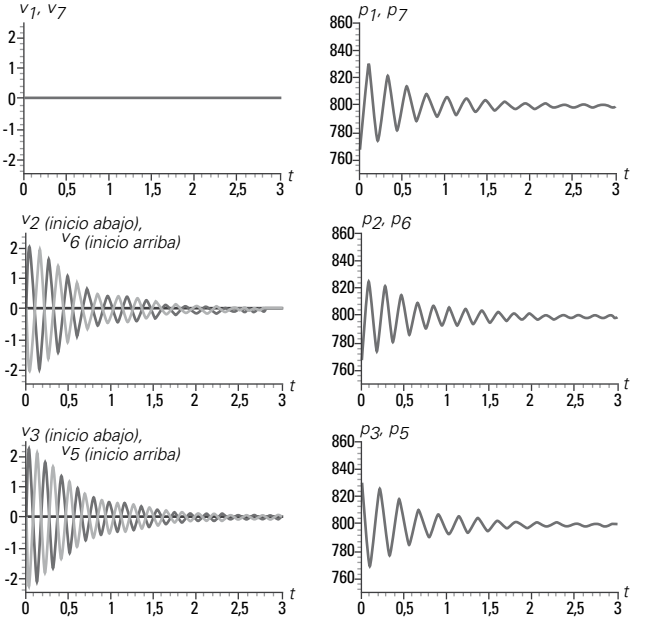
$$f_{j-1,j,c,k} = q_{j-1,j,k} \cdot \frac{v_{j,k} + v_{j-1,k}}{2} \qquad \text{si} \quad 1 < j \le J \qquad (8')$$

$$p_{j,k+1} = \begin{cases} \ldots & \text{si} \quad j = 1 \\ p_{j,k} + \left(\begin{array}{l} f_{j-1,j,e,k} - f_{j,j+1,e,k} \\ +f_{j-1,j,r,k} - f_{j,j+1,r,k} \\ +f_{j-1,j,c,k} - f_{j,j+1,c,k} \end{array} \right) \cdot dt & \text{si} \quad 1 < j < J \\ \ldots & \text{si} \quad j = J \end{cases} \qquad (2')$$

$$m_{j,k+1} = m_{j,k} + \left(q_{j-1,j,k} - q_{j,j+1,k} \right) \cdot dt \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (3')$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante largo. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.



BY NC ND

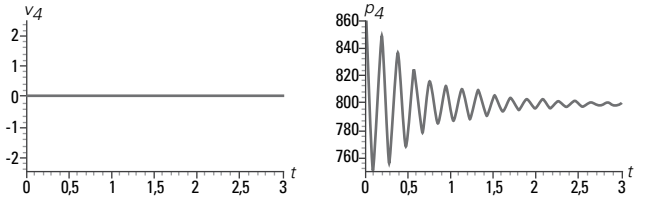


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2) y (3), se podría intentar ecuaciones diferenciales para los momenta y las masas. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de los momenta y las masas en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Y si luego se quiere hablar de fuerzas y caudales, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de tales fuerzas y caudales en las áreas de las fronteras por donde viajan los momenta y las masas.

$p_j(t)$ es la concentración de momentum en el volumen de la rodaja j, en [N s m^{-3}] hacia la derecha, y $m_j(t)$ es la concentración de masa en el volumen de la rodaja j, en [kg m^{-3}]:

$$\underline{p}_j(t) = \frac{p_j(t)}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 < j < J \qquad \text{(a1)}$$

$$\underline{p}_j(t) = \frac{p_j(t)}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 < j < J \qquad \text{(a2)}$$ [43]

Derivando (a1), insertando (2), (6), (7), (8), (10), (1) y (14), y usando (a1) y (a2); y derivando (a2), insertando (3), (10), (1) y (14), y usando (a1) y (a2):

[43] Ajustamos las rodajas de manera que sus áreas transversales coincidan con la de la correa.

BY NC ND

$$\frac{d\underline{p}_j(t)}{dt} = \frac{\dfrac{E\cdot\rho_0}{\dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)+\underline{m}_j(t)}{2}} - \dfrac{E\cdot\rho_0}{\dfrac{\underline{m}_j(t)+\underline{m}_{j-1}(t)}{2}}}{dx} + \frac{\dfrac{D\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}-\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{dx}}{\dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)+\underline{m}_j(t)}{2}} - \dfrac{D\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}-\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{dx}}{\dfrac{\underline{m}_j(t)+\underline{m}_{j-1}(t)}{2}}}{dx}$$

$$- \frac{\left(\begin{array}{l} \dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)+\underline{m}_j(t)}{2}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2}\right)^2 \\ -\dfrac{\underline{m}_j(t)+\underline{m}_{j-1}(t)}{2}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2}\right)^2 \end{array}\right)}{dx}$$

$$+ \frac{dx}{2}\cdot\frac{\left(\begin{array}{l} \dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)-\underline{m}_j(t)}{dx}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2}\right)^2\cdot\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2}\right) \\ -\dfrac{\underline{m}_j(t)-\underline{m}_{j-1}(t)}{dx}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2}\right)^2\cdot\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2}\right) \end{array}\right)}{dx}$$

si $1 < j < J$

$$\frac{d\underline{m}_j(t)}{dt} = -\frac{\left(\begin{array}{l} \dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)+\underline{m}_j(t)}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2} \\ -\dfrac{\underline{m}_j(t)+\underline{m}_{j-1}(t)}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2} \end{array}\right)}{dx}$$

$$+ \frac{dx}{2}\cdot\frac{\left(\begin{array}{l} \dfrac{\underline{m}_{j+1}(t)-\underline{m}_j(t)}{dx}\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2}\cdot\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_{j+1}(t)}{\underline{m}_{j+1}(t)}+\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}}{2}\right) \\ -\dfrac{\underline{m}_j(t)-\underline{m}_{j-1}(t)}{dx}\cdot\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2}\cdot\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\dfrac{\underline{p}_j(t)}{\underline{m}_j(t)}+\dfrac{\underline{p}_{j-1}(t)}{\underline{m}_{j-1}(t)}}{2}\right) \end{array}\right)}{dx}$$

si $1 < j < J$

CC BY NC ND

Y haciendo que *dx* tienda a 0 en el supuesto de que

$$\frac{\partial \frac{\partial \underline{m}(x,t)}{\partial x} \cdot \left| \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \right|^2 \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \right)}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial \frac{\partial \underline{m}(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \right)}{\partial x}$$

son finitas, y reconociendo que $d\underline{p}(x,t)/dt = \partial \underline{p}(x,t)/\partial t$ y $d\underline{m}(x,t)/dt = \partial \underline{m}(x,t)/\partial t$ cuando esas derivadas parciales se refieren a *x* constante:

$$\frac{\partial \underline{p}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \frac{E \cdot \rho_0 + D \cdot \frac{\partial \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)}}{\partial x} - \underline{p}^2(x,t)}{\underline{m}(x,t)}}{\partial x} \qquad \text{si} \quad 0 < x < X \tag{a3}$$

$$\frac{\partial \underline{m}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}(x,t)}{\partial x} \qquad \text{si} \quad 0 < x < X \tag{a4}$$

Si interesan las evoluciones de las velocidades, usando (1), (a1) y (a2), y acomodando para *dx* tendiente a 0:

$$v(x,t) = \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \qquad \text{si} \quad 0 < x < X \tag{a5}$$

Por cierto, *X* es la longitud de la correa, en [m], y $0<x<X$ alude a la rodaja elegida (según su posición media, hacia la derecha).

Apéndice acerca de otras ecuaciones diferenciales

(a3), (a4) y (a5) pueden replantearse muy rápidamente como:

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = \frac{\partial \left(E \cdot \left(\frac{\rho_0}{\underline{m}} - 1 \right) + \frac{D}{\underline{m}} \cdot \frac{\partial \left(\underline{p}/\underline{m} \right)}{\partial x} - \underline{m} \cdot \left(\underline{p}/\underline{m} \right)^2 \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\underline{f}_e + \underline{f}_r - \underline{f}_c \right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial x}$$

$$\underline{p} = \underline{m} \cdot v = \rho \cdot v$$

donde $\underline{f}_e$, $\underline{f}_r$ y $\underline{f}_c$ serían concentraciones de fuerzas de elasticidad (atractiva), roce y convección, respectivamente.

Según ello:

$$\frac{\partial \left(\rho \cdot v \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(E \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) + \frac{D}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \rho \cdot v^2 \right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\rho \cdot v \right)}{\partial x}$$

CC BY NC ND

Luego:

$$\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial E\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right)}{\partial x}+\frac{\partial\frac{D}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\partial x}-2\cdot\rho\cdot v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-v^2\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial\left(\rho\cdot v\right)}{\partial x}$$

E insertando la última ecuación en la penúltima y reordenando un poco:

$$\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial t}+v\left(x,t\right)\cdot\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{\rho\left(x,t\right)}\cdot\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{1}{\rho\left(x,t\right)}\cdot\frac{\partial\frac{D}{\rho\left(x,t\right)}\cdot\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x}}{\partial x}=0 \qquad \text{(a6)}$$

$$\frac{\partial \rho\left(x,t\right)}{\partial t}+v\left(x,t\right)\cdot\frac{\partial \rho\left(x,t\right)}{\partial x}+\rho\left(x,t\right)\cdot\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x}=0 \qquad \text{(a7)}$$

donde $P=-E\cdot A\cdot(\rho_0/\rho-1))/A=-\underline{f}_e$ sería la presión (supuestamente repulsiva) a lo largo de la correa, en [N m^{-2}].

Es interesante que (a6) y (a7) tienen pares en los libros de dinámica de fluidos [44]. De hecho, si se usa (a6) con $\partial v/\partial t=0$ y $D=0$:

$$v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\rho_j\cdot\frac{v_{j+1}^2-v_{j-1}^2}{2\cdot dx}+\frac{P_{j+1}-P_{j-1}}{2\cdot dx}=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\rho_j\cdot v_{j+1}^2+P_{j+1}=\frac{1}{2}\cdot\rho_j\cdot v_{j-1}^2+P_{j-1}=\ldots$$

que es la ecuación de Bernoulli para fluidos sin roce interno apreciable, moviéndose estacionariamente por cañerías.

Por otro lado, si se usa (a6) y (a7) con $D=0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

que son las ecuaciones de Euler unidimensionales para fluidos sin roce apreciable.

Además, si se usa (a6) y (a7) con $D=(4/3)\cdot\eta\cdot\rho$:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{4}{3\cdot\rho}\cdot\frac{\partial\eta\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

que son las ecuaciones unidimensionales de Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) y George Gabriel Stokes (1819-1903) para fluidos (donde η es la viscosidad dinámica, en [kg m^{-1} s^{-1}]).

Pero, por supuesto, $D=(4/3)\cdot\eta\cdot\rho$ implica $\eta=(3/4)\cdot D/\rho$; y la presencia de ρ como denominador para η parece rara.

Repasemos un par de detalles.

[44] Por ejemplo: N. Krasnov (1985). *Aerodynamics*, Mir, Moscú.

BY NC ND

Apéndice acerca de la Mecánica para (6)

Si las velocidades son homogéneas a lo largo de la correa completa, podemos suponer, según la aproximación (limitada) de Hooke, que:

$$f_e = -K_e \cdot \left(x_D - x_I - L_0 \right)$$

donde f_e es la fuerza de izquierda a derecha a través de la correa por elasticidad, en [N] hacia la derecha; K_e es el coeficiente de elasticidad de la correa, en [N m^{-1}]; x_I y x_D son las posiciones de sus extremos izquierdo y derecho, en [m]; y L_0 es su longitud estando relajada, en [m].

Pero, si las velocidades son homogéneas, tal fuerza es igual en cualquier pedazo de correa, con lo cual:

$$f_e = -k_e \cdot \left(x_d - x_i - l_0 \right), \quad x_d - x_i = \left(x_D - x_I \right) \cdot \frac{m}{M}, \quad l_0 = L_0 \cdot \frac{m}{M}$$

$$\text{y} \quad m = \rho \cdot A \cdot \left(x_d - x_i \right) = \rho_0 \cdot A \cdot l_0$$

donde k_e es el coeficiente de elasticidad del pedazo, en [N m^{-1}]; x_i y x_d son las posiciones de sus extremos izquierdo y derecho, en [m]; l_0 es su longitud estando relajado, en [m]; m y M son las masas en el pedazo y en la correa completa, en [kg]; ρ es la densidad del pedazo, en [kg m^{-3}]; A es el área de su sección transversal, en [m^2]; y ρ_0 es su densidad estando relajada, en [kg m^{-3}].

Algunas maniobras algebraicas triviales permiten deducir que:

$$f_e = -E \cdot A \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)$$

donde $E = K_e \cdot M / (A^2 \cdot \rho_0) = k_e \cdot m / (A^2 \cdot \rho_0)$ es el módulo de Young para la correa, en [N m^{-2}].

Y una réplica del supuesto inicial nos permite suponer que, si las velocidades son homogéneas a lo largo de cualquier pedazo, la fuerza a través de él depende de las posiciones de sus extremos según esta última ecuación, aunque las velocidades no sean homogéneas a lo largo de la correa completa [45].

Esto justifica a (6)

---

[45] Según Young, la última ecuación sería:
$f_e = -E \cdot A \cdot \left(l - l_0 \right) / l_0$, donde $l = x_d - x_i$.

Según Poisson, una aproximación mejor sería:

$$f(t) = E \cdot A \cdot \left(1 - \mu \cdot \left(l(t) - l_0 \right) / l_0 \right)^2 \cdot \left(l(t) - l_0 \right) / l_0$$

donde μ es el módulo de Poisson para la correa, en tanto por uno, ya que A en verdad varía con l.

Pero, como μ suele ser menor que 1/3 y $(l - l_0)/l_0$ suele ser mucho menor que 1, podemos suponer:

$$f(t) = E \cdot A \cdot \left(\left(\left(l - l_0 \right) / l_0 \right) - 2 \cdot \mu \cdot \left(\left(l - l_0 \right) / l_0 \right)^2 + \mu^2 \cdot \left(\left(l - l_0 \right) / l_0 \right)^3 \right)$$

$$= E \cdot A \cdot \left(\left(\left(l - l_0 \right) / l_0 \right) - \ldots \right) \approx E \cdot A \cdot \left(l - l_0 \right) / l_0$$

lo cual nos regresa a la aproximación de Young y a nuestra propia ecuación.

CC BY NC ND

Apéndice acerca de la Mecánica para (7)

Si las aceleraciones son homogéneas a lo largo de la correa completa, podemos suponer, según la aproximación (limitada) de Newton, que:

$$f_r = D_r \cdot \left(v_I - v_D\right)$$

donde f_r es la fuerza de izquierda a derecha a través de la correa por roce interno, en [N] hacia la derecha; D_r es el coeficiente de roce de la correa, en [N m^{-1} s]; y v_I y v_D son las velocidades de sus extremos izquierdo y derecho, en [m s^{-1}] hacia la derecha.

Pero, si las aceleraciones son homogéneas, tal fuerza es igual en cualquier pedazo de correa, con lo cual:

$$f_r = d_r \cdot \left(v_i - v_d\right), \quad v_i - v_d = \left(v_I - v_D\right) \cdot \frac{m}{M} \quad \text{y} \quad m = \rho \cdot A \cdot l$$

donde d_r es el coeficiente de roce del pedazo, en [N m^{-1} s]; v_i y v_d son las velocidades de sus extremos izquierdo y derecho, en [m s^{-1}] hacia la derecha; m y M son las masas en el pedazo y en la correa completa, en [kg]; ρ es la densidad del pedazo, en [kg m^{-3}]; A es el área de su sección transversal, en [m^2]; y l es su longitud, en [m].

Algunas maniobras algebraicas triviales permiten deducir que:

$$f_r = \frac{D \cdot A}{l} \cdot \frac{v_i - v_d}{\rho}$$

donde $D = D_r \cdot M/A^2 = d_r \cdot m/A^2$.

Y una réplica del supuesto inicial nos permite suponer que, si las aceleraciones son homogéneas a lo largo de cualquier pedazo, la fuerza a través de él depende de las velocidades de sus extremos según esta última ecuación, aunque las aceleraciones no sean homogéneas a lo largo de la correa completa.

Esto justifica a (7) y a la presencia de ρ como denominador para υ.

Apéndice acerca de la visión de Lagrange

En los libros de dinámica de fluidos se hace notorio que hemos eludido otra visión.

Hemos visto a la correa como un león de pelaje parejo en una jaula quieta, cuyas barras hemos usado para definir las fronteras de rodajas sucesivas e inmóviles.

En vez, podemos ver a la correa como un tigre de pelaje rayado, cuyas propias rayas podemos usar para definir las fronteras de rodajas sucesivas y móviles. Esta es la visión de Lagrange. Según ella, la correa exhibe momenta variantes en sus rodajas, pero no masas variantes. Por eso, el planteamiento de ecuaciones pudiera parecer más simple. Pero la correa exhibe posiciones variantes en sus rodajas y fronteras móviles, y necesita un patrón de referencia (posiblemente acorde con las posiciones iniciales) para nombrar a las rodajas. Veamos.

$v_l(t)$ es la velocidad media de la masa en la rodaja móvil l, en [m s^{-1}] hacia la derecha:

$$v_l\left(t\right) = \frac{p_l\left(t\right)}{m_l} \qquad \text{si} \quad 1 \le l \le L \qquad \text{(a8)}$$

$p_l(t)$ es el momentum en la rodaja l, en [N s] hacia la derecha; m_l es la masa en la

CC BY NC ND

rodaja l, en [kg]; L es el número de rodajas:

$$p_l(t) = \begin{cases} \ldots & \text{si } l = 1 \\ p_l(0) + \int_0^t \left(\begin{matrix} f_{l-1,l,e}(\tau) - f_{l,l+1,e}(\tau) \\ + f_{l-1,l,r}(\tau) - f_{l,l+1,r}(\tau) \end{matrix} \right) \cdot d\tau & \text{si } 1 < l < L \\ \ldots & \text{si } l = L \end{cases} \quad \text{(a9)}$$

$$m_l = \ldots \quad \text{si } 1 \le l \le L \quad \text{(a10)}$$

$$L = \ldots \quad \text{(a11)}$$

$p_l(0)$ es el momentum inicial en la rodaja l, en [N s] hacia la derecha; $f_{l-1,l,e}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja $l-1$ a la l por elasticidad, en [N] hacia la derecha; $f_{l-1,l,r}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja $l-1$ a la l por roce interno, en [N] hacia la derecha:

$$p_l(0) = \ldots \quad \text{si } 1 \le l \le L \quad \text{(a12)}$$

$$f_{l-1,l,e}(t) = -E \cdot A \cdot \left(\frac{\rho_0}{\frac{\rho_{l-1}(t) + \rho_l(t)}{2}} - 1 \right) \quad \text{si } 1 < l \le L \quad \text{(a13)}$$

$$f_{l-1,l,r}(t) = \frac{D \cdot A}{x_l(t) - x_{l-1}(t)} \cdot \frac{v_{l-1}(t) - v_l(t)}{\frac{\rho_{l-1}(t) + \rho_l(t)}{2}} \quad \text{si } 1 < l \le L \quad \text{(a14)}$$

E es el módulo de Young para la correa, en [N m^{-2}]; A es el área transversal de la correa, en [m^2]; ρ_0 es su densidad estando relajada, en [kg m^{-3}]; $\rho_l(t)$ es la densidad de la rodaja l, en [kg m^{-3}]; D es un coeficiente relativo al roce interno de la correa, en [kg^2 m^{-4} s^{-1}]; $x_l(t)$ es la posición media de la rodaja l, en [m] hacia la derecha:

$$E = \ldots \quad \text{(a15)}$$

$$A = \ldots \quad \text{(a16)}$$

$$\rho_0 = \ldots \quad \text{(a17)}$$

$$\rho_l(t) = \begin{cases} \dfrac{m_1}{A \cdot \left(x_2(t) - x_1(t) \right)} & \text{si } l = 1 \\ \dfrac{m_l}{A \cdot \dfrac{x_{l+1}(t) - x_{l-1}(t)}{2}} & \text{si } 1 < l < L \\ \dfrac{m_L}{A \cdot \left(x_L(t) - x_{L-1}(t) \right)} & \text{si } l = L \end{cases} \quad \text{(a18)}$$

$$D = \ldots \quad \text{(a19)}$$

$$x_l(t) = x_l(0) + \int_0^t v_l(\tau) \cdot d\tau \quad \text{si } 1 \le l \le L \quad \text{(a20)}$$

$x_l(0)$ es la posición media inicial de la rodaja l, en [m] hacia la derecha:

$$x_l(0) = \ldots \quad \text{si } 1 \le l \le L \quad \text{(a21)}$$

Listo.

Si deseamos ecuaciones diferenciales, podemos suponer que $\underline{p}_l(t)$ es la concentración de momentum en el volumen de la rodaja l, en [N s m^{-3}] hacia la derecha, y $\underline{m}_l$ es la concentración de masa en el mismo volumen, en [kg m^{-3}]:

CC BY NC ND

$$\underline{p}_l(t) = \frac{p_l(t)}{A \cdot \frac{x_{l+1}(t) - x_{l-1}(t)}{2}} \quad \text{si} \quad 1 < l < L \tag{a22}$$

$$\underline{m}_l(t) = \frac{m_l}{A \cdot \frac{x_{l+1}(t) - x_{l-1}(t)}{2}} = \rho_l(t) \quad \text{si} \quad 1 < l < L \tag{a23}$$

Derivando (a22), insertando (a9), (a20), (a13), (a14) y (a8) y usando (a22) y (a23); derivando (a23), insertando (a20) y (a8), y usando (a22) y (a23); haciendo que *dx* tienda a 0 en ambos casos; y reconociendo que $d\underline{p}(x_{ref}, t)/dt = \partial \underline{p}(x_{ref}, t)/\partial t$ y $d\underline{m}(x_{ref}, t)/dt = \partial \underline{m}(x_{ref}, t)/\partial t$ cuando estas derivadas parciales se refieren a x_{ref} [46] constante:

$$\frac{\partial p(x_{ref}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\underline{p}(x_{ref}, t)}{\underline{m}(x_{ref}, t)}}{\partial x(x_{ref}, t)} \cdot \frac{E \cdot \rho_0 + D \cdot \frac{\underline{m}(x_{ref}, t)}{\partial x(x_{ref}, t)}}{\underline{m}(x_{ref}, t)} - \underline{p}(x_{ref}, t) \cdot \frac{\partial \frac{\underline{p}(x_{ref}, t)}{\underline{m}(x_{ref}, t)}}{\partial x(x_{ref}, t)} \tag{a24}$$

$$\frac{\partial \underline{m}(x_{ref}, t)}{\partial t} = -\underline{m}(x_{ref}, t) \cdot \frac{\partial \frac{\underline{p}(x_{ref}, t)}{\underline{m}(x_{ref}, t)}}{\partial x(x_{ref}, t)} \tag{a25}$$

Si interesan las evoluciones de las velocidades, usando (a10), (a22) y (a23), y acomodando para *dx* tendiente a 0:

$$v(x_{ref}, t) = \frac{\underline{p}(x_{ref}, t)}{\underline{m}(x_{ref}, t)} \tag{a26}$$

Según (a8):

$$\underline{p}(x_{ref}, t) = \underline{m}(x_{ref}, t) \cdot v(x_{ref}, t) = \rho(x_{ref}, t) \cdot v(x_{ref}, t)$$

Insertando esa ecuación en (a25) y (a26), y simplificando:

$$\frac{\partial v(x_{ref}, t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho(x_{ref}, t)} \cdot \frac{\partial P(x_{ref}, t)}{\partial x(x_{ref}, t)} - \frac{1}{\rho(x_{ref}, t)} \cdot \frac{\partial \frac{D}{\rho(x_{ref}, t)} \cdot \frac{\partial v(x_{ref}, t)}{\partial x(x_{ref}, t)}}{\partial x(x_{ref}, t)} = 0$$

$$\frac{\partial \rho(x_{ref}, t)}{\partial t} + \rho(x_{ref}, t) \cdot \frac{\partial v(x_{ref}, t)}{\partial x(x_{ref}, t)} = 0$$

Así, pues, no necesitamos eludir la visión de Lagrange.

Sin embargo, hay un motivo para considerarla de manera secundaria, por lo menos en el caso presente: las correas, las bandas, las barras, los cables, las cadenas, las cintas, las cuerdas y demás suelen viajar, y seguir sus rodajas móviles puede ser cansador. Inmovilizando las rodajas respecto a un sistema de coordenadas inercial, y mirando los momenta y las masas cruzar las fronteras, es más reposado.

Agreguemos un último comentario: x_{ref} (para las rodajas móviles) y *x* (para las

[46] Si X_{ref} es la longitud del patrón de referencia para nombrar a las rodajas, en [m], $0 < x_{ref} < X_{ref}$ nombra a la rodaja elegida.

BY NC ND

quietas) son diferentes, pero existe una función uno-a-uno entre ellas en todo momento, ya que ninguna rodaja puede atravesar a otra en una correa; por tanto, podemos emprender otras maniobras algebraicas en vez de las que nos condujeron a (a22)-(a24).

Derivando (a22), insertando (a9), (a20), (a13), (a14) y (a8) y usando (a22) y (a23); derivando (a23), insertando (a20) y (a8), y usando (a22) y (a23); haciendo que dx tienda a 0 en ambos casos; y reconociendo que $d\underline{p}(x_{ref},t)/dt=\partial\underline{p}(x,t)/\partial t+v(x,t)\cdot\partial\underline{p}(x,t)/\partial x$ y $d\underline{m}(x_{ref},t)/dt=\partial\underline{m}(x,t)/\partial t+v(x,t)\cdot\partial\underline{m}(x,t)/\partial x$ cuando estas derivadas parciales se refieren a x constante (no a x_{ref} constante):

$$\frac{\partial\underline{p}(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\cdot\frac{\partial\underline{p}(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial\dfrac{E\cdot\rho_0+D\cdot\dfrac{\partial\underline{p}(x,t)}{\partial x}}{\underline{m}(x,t)}}{\partial x}-\underline{p}(x,t)\cdot\frac{\partial\dfrac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)}}{\partial x} \qquad \text{(a24')}$$

$$\frac{\partial\underline{m}(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\cdot\frac{\partial\underline{m}(x,t)}{\partial x}=-\underline{m}(x,t)\cdot\frac{\partial\dfrac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)}}{\partial x} \qquad \text{(a25')}$$

Si interesan las evoluciones de las velocidades, usando (a10), (a22) y (a23), y acomodando para dx tendiente a 0:

$$v(x,t)=\frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{m}(x,t)} \qquad \text{(a26')}$$

Según (a8):

$$\underline{p}(x,t)=\underline{m}(x,t)\cdot v(x,t)=\rho(x,t)\cdot v(x,t)$$

Insertando esa ecuación en (a24') y (a25'), y simplificando:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\cdot\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\rho(x,t)}\cdot\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{\rho(x,t)}\cdot\frac{\partial\dfrac{D}{\rho(x,t)}\cdot\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\cdot\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}+\rho(x,t)\cdot\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=0$$

otra vez.

Apéndice acerca de la Mecánica de los sólidos

Los sólidos no son fluidos.

El parecido entre los fluidos y la correa en el caso presente, se ampara en que hemos hecho consideraciones puramente unidimensionales y, dentro de esas consideraciones para la correa, en que hemos supuesto el área transversal como constante, justificándonos con la pequeñez de las "deformaciones" y del módulo de Poisson.

Para afinar el entendimiento, antes de dar por terminado el caso valgan las explicaciones teóricas que siguen.

CC BY NC ND

Imaginemos el paralelepípedo sólido y los ejes de la figura A1.

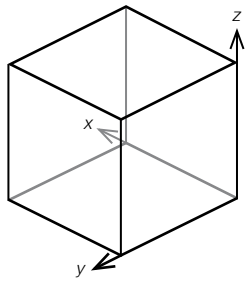


Fig. A1: Paralelepípedo sólido y ejes

Según la aproximación macroscópica estándar, cuando el paralelepípedo está (casi) en equilibrio con fuerzas perpendiculares a sus costados y sin haberse excedido en sus estiramientos ni en sus compresiones:

$$\begin{bmatrix} \frac{l_x(t)-l_{0x}}{l_{0x}} \\ \frac{l_y(t)-l_{0y}}{l_{0y}} \\ \frac{l_z(t)-l_{0z}}{l_{0z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x(t)}{l_y(t) \cdot l_z(t)} \\ \frac{f_y(t)}{l_z(t) \cdot l_x(t)} \\ \frac{f_z(t)}{l_x(t) \cdot l_y(t)} \end{bmatrix}$$

donde: $l_x(t)$, $l_y(t)$ y $l_z(t)$ son las longitudes de los lados del paralelepípedo en las direcciones de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente, en [m]; l_{0x}, l_{0y} y l_{0z} son esas longitudes cuando el paralelepípedo está relajado, en [m]; $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ y $\varepsilon_z(t)$ son las variaciones relativas de $l_x(t)$, $l_y(t)$ y $l_z(t)$ respecto a l_{0x}, l_{0y} y l_{0z}, en tanto por uno y con el seudónimo de "deformaciones"; E es el módulo de Young para paralelepípedo, en [N m^{-2}]; μ es el módulo de Poisson para el paralelepípedo, en tanto por uno; $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ y $\sigma_z(t)$ son las concentraciones de las fuerzas de atracción netas del paralelepípedo al ambiente, a través de los costados perpendiculares a las direcciones de los ejes *x, y* y *z*, respectivamente, en [N m^{-2}] y con el seudónimo de "esfuerzos"; y $f_x(t)$, $f_y(t)$ y $f_z(t)$ son las fuerzas de atracción netas del paralelepípedo al ambiente a través de esos costados, por elasticidad, en [N].

CC BY NC ND

Así, la aproximación hace aparecer al vector de las longitudes como dependiente del de las deformaciones; a éste como dependiente del de los esfuerzos; a éste como dependiente del de las fuerzas y del de las longitudes; a todo lo anterior como simultáneo; y, por consiguiente, a las longitudes como dependientes simultáneamente de las fuerzas y de sí mismas, lo cual no es cuerdo causalmente.

El embrollo puede enmendarse después de invertir el orden de las ecuaciones y de despejar cada una de otra manera:

$$\begin{bmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_z(t) & 0 & 0 \\ 0 & l_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & l_y(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_y(t) & 0 & 0 \\ 0 & l_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & l_x(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \\ \varepsilon_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x(t) & 0 & 0 \\ 0 & l_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & l_z(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/l_{0x} \\ 1/l_{0y} \\ 1/l_{0z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinando esas ecuaciones y deshaciendo el planteamiento matricial:

$$f_x(t) = \frac{E\cdot l_y(t)\cdot l_z(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)} \cdot \left(\frac{(1-\mu)\cdot l_x(t)}{l_{0x}} + \frac{\mu\cdot l_y(t)}{l_{0y}} + \frac{\mu\cdot l_z(t)}{l_{0z}} - (1+\mu) \right)$$

$$f_y(t) = \frac{E\cdot l_z(t)\cdot l_x(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)} \cdot \left(\frac{\mu\cdot l_x(t)}{l_{0x}} + \frac{(1-\mu)\cdot l_y(t)}{l_{0y}} + \frac{\mu\cdot l_z(t)}{l_{0z}} - (1+\mu) \right)$$

$$f_z(t) = \frac{E\cdot l_x(t)\cdot l_y(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)} \cdot \left(\frac{\mu\cdot l_x(t)}{l_{0x}} + \frac{\mu\cdot l_y(t)}{l_{0y}} + \frac{(1-\mu)\cdot l_z(t)}{l_{0z}} - (1+\mu) \right)$$

Esto hace aparecer al vector de las fuerzas como dependiente del de las longitudes, lo cual resulta bastante sensato causalmente. Pero aún tiene dos trabas heredadas de la aproximación estándar: la perpendicularidad de movimientos, y el (casi) equilibrio.

Para deshacer las trabas de manera simple, definamos $l_{0x}=l_{0y}=l_{0z}=l_0$ y, con ello:

$$f_x(t) = \frac{E\cdot l_y(t)\cdot l_z(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)\cdot l_0} \cdot \left((1-\mu)\cdot l_x(t) + \mu\cdot l_y(t) + \mu\cdot l_z(t) - (1+\mu)\cdot l_0 \right)$$

$$f_y(t) = \frac{E\cdot l_z(t)\cdot l_x(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)\cdot l_0} \cdot \left(\mu\cdot l_x(t) + (1-\mu)\cdot l_y(t) + \mu\cdot l_z(t) - (1+\mu)\cdot l_0 \right) \qquad \text{(a27)}$$

$$f_z(t) = \frac{E\cdot l_x(t)\cdot l_y(t)}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)\cdot l_0} \cdot \left(\mu\cdot l_x(t) + \mu\cdot l_y(t) + (1-\mu)\cdot l_z(t) - (1+\mu)\cdot l_0 \right)$$

Enseguida, privilegiando una visión más bien lagrangeana, imaginemos el paralelepípedo con 8 recintos en torno a sus vértices y pongamos atención especial a 1: al derecho inferior, según la figura A2.

CC BY NC ND

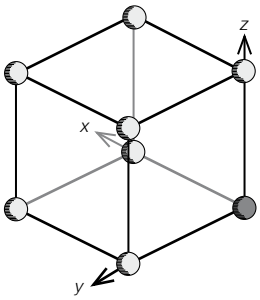


Fig. A2: Paralelepípedo sólido, ejes y 8 recintos

Supongamos que el recinto derecho inferior recibe 7 fuerzas de atracción netas de los otros 7 recintos (y sólo de ellos), por 7 pasadas y según la figura A3.

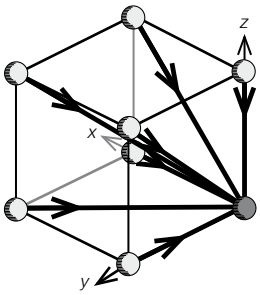


Fig. A3: Paralelepípedo sólido, ejes, 8 recintos y 7 pasadas (de un total de 8·7/2 =28)

Tomando en cuenta que cada fuerza de atracción es un flujo de momentum con la dirección del flujo y el sentido opuesto, la suposición implica que el recinto derecho inferior recibe netamente un flujo de momentum con la dirección y el sentido del eje *x* (además de otros dos con las direcciones y los sentidos de los ejes *y* y *z*).

Ese flujo se puede calcular ignorando las fuerzas provenientes de los 3 recintos en el plano *y-z*, porque éstas no contribuyen a él, según la figura A4.

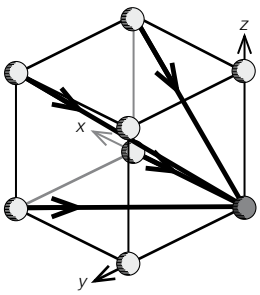


Fig. A4: Paralelepípedo sólido, ejes, 8 recintos y 4 pasadas

Si las fuerzas recibidas por el recinto derecho inferior son de carácter elástico, estamos en un caso parecido al de los tres cuerpos y los tres resortes, aunque con más cuerpos, más resortes y diversidad en las longitudes de los resortes cuando están relajados.

BY NC ND

Dividiendo por esas longitudes para encajar la diversidad, podemos suponer:

$$
\begin{aligned}
f_{000,x}(t) &= K\cdot\frac{l_x(t)-l_0}{l_0} \\
&+K\cdot\frac{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)\right)^{1/2}-\left(l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}{\left(l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)\right)^{1/2}} \\
&+K\cdot\frac{\left(l_x^2(t)+l_z^2(t)\right)^{1/2}-\left(l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}{\left(l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_x^2(t)\right)^{1/2}} \\
&+K\cdot\frac{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{1/2}-\left(l_0^2+l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}{\left(l_0^2+l_0^2+l_0^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{1/2}} \\
&= K\cdot\left(\begin{array}{l}
\dfrac{l_x(t)-l_0}{l_0} \\
+\dfrac{l_x(t)}{l_0\cdot 2^{1/2}}-\dfrac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)\right)^{1/2}} \\
+\dfrac{l_x(t)}{l_0\cdot 2^{1/2}}-\dfrac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_x^2(t)\right)^{1/2}} \\
+\dfrac{l_x(t)}{l_0\cdot 3^{1/2}}-\dfrac{l_x(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{1/2}}
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

donde: $f_{000,x}(t)$ es el flujo de momentum con la dirección y el sentido del eje x que el recinto derecho inferior (ubicado donde x=0, y=0 y z=0) recibe netamente de los otros 7 recintos, en [N] hacia el lado positivo del eje x; K es un coeficiente, en [N]; $l_x(t)$, $l_y(t)$ y $l_z(t)$ son las longitudes de los lados del paralelepípedo por los ejes x, y y z, en general y respectivamente, en [m]; y l_0 es cualquiera de esas longitudes cuando el paralelepípedo está relajado, en [m].

Por consiguiente:

$$
\left.\frac{\partial f_{000,x}(t)}{\partial l_x(t)}\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0}
= K\cdot\left.\left(\begin{array}{l}
\dfrac{1}{l_0} \\
+\dfrac{1}{l_0\cdot 2^{1/2}}-\dfrac{l_y^2(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)\right)^{3/2}} \\
+\dfrac{1}{l_0\cdot 2^{1/2}}-\dfrac{l_z^2(t)}{\left(l_x^2(t)+l_z^2(t)\right)^{3/2}} \\
+\dfrac{1}{l_0\cdot 3^{1/2}}-\dfrac{l_y^2(t)+l_y^2(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{3/2}}
\end{array}\right)\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0}
$$

$$
= K\cdot\left(\frac{1}{l_0}+\frac{2}{l_0\cdot 2^{1/2}}-\frac{2}{l_0\cdot 2^{3/2}}+\frac{1}{l_0\cdot 3^{1/2}}-\frac{2}{l_0\cdot 3^{3/2}}\right)
$$

$$
= \frac{K\cdot 1.899557}{l_0}
$$

CC BY NC ND

$$\left.\frac{\partial f_{000,x}(t)}{\partial l_y(t)}\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0} = K\cdot\left.\left(\frac{l_x(t)\cdot l_y(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)\right)^{3/2}} + \frac{l_x(t)\cdot l_y(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{3/2}}\right)\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0}$$

$$= K\cdot\left(\frac{1}{l_0\cdot 2^{3/2}} + \frac{l_0\cdot l_0}{l_0\cdot 3^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{K\cdot 0.546004}{l_0}$$

$$\left.\frac{\partial f_{000,x}(t)}{\partial l_z(t)}\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0} = K\cdot\left.\left(\frac{l_x(t)\cdot l_z(t)}{\left(l_x^2(t)+l_z^2(t)\right)^{3/2}} + \frac{l_x(t)\cdot l_z(t)}{\left(l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t)\right)^{3/2}}\right)\right|_{l_x(t)=l_y(t)=l_z(t)=l_0}$$

$$= K\cdot\left(\frac{1}{l_0\cdot 2^{3/2}} + \frac{l_0\cdot l_0}{l_0\cdot 3^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{K\cdot 0.546004}{l_0}$$

$$\therefore f_{000,x}(t) - 0 \approx \frac{K\cdot 1.899557}{l_0}\cdot\left(l_x(t)-l_0\right) + \frac{K\cdot 0.546004}{l_0}\cdot\left(l_y(t)-l_0\right) + \frac{K\cdot 0.546004}{l_0}\cdot\left(l_z(t)-l_0\right)$$

$$\therefore f_{000,x}(t) \approx \frac{K\cdot 2.445561}{l_0}\cdot\left(\left(1-\tilde{\mu}\right)\cdot l_x(t) + \tilde{\mu}\cdot l_y(t) + \tilde{\mu}\cdot l_z(t) - \left(1+\tilde{\mu}\right)\cdot l_0\right)$$

$$\tilde{\mu} = 0.223263$$

Hay un parecido notorio entre esta ecuación y la de $f_x(t)$ en (a27).

Ese parecido se hace más notorio aún si se advierte que $f_{000,x}(t)$ es el flujo de momentum con la dirección y el sentido del eje *x* que el recinto derecho inferior recibe netamente de los otros 7 recintos, y que, cuando el paralelepípedo está casi en equilibrio (sin que varíe apreciablemente ningún momentum almacenado), ese flujo de momentum es también el saliente del recinto derecho inferior por el plano *y-z* perpendicular al eje *x*, hacia la derecha y, por tanto, como fuerza de atracción.

Tomando en cuenta que los 4 recintos en torno a los vértices ubicados en el plano *y-z* están en la misma situación, cabe plantear:

$$f_x(t) = 4\cdot f_{000,x}(t)$$

$$\approx \frac{\tilde{E}_x(t)\cdot l_y(t)\cdot l_z(t)}{\left(1+\tilde{\mu}\right)\cdot\left(1-2\cdot\tilde{\mu}\right)\cdot l_0}\cdot\left(\left(1-\tilde{\mu}\right)\cdot l_x(t) + \tilde{\mu}\cdot l_y(t) + \tilde{\mu}\cdot l_z(t) - \left(1+\tilde{\mu}\right)\cdot l_0\right)$$

$$\tilde{E}_x(t) = \frac{K\cdot 6.623012}{l_y(t)\cdot l_z(t)}$$

$$\tilde{\mu} = 0.223263$$

El parecido entre esta ecuación y la de $f_x(t)$ en (a27), ahora es notorio cabalmente; y también lo es una diferencia: *E* se supone constante pero $\tilde{E}_x(t)$ evoluciona.

BY NC ND

El tema se agrava si, por analogía, planteamos:

$$f_x(t) \approx \frac{\tilde{E}_x(t)\cdot I_y(t)\cdot I_z(t)}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})\cdot I_0}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot I_x(t)+\tilde{\mu}\cdot I_y(t)+\tilde{\mu}\cdot I_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot I_0\right)$$

$$f_y(t) \approx \frac{\tilde{E}_y(t)\cdot I_z(t)\cdot I_x(t)}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})\cdot I_0}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot I_x(t)+\tilde{\mu}\cdot I_y(t)+\tilde{\mu}\cdot I_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot I_0\right)$$

$$f_z(t) \approx \frac{\tilde{E}_z(t)\cdot I_x(t)\cdot I_y(t)}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})\cdot I_0}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot I_x(t)+\tilde{\mu}\cdot I_y(t)+\tilde{\mu}\cdot I_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot I_0\right)$$

$$\tilde{E}_x(t) = \frac{K\cdot 6.623012}{I_y(t)\cdot I_z(t)} \qquad \text{(a28)}$$

$$\tilde{E}_y(t) = \frac{K\cdot 6.623012}{I_z(t)\cdot I_x(t)}$$

$$\tilde{E}_z(t) = \frac{K\cdot 6.623012}{I_x(t)\cdot I_y(t)}$$

$$\tilde{\mu} = 0.223263$$

en cambio, se alivia si, en vez de aceptar por completo la aproximación estándar del comienzo, reemplazamos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{f_x(t)}{I_y(t)\cdot I_z(t)} \\ \dfrac{f_y(t)}{I_z(t)\cdot I_x(t)} \\ \dfrac{f_z(t)}{I_x(t)\cdot I_y(t)} \end{bmatrix}$$

por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{f_x(t)}{I_{0y}\cdot I_{0z}} \\ \dfrac{f_y(t)}{I_{0z}\cdot I_{0x}} \\ \dfrac{f_z(t)}{I_{0x}\cdot I_{0y}} \end{bmatrix}$$

Entonces (a27) se convierte en:

$$f_x(t) = \frac{E\cdot I_0}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\left((1-\mu)\cdot I_x(t)+\mu\cdot I_y(t)+\mu\cdot I_z(t)-(1+\mu)\cdot I_0\right)$$

$$f_y(t) = \frac{E\cdot I_0}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\left(\mu\cdot I_x(t)+(1-\mu)\cdot I_y(t)+\mu\cdot I_z(t)-(1+\mu)\cdot I_0\right) \qquad \text{(a27')}$$

$$f_z(t) = \frac{E\cdot I_0}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)}\cdot\left(\mu\cdot I_x(t)+\mu\cdot I_y(t)+(1-\mu)\cdot I_z(t)-(1+\mu)\cdot I_0\right)$$

y (a28), en:

BY NC ND

$$f_x(t) \approx \frac{\tilde{E}\cdot l_0}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot l_x(t)+\tilde{\mu}\cdot l_y(t)+\tilde{\mu}\cdot l_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot l_0\right)$$

$$f_y(t) \approx \frac{\tilde{E}\cdot l_0}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot l_x(t)+\tilde{\mu}\cdot l_y(t)+\tilde{\mu}\cdot l_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot l_0\right)$$

$$f_z(t) \approx \frac{\tilde{E}\cdot l_0}{(1+\tilde{\mu})\cdot(1-2\cdot\tilde{\mu})}\cdot\left((1-\tilde{\mu})\cdot l_x(t)+\tilde{\mu}\cdot l_y(t)+\tilde{\mu}\cdot l_z(t)-(1+\tilde{\mu})\cdot l_0\right) \qquad \text{(a28')}$$

$$\tilde{E} = \frac{K\cdot 6.623012}{l_0^2}$$

$$\tilde{\mu} = 0.223263$$

Si el reemplazo sugerido recién se considera aceptable, (a28') equivale a la aproximación estándar del comienzo de este apéndice, con un defecto: traba el módulo de Poisson sin permitir que se lo ajuste. En compensación, (a28') se basa en una ecuación que tiene dos virtudes: destraba la perpendicularidad de movimientos presupuestada por la aproximación estándar del comienzo (gracias a la presencia de pasadas diagonales para las fuerzas), y también destraba el (casi) equilibrio presupuestado por esa aproximación.

Y, por fin, si se acepta que el paralelepípedo de la figura A1 probablemente es sólo una representación de un pedazo de un sólido, de manera que las figuras A2 y A3 son injustas por no incluir otros recintos y otras pasadas diagonales relativos a pedazos aledaños, se puede maquillar el defecto de (a28') permitiendo ajustes en el módulo de Poisson.

Con esto podemos terminar el caso presente pensando que tenemos explicaciones teóricas suficientes para discutir tanto nuestro supuesto unidimensional de una correa con área transversal (casi) constante, como el comportamiento elástico de los sólidos según la aproximación macroscópica estándar… aunque, claro, nos queda sin atender una pregunta dura, que retrocede hasta la aproximación de Hooke: ¿cómo es que las magnitudes de las fuerzas elásticas pueden aumentar con las distancias?; y también nos quedan otras dos más blandas: ¿cómo afecta la temperatura o, mejor, la energía térmica a las fuerzas elásticas? y ¿qué explicaciones hay para las fuerzas por roce interno?

CC BY NC ND

50.0

UN ROLLO
(MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y TORQUES)

Imaginemos una lámina enrollada en un extremo, alrededor de un eje.

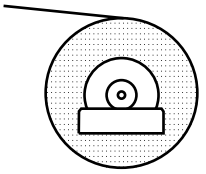


Fig. 1: Un rollo

En el eje del rollo se puede incorporar un torque mediante un motor, y en el extremo libre de la lámina se puede incorporar una fuerza, por ejemplo, mediante rodillos externos.

Interesa predecir la evolución del radio del rollo.

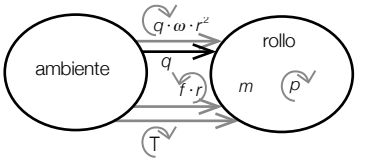


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r(t)$ es el radio del rollo, en [m]:

$$r(t) = \sqrt{\frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot d}} \tag{1}$$

$m(t)$ es la masa en el rollo, en [kg]; ρ es la densidad de la lámina, en [kg m^{-3}]; d es su ancho, en [m]:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$\rho = 950 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \tag{3}$$

$$d = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$m(0)$ es la masa en el rollo inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal del ambiente al rollo, en [kg s^{-1}]:

$$m(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$q(t) = \rho \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega(t) \cdot r(t) \tag{6}$$

ε es el espesor de la lámina, en [m]; $\omega(t)$ es la velocidad angular del rollo, en [rad s^{-1}] con sentido horario:

CC BY NC ND

$$\varepsilon = 0.005 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$\omega(t) = \frac{p(t)}{J(t)} \tag{8}$$

$p(t)$ es el momentum angular en el rollo, en [N m s] con sentido horario; $J(t)$ es el momentum de inercia del rollo, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(\mathrm{T}(\tau) + \left(-f(\tau)\right) \cdot r(\tau) + q(\tau) \cdot \omega(\tau) \cdot r^2(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{9}$$

$$J(t) = 0.5 \cdot m(t) \cdot r^2(t) \tag{10}$$

$p(0)$ es el momentum en el rollo inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T(t)$ es el torque del ambiente al rollo mediante el motor, en [N m] con sentido horario; $f(t)$ es la fuerza del ambiente al rollo mediante los rodillos externos, en [N] hacia la izquierda:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$\mathrm{T}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 6 \\ 1000 & \text{si } 6 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 12 \\ 2000 & \text{si } 12 < t \end{cases} \tag{13}$$

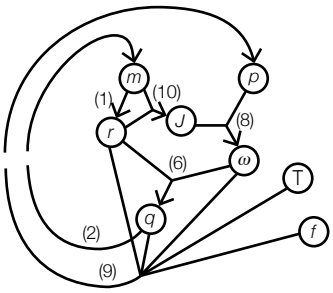


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (7) y (11) no contienen ninguna variable que evoluciona: (12) y (13) contienen 1 cada una; (1) y (2) contienen 2; (6), (8) y (10), 3; (9), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 6^1$ (=648) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(13).

Pero no es cuerdo plantear que un torque o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todas los torques o los caudales de masa.

(2) y (9) tienen una masa o un momentum despejados en sus lados izquierdos como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 o 6 despejes ima-

CC BY NC ND

ginables en cada una se reducen al que está planteado y, de los 648 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(13), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^3$ (=54).

Pero, causalmente, tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

De los 54 sistemas de ecuaciones restantes, 53 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(13).

Si nos interesa la evolución del radio *r*, si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *m* inicial, *p* inicial, *T, f,* ρ, *d,* ε, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(13) como:

$$\rho = \ldots \tag{3'}$$

$$d = \ldots \tag{4'}$$

$$\varepsilon = \ldots \tag{7'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{5'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{11'}$$

$$\mathrm{T}_k = \ldots \tag{12'}$$

$$f_k = \ldots \tag{13'}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{m_k}{\rho \cdot \pi \cdot d}} \tag{1'}$$

$$J_k = 0.5 \cdot m_k \cdot r_k^2 \tag{10'}$$

$$\omega_k = \frac{p_k}{J_k} \tag{8'}$$

$$q_k = \rho \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_k \cdot r_k \tag{6'}$$

$$m_{k+1} = m_k + q_k \cdot dt \tag{2'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(\mathrm{T}_k + \left(-f_k\right) \cdot r_k + q_k \cdot \omega_k \cdot r_k^2\right) \cdot dt \tag{9'}$$

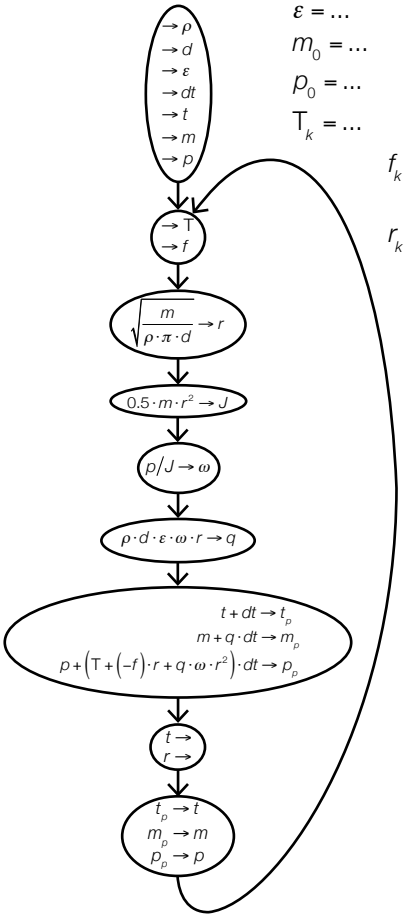


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

CC BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.01 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

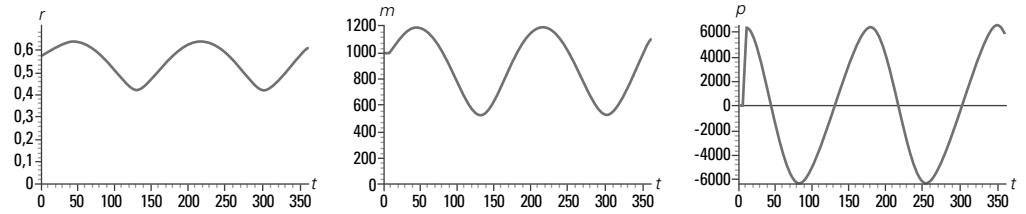


Fig.5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2) y (9) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la masa y el momentum con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (6), (8), (10) y (1), y derivando (9) e insertando (6), (8), (10) y (1):

$$\frac{dm(t)}{dt} = 2\cdot\pi^{1/2}\cdot\varepsilon\cdot\left(\rho\cdot d\right)^{3/2}\cdot\frac{p(t)}{m^{3/2}(t)} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \mathrm{T}(t) - \frac{f(t)\cdot m^{1/2}(t)}{\left(\rho\cdot\pi\cdot d\right)^{1/2}} + 4\cdot\pi^{1/2}\cdot\varepsilon\cdot\left(\rho\cdot d\right)^{3/2}\cdot\frac{p^2(t)}{m^{5/2}(t)} \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesa la evolución del radio, aceptando (a1) y (a2) y considerando (1):

$$r(t) = \sqrt{\frac{m(t)}{\rho\cdot\pi\cdot d}} \qquad \text{(a3)}$$

Al respecto: derivando (a3), insertando (a1) y usando (a3):

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{\varepsilon\cdot p(t)}{\rho\cdot\pi^2\cdot d\cdot r^4(t)}$$

y derivando esa ecuación, insertando (a2), y usando (a3) y la misma ecuación:

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\rho\cdot\pi^2\cdot d\cdot r^3(t)}\cdot\left(\frac{\mathrm{T}(t)}{r} - f(t)\right)$$

CC BY NC ND

51.0

DOS ROLLOS (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y TORQUES)

Imaginemos una lámina enrollada en ambos extremos, alrededor de sendos ejes.

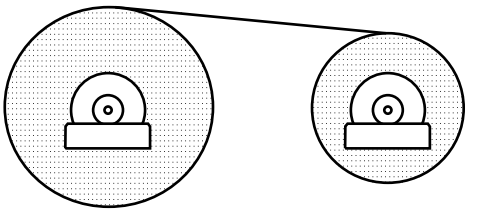


Fig. 1: Dos rollos

En cada eje se puede incorporar un torque mediante un motor.

Interesa predecir la evolución de la fuerza que experimenta la lámina entre ambos rollos, pues la lámina misma puede resultar dañada.

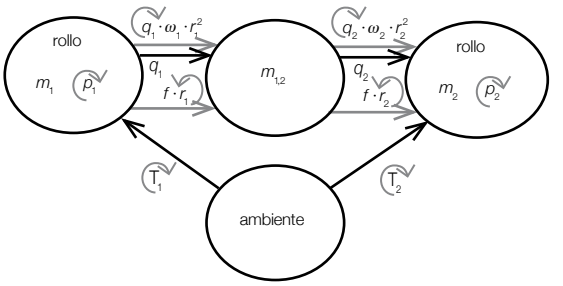


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$f(t)$ es la fuerza del rollo izquierdo al derecho por elasticidad de la lámina entre ambos rollos, en [N] hacia la izquierda:

$$f\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_0 < \rho_{1,2}\left(t\right) \\ E \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \left(\rho_0 / \rho_{1,2}\left(t\right) - 1\right) & \text{si } \rho_{fl} < \rho_{1,2}\left(t\right) \le \rho_0 \\ E \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \left(\rho_0 / \rho_{fl} - 1\right) & \text{si } \rho_{1,2}\left(t\right) \le \rho_{fl} \end{cases} \quad (1)$$

E es el módulo de Young de la lámina, en [N m^2]; d es su ancho, en [m]; ε es su espesor, en [m]; ρ_0 es su densidad estando relajada, en [kg m^{-3}]; ρ_{fl} es su densidad estando a punto de fluir, en [kg m^{-3}]; $\rho_{1,2}(t)$ es su densidad entre los rollos, en [kg m^{-3}]:

CC BY NC ND

$$E = 9 \cdot 10^8 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \tag{2}$$

$$d = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$\varepsilon = 0.0005 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$\rho_0 = 950 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \tag{5}$$

$$\rho_{fl} = 920 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \tag{6}$$

$$\rho_{1,2}(t) = \min\left(\rho_0, \left(m_{1,2}(t) / \left(d \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{L^2 + \left(r_1(t) - r_2(t)\right)^2}\right)\right)\right) \tag{7}$$

$m_{1,2}(t)$ es la masa en la lámina entre los rollos, en [kg]; L es la longitud de separación entre los ejes de los rollos, en [m]; $r_1(t)$ es el radio del rollo izquierdo, en [m]; $r_2(t)$ es el radio del rollo derecho, en [m]:

$$m_{1,2}(t) = m_{1,2}(0) + \int_0^t \left(q_1(\tau) - q_2(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{8}$$

$$L = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$r_1(t) = \sqrt{\frac{m_1(t)}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \tag{10}$$

$$r_2(t) = \sqrt{\frac{m_2(t)}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \tag{11}$$

$m_{1,2}(0)$ es la masa en la lámina entre los rollos inicialmente, en [kg]; $q_1(t)$ es el caudal del rollo izquierdo a la lámina entre los rollos, en [kg s^{-1}]; $q_2(t)$ es el caudal de la lámina entre los rollos al rollo derecho, en [kg s^{-1}]; $m_1(t)$ es la masa en el rollo izquierdo, en [kg]; $m_2(t)$ es la masa en el rollo derecho, en [kg]:

$$m_{1,2}(0) = 1.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$q_1(t) = \begin{cases} \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_1(t) \cdot r_1(t) & \text{si } 0 < \omega_1(t) \\ \rho_{1,2}(t) \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_1(t) \cdot r_1(t) & \text{si } \omega_1(t) \le 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$q_2(t) = \begin{cases} \rho_{1,2}(t) \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_2(t) \cdot r_2(t) & \text{si } 0 < \omega_2(t) \\ \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_2(t) \cdot r_2(t) & \text{si } \omega_2(t) \le 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$m_1(t) = m_1(0) - \int_0^t q_1(\tau) \cdot d\tau \tag{15}$$

$$m_2(t) = m_2(0) + \int_0^t q_2(\tau) \cdot d\tau \tag{16}$$

$\omega_1(t)$ es la velocidad angular del rollo izquierdo, en [rad s^{-1}] con sentido horario; $\omega_2(t)$ es la velocidad angular del rollo derecho, en [rad s^{-1}] con sentido horario; $m_1(0)$ es la masa en el rollo izquierdo inicialmente, en [kg]; $m_2(0)$ es la masa en el rollo derecho inicialmente, en [kg]:

CC BY NC ND

$$\omega_1(t) = \frac{p_1(t)}{J_1(t)} \tag{17}$$

$$\omega_2(t) = \frac{p_2(t)}{J_2(t)} \tag{18}$$

$$m_1(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$m_2(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$p_1(t)$ es el momentum angular en el rollo izquierdo, en [N m s] con sentido horario; $J_1(t)$ es el momentum de inercia del rollo izquierdo, en [N m rad^{-1} s^2]; $p_2(t)$ es el momentum angular en el rollo derecho, en [N m s] con sentido horario; $J_2(t)$ es el momentum de inercia del rollo derecho, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(T_1(\tau) - \left(-f(\tau)\right)\cdot r_1(\tau) - q_1(\tau)\cdot\omega_1(\tau)\cdot r_1^2(\tau)\right)\cdot d\tau \tag{21}$$

$$J_1(t) = 0.5\cdot m_1(t)\cdot r_1^2(t) \tag{22}$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(T_2(\tau) + \left(-f(\tau)\right)\cdot r_2(\tau) + q_2(\tau)\cdot\omega_2(\tau)\cdot r_2^2(\tau)\right)\cdot d\tau \tag{23}$$

$$J_2(t) = 0.5\cdot m_2(t)\cdot r_2^2(t) \tag{24}$$

$p_1(0)$ es el momentum en el rollo izquierdo inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_1(t)$ es el torque del ambiente al rollo izquierdo mediante un motor, en [N m] con sentido horario; $p_2(0)$ es el momentum en el rollo derecho inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_2(t)$ es el torque del ambiente al rollo derecho mediante otro motor, en [N m] con sentido horario:

$$p_1(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$T_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ \ t \le 24 \\ -500 & si\ \ 24 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$p_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 6 \\ 1000 & \text{si } 6 < t \le 18 \\ 0 & \text{si } 18 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: *f* depende de $\rho_{1,2}$; $\rho_{1,2}$, de $m_{1,2}$, r_1 y r_2; $m_{1,2}$, de q_1 y q_2; r_1, de m_1; r_2, de m_2; q_1, de ω_1, r_1 y $\rho_{1,2}$; q_2, de $\rho_{1,2}$, ω_2 y r_2; m_1, de q_1; m_2, de q_2; ω_1, de p_1 y J_1; ω_2, de p_2 y J_2; p_1, de T_1, f, r_1, q_1 y ω_1; J_1, de m_1 y r_1; p_2, de T_2, f, r_2, q_2 y ω_2; y J_2, de m_2 y r_2 (según (1), (7), (8), (10), (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (21), (22), (23) y (24), respectivamente).

CC BY NC ND

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (3), (4), (5), (6), (9), (12), (19), (20), (25) y (27) no contienen ninguna variable que evoluciona: (26) y (28) contienen 1 cada una; (1), (10), (11), (15) y (16) contienen 2; (8), (13), (14), (17), (18), (22) y (24), 3; (7), 4; (21) y (23), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 17 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^5 \cdot 3^7 \cdot 4^1 \cdot 6^2$ (=10077696) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(28).

Pero no es cuerdo plantear que un torque o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todos los torques o de todos los caudales de masa.

(15), (16), (21) y (23) tienen masas o momenta despejados en sus lados izquierdos como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 o 6 despejes imaginables en cada una se reducen al que está planteado y, de los 10077696 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(28), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^3 \cdot 3^7 \cdot 4^1$ (=69984).

Pero tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

De los 69984 sistemas de ecuaciones restantes, 69983 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(28).

Si nos interesa la evolución de la fuerza *f*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (8), (15), (16), (21) y (23); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $m_{1,2}$ inicial, m_1 inicial, m_2 inicial, p_1 inicial, p_2 inicial, T_1, T_2, E, d, ε, ρ_0, ρ_{fl}, L, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(28) como:

$E = \ldots$ (2′)

$d = \ldots$ (3′)

$\varepsilon = \ldots$ (4′)

$\rho_0 = \ldots$ (5′)

$\rho_{fl} = \ldots$ (6′)

$L = \ldots$ (9′)

$m_{1,2,0} = \ldots$ (12′)

$m_{1,0} = \ldots$ (19′)

$m_{2,0} = \ldots$ (20′)

$p_{1,0} = \ldots$ (25′)

$p_{2,0} = \ldots$ (27′)

$T_{1,k} = \ldots$ (26′)

$T_{2,k} = \ldots$ (28′)

$$r_{1,k} = \sqrt{\frac{m_{1,k}}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \quad (10')$$

CC BY NC ND

$$r_{2,k} = \sqrt{\frac{m_{2,k}}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \tag{11'}$$

$$J_{1,k} = 0.5 \cdot m_{1,k} \cdot r_{1,k}^2 \tag{22'}$$

$$J_{2,k} = 0.5 \cdot m_{2,k} \cdot r_{2,k}^2 \tag{24'}$$

$$\omega_{1,k} = \frac{p_{1,k}}{J_{1,k}} \tag{17'}$$

$$\omega_{2,k} = \frac{p_{2,k}}{J_{2,k}} \tag{18'}$$

$$\rho_{1,2,k} = \min\left(\rho_0, \left(m_{1,2,k} / \left(d \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{L^2 + \left(r_{1,k} - r_{2,k} \right)^2} \right) \right) \right) \tag{7'}$$

$$f_k = \begin{cases} E \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \left(\rho_0 / \rho_{1,2,k} - 1 \right) & \text{si } \rho_{fl} \le \rho_{1,2,k} \\ E \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \left(\rho_0 / \rho_{fl} - 1 \right) & \text{si } \rho_{1,2,k} < \rho_{fl} \end{cases} \tag{1'}$$

$$q_{1,k} = \begin{cases} \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_{1,k} \cdot r_{1,k} & \text{si } 0 < \omega_{1,k} \\ \rho_{1,2} \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_{1,k} \cdot r_{1,k} & \text{si } \omega_{1,k} \le 0 \end{cases} \tag{13'}$$

$$q_{2,k} = \begin{cases} \rho_{1,2} \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_{2,k} \cdot r_{2,k} & \text{si } 0 < \omega_{2,k} \\ \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_{2,k} \cdot r_{2,k} & \text{si } \omega_{2,k} \le 0 \end{cases} \tag{14'}$$

$$m_{1,2,k+1} = m_{1,2,k} + \left(q_{1,k} - q_{2,k} \right) \cdot dt \tag{8'}$$

$$m_{1,k+1} = m_{1,k} - q_{1,k} \cdot dt \tag{15'}$$

$$m_{2,k+1} = m_{2,k} + q_{2,k} \cdot dt \tag{16'}$$

$$p_{1,k+1} = p_{1,k} + \left(\mathrm{T}_{1,k} + f_k \cdot r_{1,k} - q_{1,k} \cdot \omega_{1,k} \cdot r_{1,k}^2 \right) \cdot dt \tag{21'}$$

$$p_{2,k+1} = p_{2,k} + \left(\mathrm{T}_{2,k} - f_k \cdot r_{2,k} + q_{2,k} \cdot \omega_{2,k} \cdot r_{2,k}^2 \right) \cdot dt \tag{23'}$$

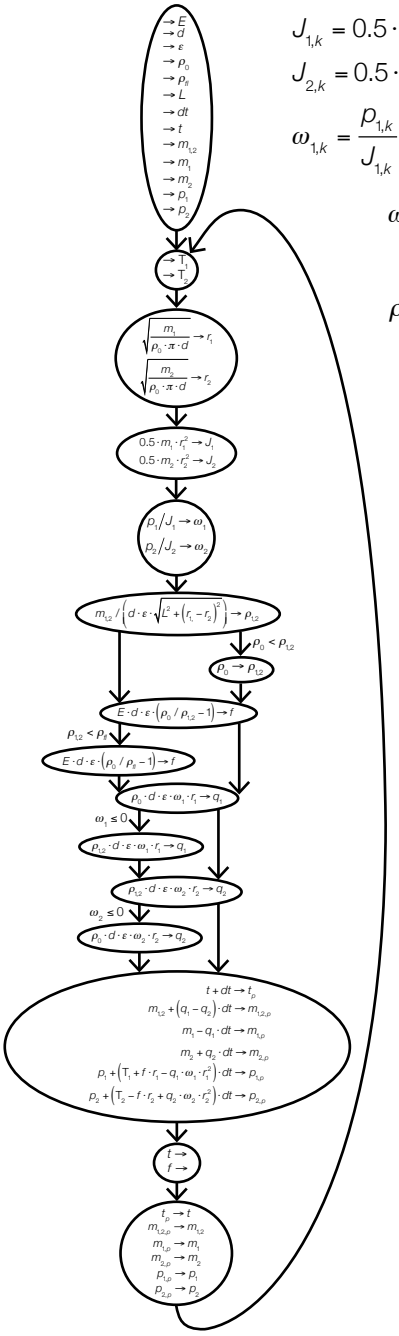


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

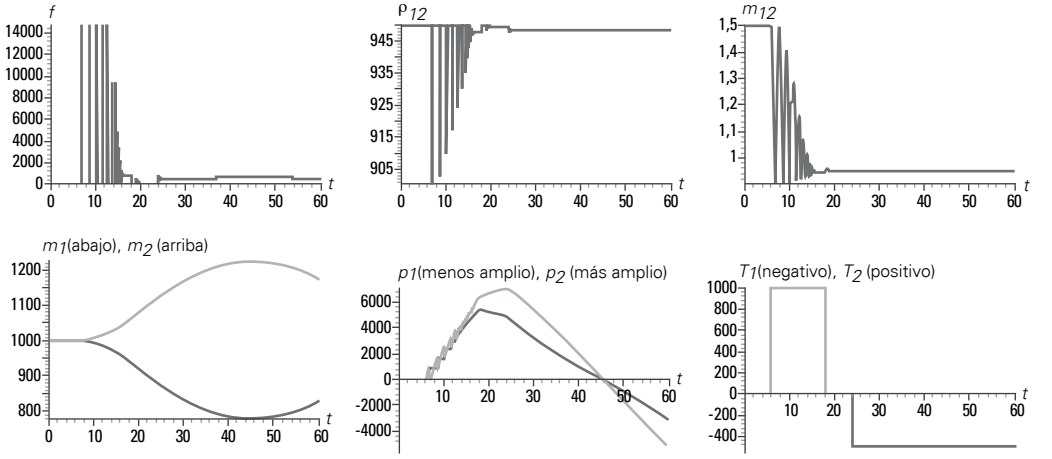


Fig.4: Predicciones

La figura 4 muestra 4 tirones (mientras 6<*t*<14) en que *f* no da más y $\rho_{1,2}$ se hace menor que ρ_{fl} (=920), lo cual indica que la lámina resulta dañada por exceder su límite elástico (aunque no se corta como ocurriría si $\rho_{1,2}$ se hiciera menor que 800). Puede dudarse de la aproximación de Euler; sin embargo, las disminuciones de *dt* corroboran los resultados.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (8), (15), (16), (21) y (23) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Como el aburrimiento es demasiado si consideramos todos los casos, restrinjámoslo sólo a aquellos en que

$$\rho_{fl} < m_{1,2}(t) / \left\{ d \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{L^2 + \left(r_1(t) - r_2(t)\right)^2} \right\} < \rho_0$$

(lo cual encoge (7) y (1)), $o<\omega_1$ (lo cual encoge (13)) y $o<\omega_2$ (lo cual encoge (14)).

En esos casos, derivando (8) e insertando (13), (14), (17), (18), (22), (7), (10) y (11), derivando (15) e insertando (13), (17), (22) y (10), derivando (16) e insertando (14), (18), (24), (7), (10) y (11), derivando (21) e insertando (1), (13), (17), (22), (7), (10) y (11), y derivando (23) e insertando (1), (14), (18), (24), (7), (10) y (11):

$$\frac{dm_{1,2}(t)}{dt} = 2 \cdot \pi^{1/2} \cdot \varepsilon \cdot d^{3/2} \cdot \rho_0^{3/2} \cdot \frac{p_1(t)}{m_1^{3/2}(t)} - 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \rho_0 \cdot \frac{m_{1,2}(t) \cdot p_2(t)}{m_2^{3/2}(t) \cdot \sqrt{\pi \cdot d \cdot \rho_0 \cdot L^2 + \left(\sqrt{m_1(t)} - \sqrt{m_2(t)}\right)^2}} \qquad \text{(a1)}$$

CC BY NC ND

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = -2\cdot\pi^{1/2}\cdot\varepsilon\cdot d^{3/2}\cdot\rho_0^{3/2}\cdot\frac{p_1(t)}{m_1^{3/2}(t)} \tag{a2}$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2\cdot\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot\frac{m_{1,2}(t)\cdot p_2(t)}{m_2^{3/2}(t)\cdot\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot L^2+\left(\sqrt{m_1(t)}-\sqrt{m_2(t)}\right)^2}} \tag{a3}$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = T_1(t)+E\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{d}{\pi\cdot\rho_0}}\cdot m_1^{1/2}(t)\cdot\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{d\cdot\rho_0}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot L^2+\left(\sqrt{m_1(t)}-\sqrt{m_2(t)}\right)^2}}{m_{1,2}(t)}-1\right) - 4\cdot\varepsilon\cdot d\cdot\rho_0\cdot\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0}\cdot\frac{p_1^2(t)}{m_1^{5/2}(t)} \tag{a4}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = T_2(t)-E\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{d}{\pi\cdot\rho_0}}\cdot m_2^{1/2}(t)\cdot\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{d\cdot\rho_0}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot L^2+\left(\sqrt{m_1(t)}-\sqrt{m_2(t)}\right)^2}}{m_{1,2}(t)}-1\right) + 4\cdot\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot\frac{m_{1,2}(t)\cdot p_2^2(t)}{m_2^{5/2}(t)\cdot\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot L^2+\left(\sqrt{m_1(t)}-\sqrt{m_2(t)}\right)^2}} \tag{a5}$$

Si nos interesa la evolución de la fuerza que experimenta la lámina entre ambos rollos, aceptando (a1)-(a5) y considerando (1), (7), (10) y (11) (en los mismos casos encogidos):

$$f(t) = E\cdot\varepsilon\cdot d\cdot\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{d\cdot\rho_0}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi\cdot d\cdot\rho_0\cdot L^2+\left(\sqrt{m_1(t)}-\sqrt{m_2(t)}\right)^2}}{m_{1,2}(t)}-1\right) \tag{a6}$$

BY NC ND

52.0

DOS ROLLOS Y UN RODILLO (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

En el caso anterior, la lámina enrollada en ambos extremos experimenta fuerzas violentas. Imaginemos que, para atenuar esa violencia, a medio camino entre ambos rollos y bajo la lámina se interpone un rodillo con eje horizontal perpendicular a ella, colgado del techo mediante un par de resortes y constreñido por guías verticales con roce.

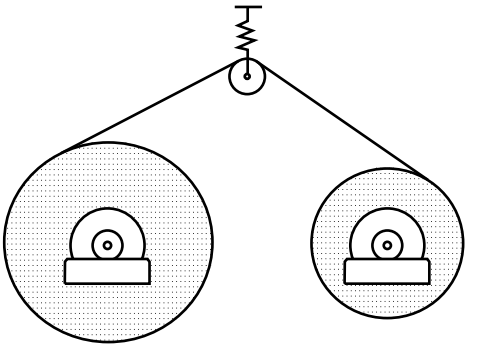


Fig. 1: Dos rollos, y un rodillo

Interesa predecir la evolución de la fuerza que experimenta la lámina entre ambos rollos, suponiendo que el momentum de inercia del rodillo es insignificante.

Probemos saltándonos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$f(t)$ es la fuerza del rollo izquierdo al derecho por elasticidad de la lámina entre ambos, en [N] hacia el izquierdo:

$$f\left(t\right)=\begin{cases} 0 & \text{si } \rho_0 < \rho_{1,2}\left(t\right) \\ E\cdot d\cdot \varepsilon\cdot\left(\rho_0 / \rho_{1,2}\left(t\right)-1\right) & \text{si } \rho_{fl} < \rho_{1,2}\left(t\right)\le \rho_0 \\ E\cdot d\cdot \varepsilon\cdot\left(\rho_0 / \rho_{fl}-1\right) & \text{si } \rho_{1,2}\left(t\right)\le \rho_{fl} \end{cases} \qquad (1)$$

E es el módulo de Young de la lámina, en [N m^2]; d es su ancho, en [m]; ε es su espesor, en [m]; ρ_0 es su densidad estando relajada, en [kg m^{-3}]; ρ_{fl} es su densidad estando a punto de fluir, en [kg m^{-3}]; $\rho_{1,2}(t)$ es su densidad entre los rollos, en [kg m^{-3}]:

$$E = 9\cdot 10^8 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \qquad (2)$$

$$d = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$$\varepsilon = 0.0005 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

$$\rho_0 = 950 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \qquad (5)$$

CC BY NC ND

$$\rho_{fl} = 920 \quad \text{(por ejemplo, si la lámina es de polietileno)} \tag{6}$$

$$\rho_{1,2}(t) = \min\left\{\rho_0, \left\{\frac{m_{1,2}(t)}{d \cdot \varepsilon \cdot l_{1,2}(t)}\right\}\right\} \tag{7}$$ [47]

$m_{1,2}(t)$ es la masa en el tramo de lámina entre los rollos, en [kg]; $l_{1,2}(t)$ es la longitud del tramo, en [m]:

$$m_{1,2}(t) = m_{1,2}(0) + \int_0^t \left(q_1(\tau) - q_2(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{8}$$

$$\begin{aligned} l_{1,2}(t) = {} & \sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2 - \left(r_1(t) - r\right)^2} \\ & + r \cdot \left\{\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left\{\frac{r_1 - r}{\sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2}}\right\}\right\} - \arcsin\left\{\frac{L/2}{\sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2}}\right\}\right\} \\ & + r \cdot \left\{\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left\{\frac{r_2 - r}{\sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2}}\right\}\right\} - \arcsin\left\{\frac{L/2}{\sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2}}\right\}\right\} \\ & + \sqrt{\left(a - y(t)\right)^2 + \left(L/2\right)^2 - \left(r_2(t) - r\right)^2} \end{aligned} \tag{9}$$ [48]

$m_{1,2}(0)$ es la masa en el tramo de lámina entre los rollos inicialmente, en [kg]; $q_1(t)$ es el caudal del rollo izquierdo al tramo, en [kg s^{-1}]; $q_2(t)$ es el caudal del trama al rollo derecho, en [kg s^{-1}]; a es la posición vertical del techo (extremo superior fijo del par de resortes), en [m] sobre los ejes de los rollos; $y(t)$ es la longitud del par de resortes (colgando hasta el eje del rodillo), en [m]; L es la longitud de separación entre los ejes de los rollos, en [m]; $r_1(t)$ es el radio del rollo izquierdo, en [m]; $r(t)$ es el radio del rodillo, en [m]; $r_2(t)$ es el radio del rollo derecho, en [m]:

$$m_{1,2}(0) = 1.51 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

[47] Estamos suponiendo la misma densidad a lo largo de todo el tramo de lámina entre los rollos, lo cual es un poco venturoso.

[48] Estamos suponiendo $r<r_1$ y $r<r_2$.

BY NC ND

$$q_1(t) = \begin{cases} \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_1(t) \cdot r_1(t) & \text{si } 0 < \omega_1(t) \\ \rho_{1,2}(t) \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_1(t) \cdot r_1(t) & \text{si } \omega_1(t) \le 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$q_2(t) = \begin{cases} \rho_{1,2}(t) \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_2(t) \cdot r_2(t) & \text{si } 0 < \omega_2(t) \\ \rho_0 \cdot d \cdot \varepsilon \cdot \omega_2(t) \cdot r_2(t) & \text{si } \omega_2(t) \le 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$a = 2.5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \quad (14)$$

$$L = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$r_1(t) = \sqrt{\frac{m_1(t)}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \quad (16)$$

$$r = 0.05 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

$$r_2(t) = \sqrt{\frac{m_2(t)}{\rho_0 \cdot \pi \cdot d}} \quad (18)$$

$\omega_1(t)$ es la velocidad angular del rollo izquierdo, en [rad s^{-1}] con sentido horario; $\omega_2(t)$ es la velocidad angular del rollo derecho, en [rad s^{-1}] con sentido horario; $y(0)$ es la longitud del par de resortes inicialmente, en [m]; $v(t)$ es la velocidad de descenso del extremo inferior (móvil) del par de resortes, en [m s^{-1}] hacia abajo; $m_1(t)$ es la masa en el rollo izquierdo, en [kg]; $m_2(t)$ es la masa en el rollo derecho, en [kg]:

$$\omega_1(t) = \frac{p_1(t)}{J_1(t)} \quad (19)$$

$$\omega_2(t) = \frac{p_2(t)}{J_2(t)} \quad (20)$$

$$y(0) = 1.21 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (21)$$

$$v(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (22)$$

$$m_1(t) = m_1(0) - \int_0^t q_1(\tau) \cdot d\tau \quad (23)$$

$$m_2(t) = m_2(0) + \int_0^t q_2(\tau) \cdot d\tau \quad (24)$$

$p_1(t)$ es el momentum angular en el rollo izquierdo, en [N m s] con sentido horario; $J_1(t)$ es el momentum de inercia del rollo izquierdo, en [N m rad^{-1} s^2]; $p_2(t)$ es el momentum angular en el rollo derecho, en [N m s] con sentido horario; $J_2(t)$ es el momentum de inercia del rollo derecho, en [N m rad^{-1} s^2]; $p(t)$ es el momentum de descenso en el rodillo, en [N s] hacia abajo; m es la masa en el rodillo, en [kg]; $m_1(0)$

CC BY NC ND

es la masa en el rollo izquierdo inicialmente, en [kg]; $m_2(0)$ es la masa en el rollo derecho inicialmente, en [kg]:

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(T_1(\tau) - \left(-f(\tau) \right) \cdot r_1(\tau) - q_1(\tau) \cdot \omega_1(\tau) \cdot r_1^2(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{25}$$

$$J_1(t) = 0.5 \cdot m_1(t) \cdot r_1^2(t) \tag{26}$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \left(T_2(\tau) + \left(-f(\tau) \right) \cdot r_2(\tau) + q_2(\tau) \cdot \omega_2(\tau) \cdot r_2^2(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{27}$$

$$J_2(t) = 0.5 \cdot m_2(t) \cdot r_2^2(t) \tag{28}$$

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(\begin{array}{l} \left(\left(\left(+f(\tau) \right) + \left(-q_1(\tau) \cdot \omega_1(\tau) \cdot r_1(\tau) \right) \right) \right. \\ \left. \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r_1 - r}{\sqrt{\left(a - y(t) \right)^2 + \left(L/2 \right)^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{L/2}{\sqrt{\left(a - y(t) \right)^2 + \left(L/2 \right)^2}} \right) \right) \right) \\ + \left(\left(-f_s(\tau) \right) + \left(-f_f(\tau) \right) + \left(+f_g(\tau) \right) \right) \\ + \left(\left(\left(+f(\tau) \right) - \left(+q_2(\tau) \cdot \omega_2(\tau) \cdot r_2(\tau) \right) \right) \right. \\ \left. \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r_2 - r}{\sqrt{\left(a - y(t) \right)^2 + \left(L/2 \right)^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{L/2}{\sqrt{\left(a - y(t) \right)^2 + \left(L/2 \right)^2}} \right) \right) \right) \end{array} \right) \cdot d\tau \tag{29}$$

$$m = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$m_1(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$m_2(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

$p_1(0)$ es el momentum en el rollo izquierdo inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_1(t)$ es el torque del ambiente al rollo izquierdo mediante un motor, en [N m] con sentido horario; $p_2(0)$ es el momentum en el rollo derecho inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_2(t)$ es el torque del ambiente al rollo derecho mediante otro motor, en [N m] con sentido horario; $p(0)$ es el momentum de descenso en el rodillo inicialmente, en [N s] hacia abajo; $f_s(t)$ es la fuerza del techo al rodillo por la elasticidad del par de resortes, en [N] hacia el techo; $f_f(t)$ es la fuerza del techo al rodillo por el roce de las guías, en [N] hacia el techo; $f_g(t)$ es la fuerza de la Tierra al

CC BY NC ND

rodillo por gravitación, en [N] hacia abajo:

$$p_1(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$T_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 24 \\ -500 & \text{si } 24 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

$$p_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 6 \\ 1000 & \text{si } 6 < t \le 18 \\ 0 & \text{si } 18 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{36}$$

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{37}$$

$$f_s(t) = k_s \cdot (y(t) - Y) \tag{38}$$

$$f_f(t) = d_f \cdot v(t) \tag{39}$$

$$f_g = m \cdot 9.8 \tag{40}$$

k_s es el coeficiente de elasticidad del par de resortes, en [N m^{-1}]; Y es la longitud del par de resortes cuando están relajados, en [m]:

$$k_s = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{41}$$

$$Y = 1.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{42}$$

$$d_f = 500 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{43}$$

El dibujo de la estructura causal es harto enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo también.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (3), (4), (5), (7), (10), (13), (15), (17), (21), (30), (31), (32), (33), (35), (37), (40), (41), (42) y (43) no contienen ninguna variable que evoluciona: (34) y (36) contienen 1 cada una; (1), (14), (16), (18), (22), (23), (24), (38) y (39) contienen 2; (6), (8), (19), (20), (26) y (28), 3; (9), (11) y (12), 4; (25) y (27), 6; (29), 11; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 23 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^9 \cdot 3^6 \cdot 4^3 \cdot 6^2 \cdot 12^1$ (=10319560704) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(43).

Pero no es cuerdo plantear que un torque, una fuerza o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum o la masa en el recinto, sino que el momentum o la masa depende por integración de todos los torques, de todas las fuerzas o de todos los caudales de masa.

(8), (23), (24), (25), (27) y (29) tienen masas o momenta despejados en sus lados izquierdos como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una se reducen al que está planteado y, de los 10319560704 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(41), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^8 \cdot 2^7 \cdot 3^5 \cdot 4^3 \cdot 6^0 \cdot 12^0$ (=1990656).

Pero tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

CC BY NC ND

De los 1990656 sistemas de ecuaciones restantes, 1990655 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(43).

Si nos interesa la evolución de la fuerza *f*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (8), (14), (23), (24), (25), (27) y (29); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $m_{1,2}$ inicial, *y* inicial, m_1 inicial, m_2 inicial, p_1 inicial, p_2 inicial, *p* inicial, T_1, T_2, *E, d,* ε, ρ_0, ρ_{fl}, *a, L, r, m,* k_s, *Y,* d_f, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(43) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son bastante largos. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

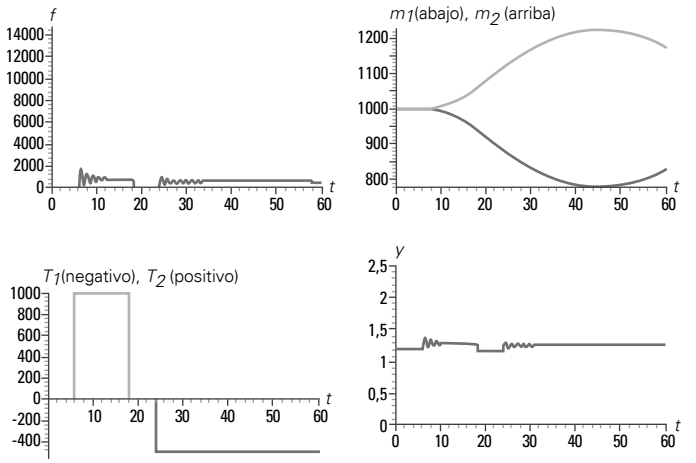


Fig.2: Predicciones

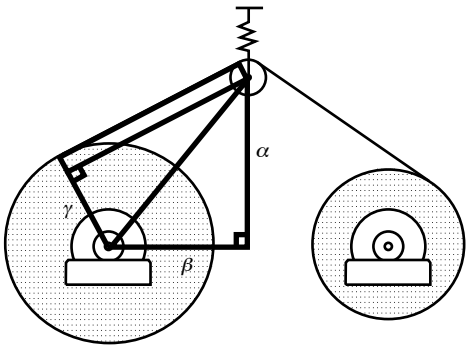
Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (8), (14), (23), (24), (25), (27) y (29) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas y los momenta con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es demasiado.

Apéndice acerca de la Geometría para (9) y (29)

En la figura 1 no es difícil abstraer dos configuraciones geométricas como la siguiente (una para el lado izquierdo del rodillo y otra, invertida horizontalmente, con proporciones diferentes, para el lado derecho).

BY NC ND



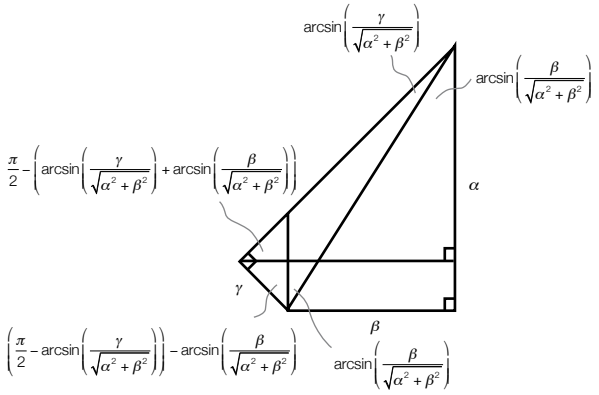
En el lado izquierdo del rodillo:

$$\alpha = a - y, \quad \beta = L/2 \quad \text{y} \quad \gamma = r_1 - r$$

mientras, en el lado derecho:

$$\alpha = a - y, \quad \beta = L/2 \quad \text{y} \quad \gamma = r_2 - r$$

Entonces surgen algunas longitudes bastante evidentes y ángulos como los que siguen.



(9) y (29) resultan de considerar tales ángulos y longitudes.

CC BY NC ND

53.0

UNA CORREA, DOS MOTORES Y UN BLOQUE VOLANTE (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

Imaginemos una correa que acopla dos motores, con movimientos rotatorios, y un bloque volante, con movimiento vertical, a través de poleas dispuestas a propósito.

Los motores están sujetos al suelo mediante una estructura (casi) rígida que los fija. El bloque está sujeto al suelo mediante un resorte que lo toma en el eje de su polea. No hay resbalamiento significativo entre las poleas y la correa (de manera que los motores pueden hacer bien su labor). La correa es liviana y elástica (de manera que el bloque puede moverse verticalmente).

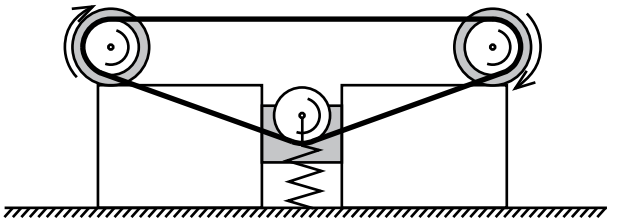


Fig. 1: Una correa, dos motores y un bloque volante

Interesa predecir la evolución de la distancia entre el bloque volante y el suelo.

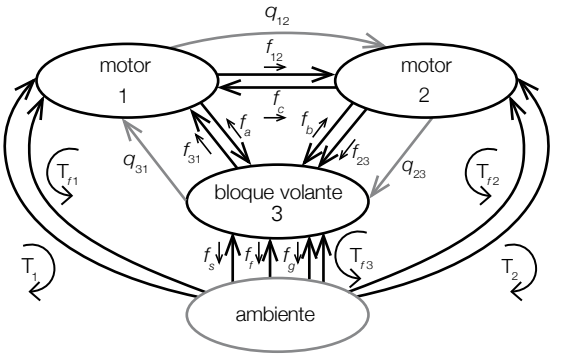


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$y(t)$ es la posición vertical del eje de la polea inferior (solidaria con el bloque), en [m] sobre el suelo:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

CC BY NC ND

y(0) es la posición vertical del eje de la polea inferior inicialmente, en [m] hacia arriba; $v(t)$ es su velocidad vertical, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$y\left(0\right) = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$v\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{m} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum vertical en el bloque volante, en [N s] hacia arriba; m es la masa en el bloque volante, en [kg]:

$$p\left(t\right) = p\left(0\right) + \int_0^t \left(\begin{pmatrix} \frac{a - y\left(\tau\right)}{\sqrt{\left(a - y\left(\tau\right)\right)^2 + b^2}} \cdot \begin{pmatrix} +\left(+f_a\left(\tau\right)\right) + \left(+f_b\left(\tau\right)\right) \\ -\left(+f_{31}\left(\tau\right)\right) + \left(-f_{23}\left(\tau\right)\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \left(+\left(-f_s\left(\tau\right)\right) + \left(-f_r\left(\tau\right)\right) + \left(-f_g\left(\tau\right)\right)\right) \right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$m = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$p(0)$ es el momentum vertical en el bloque volante inicialmente, en [N s] hacia arriba; a es la posición vertical de los ejes de las poleas superiores izquierda y derecha, en [m] sobre el suelo; b es la mitad de la distancia horizontal entre los ejes de esas poleas, en [m]; $f_a(t)$ es la fuerza de la polea superior izquierda a la inferior por la elasticidad del tramo inferior izquierdo de la correa, en [N] hacia la polea superior izquierda; $f_b(t)$ es la fuerza de la polea superior derecha a la inferior por la elasticidad del tramo inferior derecho de la correa, en [N] hacia la polea superior derecha; $f_{31}(t)$ es la fuerza de la polea inferior a la superior izquierda con el caudal del tramo inferior izquierdo, en [N] hacia la polea superior izquierda; $f_{23}(t)$ es la fuerza de la polea superior derecha a la inferior con el caudal del tramo inferior derecho, en [N] hacia la polea inferior; $f_s(t)$ es la fuerza del suelo al bloque volante por la elasticidad del resorte, en [N] hacia el suelo; $f_r(t)$ es la fuerza del ambiente al conjunto formado con el resorte y el bloque volante por roce, en [N] hacia el suelo; $f_g(t)$ es la fuerza de la Tierra al bloque por gravitación, en [N] hacia el suelo:

$$p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$a = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$b = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$f_a\left(t\right) = E \cdot A_0 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_{31}\left(t\right)} - 1 \right) \tag{9}$$

$$f_b\left(t\right) = E \cdot A_0 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_{23}\left(t\right)} - 1 \right) \tag{10}$$

$$f_{31}\left(t\right) = q_{31}\left(t\right) \cdot r \cdot \omega_1\left(t\right) \tag{11}$$

$$f_{23}\left(t\right) = q_{23}\left(t\right) \cdot r \cdot \omega_3\left(t\right) \tag{12}$$

$$f_s\left(t\right) = k_s \cdot \left(y\left(t\right) - Y\right) \tag{13}$$

CC BY NC ND

$$f_f\left(t\right) = k_f \cdot v\left(t\right) \tag{14}$$

$$f_g = m \cdot 9.8 \tag{15}$$

E es el módulo de Young de la correa, en [N m^{-2}]; A_0 es el área transversal de la correa, en [m^2]; ρ_o es la densidad de la correa cuando está relajada, en [kg m^{-3}]; $\rho_{31}(t)$ es la densidad del tramo inferior izquierdo de la correa, en [kg m^{-3}]; $\rho_{23}(t)$ es la densidad del tramo inferior derecho, en [kg m^{-3}]; $q_{31}(t)$ es el caudal de masa de la polea inferior a la superior izquierda, por el tramo inferior izquierdo, en [kg s^{-1}]; r es el radio de cualquiera de las poleas, en [m]; $\omega_1(t)$ es la velocidad angular de la polea superior izquierda, en [rad s^{-1}] con sentido horario; $q_{23}(t)$ es el caudal de masa de la polea superior derecha a la inferior, por el tramo superior, en [kg s^{-1}]; $\omega_3(t)$ es la velocidad angular de la polea inferior, en [rad s^{-1}] con sentido horario; k_s es el coeficiente de elasticidad del resorte, en [N m^{-1}]; Y es la longitud del resorte cuando está relajado, en [m]; k_f es el coeficiente de roce vertical para el bloque volante, en [N m^{-1} s]:

$$E = 10^6 \quad \text{(por ejemplo, si la correa es de caucho)} \tag{16}$$

$$A_0 = 5 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$\rho_0 = 960 \quad \text{(por ejemplo, si la correa es de caucho)} \tag{18}$$

$$\rho_{31}\left(t\right) = \frac{m_{31}\left(t\right)}{A_0 \cdot \sqrt{b^2 + \left(a - y\left(t\right)\right)^2}} \tag{19}$$

$$\rho_{23}\left(t\right) = \frac{m_{23}\left(t\right)}{A_0 \cdot \sqrt{b^2 + \left(a - y\left(t\right)\right)^2}} \tag{20}$$

$$q_{31}\left(t\right) = \left(\rho_{31}\left(t\right) \cdot \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\omega_1\left(t\right)\right)}{2} + \rho_{12}\left(t\right) \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn}\left(\omega_1\left(t\right)\right)}{2} \right) \cdot A_0 \cdot r \cdot \omega_1\left(t\right) \tag{21}$$

$$r = 0.05 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$\omega_1\left(t\right) = \frac{p_1\left(t\right)}{I} \tag{23}$$

$$q_{23}\left(t\right) = \left(\rho_{23}\left(t\right) \cdot \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\omega_3\left(t\right)\right)}{2} + \rho_{31}\left(t\right) \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn}\left(\omega_3\left(t\right)\right)}{2} \right) \cdot A_0 \cdot r \cdot \omega_3\left(t\right) \tag{24}$$

$$\omega_3\left(t\right) = \frac{p_3\left(t\right)}{I} \tag{25}$$

$$k_s = 400 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$Y = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$k_f = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$m_{31}(t)$ es la masa en el tramo inferior izquierdo de la correa, en [kg]; $m_{23}(t)$ es la masa en el tramo inferior derecho, en [kg]; $p_1(t)$ es el momentum angular en la polea superior izquierda, en [N m s] con sentido horario; I es el momentum de inercia de

BY NC ND

cualquiera de las poleas, en [N m rad^{-1} s^2]; $p_3(t)$ es el momentum angular en la polea inferior, en [N m s] con sentido horario:

$$m_{31}(t) = m_{31}(0) + \int_0^t \left(q_{23}(\tau) - q_{31}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{29}$$

$$m_{23}(t) = m_{23}(0) + \int_0^t \left(q_{12}(\tau) - q_{23}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{30}$$

$$p_1(t) = p_1(0) + \int_0^t \left(\begin{array}{l} +\left(+\mathrm{T}_1(\tau)\right) + \left(-\mathrm{T}_{f1}(\tau)\right) \\ -\left(+f_a(\tau)\cdot r\right) + \left(+f_c(\tau)\cdot r\right) \\ +\left(+f_{31}(\tau)\cdot r\right) - \left(+f_{12}(\tau)\cdot r\right) \end{array} \right) \cdot d\tau \tag{31}$$

$I = 0.0005$ (por ejemplo) (32)

$$p_3(t) = p_3(0) + \int_0^t \left(\begin{array}{l} +\left(-\mathrm{T}_{f3}(\tau)\right) \\ +\left(+f_a(\tau)\cdot r\right) + \left(-f_b(\tau)\cdot r\right) \\ -\left(+f_{31}(\tau)\cdot r\right) + \left(+f_{23}(\tau)\cdot r\right) \end{array} \right) \cdot d\tau \tag{33}$$

$m_{31}(0)$ es la masa en el tramo inferior izquierdo inicialmente, en [kg]; $m_{23}(0)$ es la masa en el tramo inferior derecho inicialmente, en [kg]; $q_{12}(t)$ es el caudal de masa de la polea superior izquierda a la superior derecha, en [kg s^{-1}]; $p_1(0)$ es el momentum angular en la polea superior izquierda inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_1(t)$ es el torque del ambiente a la polea superior izquierda mediante un motor, en [N m] con sentido horario; $T_{f1}(t)$ es el torque del ambiente a la misma polea por roce del eje, en [N m] con sentido anti-horario; $f_c(t)$ es la fuerza de la polea superior derecha a la superior izquierda por la elasticidad del tramo superior de la correa, en [N] hacia la polea superior derecha; $f_{12}(t)$ es la fuerza de la polea superior izquierda a la superior derecha con el caudal del tramo superior, en [N] hacia la polea superior derecha; $p_3(0)$ es el momentum angular en la polea inferior inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_{f3}(t)$ es el torque del ambiente a la misma polea por roce del eje, en [N m] con sentido anti-horario:

$m_{31}(0) = 0.01$ (por ejemplo) (34)

$m_{23}(0) = 0.01$ (por ejemplo) (35)

$$q_{12}(t) = \left(\rho_{12}(t) \cdot \frac{1 + \mathrm{sgn}\left(\omega_2(t)\right)}{2} + \rho_{23}(t) \cdot \frac{1 - \mathrm{sgn}\left(\omega_2(t)\right)}{2} \right) \cdot A_0 \cdot r \cdot \omega_2(t) \tag{36}$$

$p_1(0) = 0$ (por ejemplo) (37)

$$\mathrm{T}_1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < 5 \\ 10 & \text{si } 5 \le t < 15 \\ 0 & \text{si } 15 \le t \end{array} \right. \quad \text{(por ejemplo)} \tag{38}$$

$$T_{f1}(t) = K_f \cdot \omega_1(t) \tag{39}$$

CC BY NC ND

$$f_c(t) = E \cdot A_0 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_{12}(t)} - 1 \right) \tag{40}$$

$$f_{12}(t) = q_{12}(t) \cdot r \cdot \omega_2(t) \tag{41}$$

$$p_3(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{42}$$

$$T_{f3}(t) = K_f \cdot \omega_3(t) \tag{43}$$

$\rho_{12}(t)$ es la densidad del tramo superior de la correa, en [kg m^{-3}]; $\omega_2(t)$ es la velocidad angular de la polea superior derecha, en [rad s^{-1}] con sentido horario, K_f es el coeficiente de roce angular de cualquier polea, con su eje, en [N m rad^{-1} s]:

$$\rho_{12}(t) = \frac{m_{12}(t)}{A_0 \cdot 2 \cdot b} \tag{44}$$

$$\omega_2(t) = \frac{p_2(t)}{I} \tag{45}$$

$$K_f = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{46}$$

$m_{12}(t)$ es la masa en el tramo superior de la correa, en [kg]; $p_2(t)$ es el momentum angular en la polea superior derecha, en [N m s] con sentido horario:

$$m_{12}(t) = m_{12}(0) + \int_0^t \left(q_{31}(\tau) - q_{12}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{47}$$

$$p_2(t) = p_2(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} +\left(+T_2(\tau)\right) + \left(-T_{f2}(\tau)\right) \\ -\left(-f_b(\tau) \cdot r\right) - \left(+f_c(\tau) \cdot r\right) \\ +\left(+f_{12}(\tau) \cdot r\right) - \left(+f_{23}(\tau) \cdot r\right) \end{pmatrix} \cdot d\tau \tag{48}$$

$m_{12}(0)$ es la masa en el tramo superior inicialmente, en [kg]; $p_2(0)$ es el momentum angular en la polea superior derecha inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T_2(t)$ es el torque del ambiente a la polea superior derecha mediante el otro motor, en [N m] con sentido horario; $T_{f1}(t)$ es el torque del ambiente a la misma polea por roce con el eje, en [N m] con sentido anti-horario:

$$m_{12}(0) = 0.034 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{49}$$

$$p_2(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{50}$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 10 \\ 10 & si\ 10 \le t < 20 \\ 0 & si\ 20 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{51}$$

$$T_{f2}(t) = K_f \cdot \omega_2(t) \tag{52}$$

El dibujo de la estructura causal es muy enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo

CC BY NC ND

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (5), (6), (7), (8), (15), (16), (17), (18), (22), (26), (27), (28), (32), (34), (35), (37), (42), (46), (49) y (50) no contienen ninguna variable que evoluciona: (38) y (51) contienen 1 cada una; (1), (3), (9), (10), (13), (14), (23), (25), (39), (49), (43), (44), (45) y (52) contienen 2; (11), (12), (19), (20), (29), (30), (41) y (47), 3; (20), (24) y (36), 4; (33), 6; (31) y (48), 7; (4), 9; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 31 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 4^3 \cdot 6^1 \cdot 7^2 \cdot 9^1$ (=18203705081856) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(52).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza, un caudal o un torque a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum, la masa o el momentum anhgular en el recinto, sino que el momentum, la masa o el momentum angular depende por integración de todas las fuerzas, de todos los caudales o de todos los torques.

(4), (29), (30), (31), (33), (47) y (48) momenta, masas o momenta angulares despejados en sus lados izquierdos como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una se reducen al que está planteado y, de los 18203705081856 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(52), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^9 \cdot 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 4^3$ (=254803968).

Pero tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

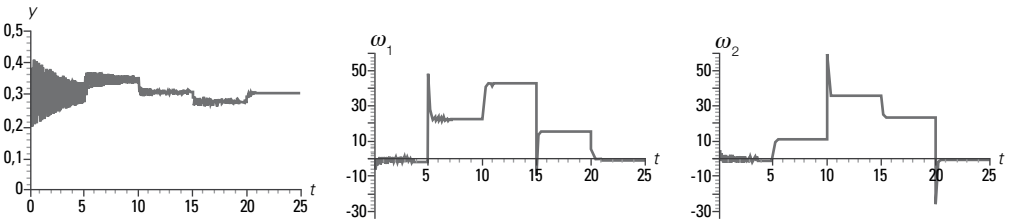
De los 254803968 sistemas de ecuaciones restantes, 254803967 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(52).

Si nos interesa la evolución de la fuerza que experimenta la lámina entre ambos rollos; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (4), (29), (30), (31), (33), (47) y (48); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *y* inicial, *p* inicial, m_{31} inicial, m_{23} inicial, p_1 inicial, p_3 inicial, m_{12} inicial, p_2 inicial, T_1, T_2, *m, a, b, E,* A_0, ρ_0, *r,* k_s, *Y,* k_f, *l,* K_f, *L, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(52) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son bastante largos. Saltémoslos.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.



BY NC ND

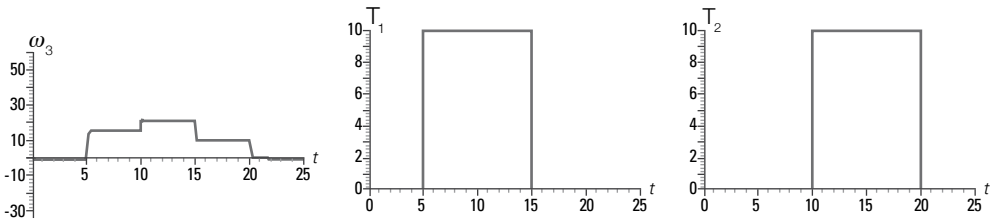


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (4), (29), (30), (31), (33), (47) y (48) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la distancia, el momentum, las masas y los momenta angulares correspondientes, con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos.

Pero el aburrimiento es mucho. Dejemos el asunto.

CC BY NC ND

54.0

UNA CORREA TRANSPORTADORA (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES)

Imaginemos una correa transportadora con inclinación ascendente de izquierda a derecha, y cargada con sólidos fracturados que entran en el extremo inferior izquierdo, viajan subiendo hacia la derecha sin resbalar significativamente sobre la correa, y saldrían por el extremo superior derecho. La correa tampoco resbala significativamente sobre los rodillos y, gracias a ello, es movida por un motor a través del eje del rodillo superior derecho.

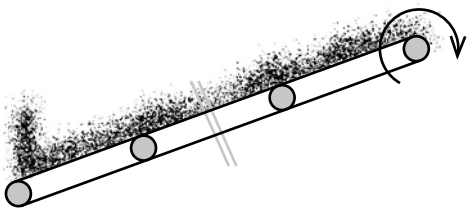


Fig. 1: Una correa transportadora

Interesa predecir la evolución del caudal de masa saliente de la correa (inventando en ésta rodajas ficticias, transversales, delgadas y presuntamente homogéneas por dentro, y numerándolas de izquierda a derecha).

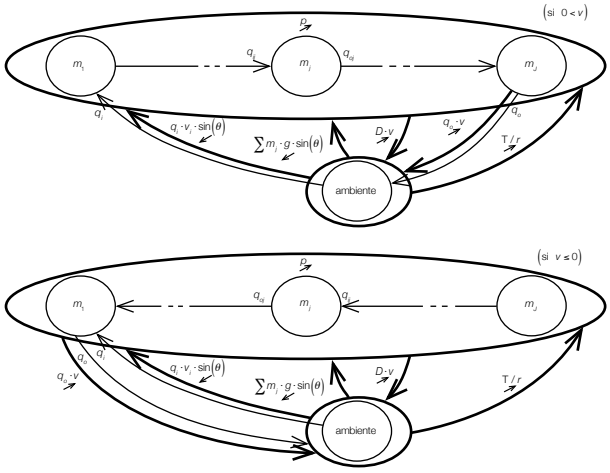


Fig. 2: Estructura espacial (arriba, si 0<*v*; abajo, si *v*≤0)

t es el tiempo, en [s].

$q_o(t)$ es el caudal de masa de la correa al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$q_o\left(t\right) = \begin{cases} q_{o,J}\left(t\right) & \text{si} \quad 0 < v\left(t\right) \\ q_{o,1}\left(t\right) & \text{si} \quad v\left(t\right) \le 0 \end{cases} \qquad (1)$$

CC BY NC ND

$q_{o,j}(t)$ es el caudal de masa saliente de la rodaja j, en [kg s^{-1}]; J es el número de rodajas; $v(t)$ es la velocidad tangencial de la correa, en [m s^{-1}] hacia la derecha y arriba:

$$q_{o,j}\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{m_j\left(t\right)}{dx}\cdot v\left(t\right) & \text{si}\quad 0<v\left(t\right)\ \text{y}\ 1\le j\le J\\ -\dfrac{m_j\left(t\right)}{dx}\cdot v\left(t\right) & \text{si}\quad v\left(t\right)\le 0\ \ \text{y}\ 1\le j\le J\end{cases} \tag{2}$$

$$J=8\quad\text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$v\left(t\right)=\frac{p\left(t\right)}{M+\dfrac{I}{r^2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{J}m_j\left(t\right)} \tag{4}$$

$m_j(t)$ es la masa en la carga dentro de la rodaja j, en [kg]; dx es la longitud de cualquier rodaja, en [m]; $p(t)$ es el momentum en la correa y su carga total, en [N s] hacia la derecha y arriba; M es la masa en la correa misma, en [kg]; I es el momentum de inercia de todos los rodillos, en [N m rad^{-1} s^2]; r es el radio de cualquier rodillo, en [m]:

$$m_j\left(t\right)=m_j\left(0\right)+\int_0^t\left(q_{i,j}\left(\tau\right)-q_{o,j}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau\quad\text{si}\quad 1\le j\le J \tag{5}$$

$$dx=5\quad\text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$p\left(t\right)=p\left(0\right)+\int_0^t\left(\begin{array}{l}\left(\mathrm{T}\left(\tau\right)/r+\left(-q_i\left(\tau\right)\cdot v_i\left(\tau\right)\cdot\sin\left(\theta\right)\right)\right)\\ +\left(\left(-\displaystyle\sum_{j=1}^{J}m_j\left(\tau\right)\cdot g\cdot\sin\left(\theta\right)\right)-\left(+D\cdot v\left(\tau\right)\right)\right)\\ -\left(+q_o\left(\tau\right)\cdot v\left(\tau\right)\right)\end{array}\right)\cdot d\tau \tag{7}$$

$$M=4000\quad\text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$I=1.5\quad\text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$r=0.05\quad\text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$m_j(0)$ es la masa en la carga dentro de la rodaja j inicialmente, en [kg]; $q_{i,j}(t)$ es el caudal de masa entrante a la rodaja j, en [kg s^{-1}]; $p(0)$ es el momentum en la correa y su carga inicialmente, en [N s] hacia la derecha y arriba; $T(t)$ es el torque del ambiente a la correa mediante el motor y el rodillo superior derecho, en [N m] con sentido horario; $q_i(t)$ es el caudal de los sólidos del ambiente a la correa, por el extremo inferior izquierdo, en [kg s^{-1}]; $v_i(t)$ es la velocidad de esos sólidos, en [m s^{-1}] hacia abajo; θ es el ángulo de inclinación de la correa, en [rad] hacia la derecha y arriba; D es el coeficiente de roce, en [N m^{-1} s]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$$m_j\left(0\right)=0\quad\text{si}\quad 1\le j\le J\quad\text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

CC BY NC ND

$$q_{i,j}(t) = \begin{cases} q_i(t) & \text{si } 0 < v(t) \text{ y } j = 1 \\ q_i(t) - \dfrac{m_2(t)}{dx} \cdot v(t) & \text{si } v(t) \le 0 \text{ y } j = 1 \\ \dfrac{m_{j-1}(t)}{dx} \cdot v(t) & \text{si } 0 < v(t) \text{ y } 1 < j < J \\ -\dfrac{m_{j+1}(t)}{dx} \cdot v(t) & \text{si } v(t) \le 0 \text{ y } 1 < j < J \\ \dfrac{m_{J-1}(t)}{dx} \cdot v(t) & \text{si } 0 < v(t) \text{ y } j = J \\ 0 & \text{si } v(t) \le 0 \text{ y } j = J \end{cases} \quad (12)$$

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

$$T(t) = K_a \cdot V(t) - K_b \cdot \frac{v(t)}{r} \quad (14)$$ [49]

$$q_i(t) = \rho \cdot A_i \cdot v_i(t) \quad (15)$$

$$v_j(t) = 0.3 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (16)$$

$$\theta = 0.35 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

$$g = 9.8 \quad (18)$$

$$D = 20 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (19)$$

ρ es la densidad de los sólidos entrantes, en [kg m^{-3}]; A_i es el área transversal por donde entran, en [m^2]; K_a es un coeficiente del motor, en [N m V^{-1}]; $V(t)$ es el voltaje entre los bornes del motor, en [V]; K_b es otro coeficiente del motor, en [N m rad^{-1} s]:

$$\rho = 3500 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (20)$$

$$A_i = 0.12 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (21)$$

$$K_a = 4.7 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (22)$$

$$V(t) = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (23)$$

$$K_b = 3.5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (24)$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: q_o depende de $q_{o,J}$, $q_{o,1}$ y v; $q_{o,j}$, de m_j y v; v de, p, m_1,...m_J; m_j, de $q_{i,j}$ y $q_{o,j}$;

[49] Esta es una aproximación gruesa para un motor de corrientes continuas, con la corriente de campo separada y constante. Los coeficientes que aparecerán enseguida son de un motor cuya corriente de campo es 1.7, en [A], cuya inductancia mutua entre devanados es 2.8, en [Hy], y cuya resistencia de armadura es 1, en [Ω]. Estamos ignorando las exigencias de corriente de armadura.

CC BY NC ND

p, de T, q_i, v_i, m_1,...m_J, v y q_o; $q_{i,j}$, de m_{j-1}, m_{j+1} y v; T, de V y v; y q_i, de v_i.

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (6), (8), (9), (10), (11), (13), (17), (18), (19), (20), (21), (22) y (24) no contienen ninguna variable que evoluciona: (16) y (23) contienen 1 cada una; (15), 2; (2), (5) y (14), 3; (1) y (12), 4; (4), J+2; (7), J+6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot (J+2)^1 \cdot (J+6)^1$ (=$864 \cdot (J+2) \cdot (J+6)$) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(24).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa o una fuerza a través de la frontera de un recinto depende de los otros o de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o del momentum en el recinto, sino que la masa o el momentum depende por integración de todos los caudales o de todas las fuerzas.

(5) tiene una masa despejadas en su lado izquierdo, y (7) tiene un momentum, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado (para todas las rodajas) y, de los $864 \cdot (J+2) \cdot (J+6)$ sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(24), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^3 \cdot 4^2$ (=864).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 864 sistemas de ecuaciones restantes, 863 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja j o alguna otra), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(24).

Si nos interesa la evolución del caudal q_o; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (5) y (7); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_j inicial, p inicial, v_i, V, J, d_x, M, I, r, θ, D, ρ, A_i, K_a, K_b, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(24) como:

$J = ...$ (3')

$dx = ...$ (6')

$M = ...$ (8')

$I = ...$ (9')

$r = ...$ (10')

$\theta = ...$ (17')

$D = ...$ (19')

$\rho = ...$ (20')

$A_i = ...$ (21')

$K_a = ...$ (22')

$K_b = ...$ (24')

$m_{j,0} = ...$ si $1 \leq j \leq J$ (11')

$p_0 = ...$ (13')

$g = 9.8$ (18')

BY NC ND

$$v_{i,k} = \ldots \tag{16'}$$

$$V_k = \ldots \tag{23'}$$

$$v_k = \frac{p_k}{M + \frac{J}{r^2} + \sum_{j=1}^{J} m_{j,k}} \tag{4'}$$

$$q_{i,k} = \rho \cdot A_i \cdot v_{i,k} \tag{15'}$$

$$q_{i,j,k} = \begin{cases} q_{i,k} & \text{si } 0 < v_k \text{ y } j = 1 \\ q_{i,k} - \frac{m_{2,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } v_k \le 0 \text{ y } j = 1 \\ \frac{m_{j-1,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } 0 < v_k \text{ y } 1 < j < J \\ -\frac{m_{j+1,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } v_k \le 0 \text{ y } 1 < j < J \\ \frac{m_{J-1,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } 0 < v_k \text{ y } j = J \\ 0 & \text{si } v_k \le 0 \text{ y } j = J \end{cases} \tag{12'}$$

$$q_{o,j,k} = \begin{cases} \frac{m_{j,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } 0 < v_k \text{ y } 1 \le j \le J \\ -\frac{m_{j,k}}{dx} \cdot v_k & \text{si } v_k \le 0 \text{ y } 1 \le j \le J \end{cases} \tag{2'}$$

$$q_{o,k} = \begin{cases} q_{o,J,k} & \text{si } 0 < v_k \\ q_{o,1,k} & \text{si } v_k \le 0 \end{cases} \tag{1'}$$

$$\mathrm{T}_k = K_a \cdot V_k - K_b \cdot \frac{v_k}{r} \tag{14'}$$

$$m_{j,k+1} = m_{j,k} + \left(q_{i,j,k} - q_{o,j,k}\right) \cdot dt \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{5'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(\begin{array}{l} \mathrm{T}_k / r - q_{i,k} \cdot v_{i,k} \cdot \sin(\theta) \\ -\sum_{j=1}^{J} m_{j,k} \cdot g \cdot \sin(\theta) - \left(D + q_{o,k}\right) \cdot v_k \end{array} \right) \cdot dt \tag{7'}$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante largo. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3, donde q_o aparece separado en $q_{o,sup}$ si los sólidos salen por el extremo superior (como pretende *T*), y $q_{o,inf}$ si salen por el inferior (como ocurre cuando *T* es insuficiente).

BY NC ND

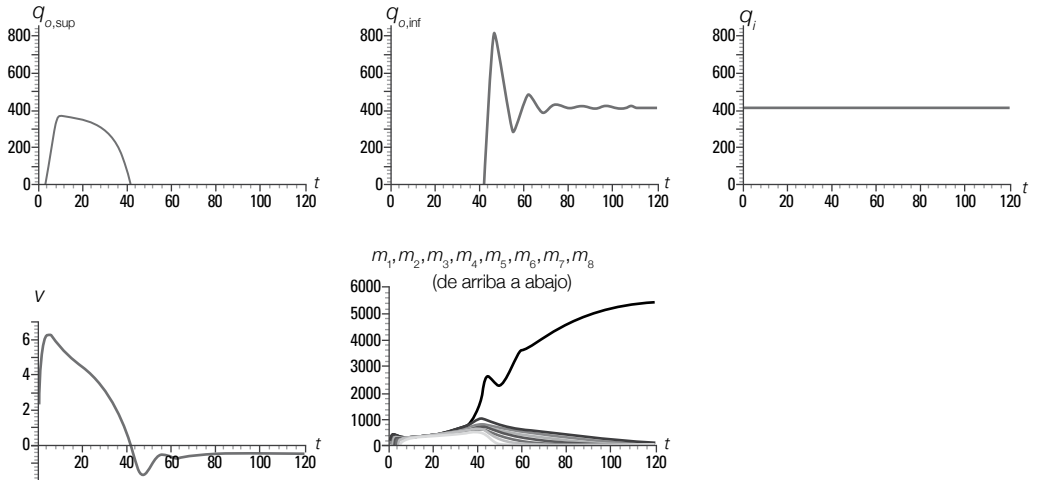


Fig. 3: Predicciones

El crecimiento predicho para m_1 hace sospechosa la aseveración de que los resbalamientos no son significativos, por lo menos para $45<t$.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (5) y (7), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las masas y el momentum. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para el momentum y para las concentraciones de las masas en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Si luego se quiere hablar de caudales, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de esos caudales en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las masas.

$\underline{m}_j(t)$ es la concentración de masa en el volumen de la rodaja j, en [kg m^{-3}]; $\underline{q}_o(t)$ es la concentración del caudal de masa saliente de la correa, en [kg s^{-1} m^{-2}]:

$$\underline{m}_j(t) = \frac{m_j(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot dx} \qquad \text{si } 1 \le j \le J \tag{a1}$$

$$\underline{q}_o(t) = \frac{q_o(t)}{\pi \cdot R^2} \tag{a2}$$

R es el radio transversal de cualquier rodaja (arbitrario, pero suficiente para el alojamiento de los sólidos), en [m]. Como es constante respecto al tiempo t, el volumen $\pi \cdot r^2 \cdot dx$ y la sección transversal $\pi \cdot r^2$ también son constantes y es fácil aprovechar el carácter de (5) y (7): derivando (a1), insertando (5), (12), (2) y (4), y usando (a1); derivando (7), insertando (15), (1), (2) y (4), y usando (a1); y considerando (a2), insertando (1), (2) y (4), y usando (a1):

$$\frac{d\underline{m}_j(t)}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{\underline{m}_j(t) - \underline{m}_{j-1}(t)}{dx} \cdot \mathrm{p}(t) & \text{si } 0 < p(t) \\ \dfrac{\underline{m}_{j+1}(t) - \underline{m}_j(t)}{dx} \cdot \mathrm{p}(t) & \text{si } p(t) \le 0 \end{cases} \qquad \text{si } 2 \le j \le J-1$$

BY NC ND

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{T(t)}{r} - \rho \cdot A_i \cdot v_i^2(t) \cdot \sin(\theta) - g \cdot \sin(\theta) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx$$
$$- \left(D + \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}_J(t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx} & \text{si } 0 < p(t) \\ -\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}_1(t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx} & \text{si } p(t) \le 0 \end{cases} \right) \cdot \frac{p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx}$$

$$\underline{q}_o(t) = \begin{cases} \dfrac{\underline{m}_J(t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx} & \text{si } 0 < p(t) \\ -\dfrac{\underline{m}_1(t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \underline{m}_j(t) \cdot dx} & \text{si } p(t) \le 0 \end{cases}$$

Y, haciendo que *dx* tienda a 0 y reconociendo que $d\underline{m}(x,t)/dt = \partial \underline{m}(x,t)/\partial t$ y $d\underline{m}(x,t)/dx = \partial \underline{m}(x,t)/\partial x$ cuando estas derivadas parciales se refieren a *x* y a *t* constantes, respectivamente:

$$\frac{\partial \underline{m}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{m}(x,t)}{\partial x} \cdot |p(t)| \qquad \text{si} \quad 0 < x < X \tag{a3}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{T(t)}{r} - \rho \cdot A_i \cdot v_i^2(t) \cdot \sin(\theta) - g \cdot \sin(\theta) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi$$
$$- \left(D + \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}(X,t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi} & \text{si } 0 < p(t) \\ -\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}(0,t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi} & \text{si } p(t) \le 0 \end{cases} \right) \cdot \frac{p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi} \tag{a4}$$

$$\underline{q}_o(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}(X,t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi} & \text{si } 0 < p(t) \\ -\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \underline{m}(0,t) \cdot p(t)}{M + \dfrac{I}{r^2} + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^X \underline{m}(\chi,t) \cdot d\chi} & \text{si } p(t) \le 0 \end{cases} \tag{a5}$$

Por cierto, *X* es la longitud de la correa, en [m].

Apéndice acerca de la Mecánica para (4)

En un cuerpo que rota en torno a un eje fijo, que tiene masa y geometría constantes, y que recibe una fuerza en su superficie:

CC BY NC ND

$$v_{trasl}(t) = \omega(t) \cdot r = \frac{p_{rot}(t)}{I} \cdot r = \frac{p_{rot}(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot r \cdot d\tau}{I} \cdot r$$

$$= \frac{p_{rot}(0)/r + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau}{I/r^2} = \frac{"p_{trasl}(0)" + \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau}{"m"} = \frac{"p_{trasl}(t)"}{"m"}$$

donde $v_{trasl}(t)$ es la velocidad de traslación tangencial del cuerpo, en [m s^{-1}]; $\omega(t)$ es su velocidad angular, en [rad s^{-1}]; r es su radio, en [m]; $p_{rot}(t)$ es su momentum angular, en [N m s]; I es su momentum de inercia, en [N m rad^{-1} s^2]; $p_{rot}(0)$ es el momentum angular inicialmente, en [N m s]; $f(t)$ es la fuerza tangencial neta recibida por el cuerpo en su superficie, en [N]; "$p_{trasl}(0)$" sería el momentum de traslación inicial equivalente en un cuerpo que se traslada, en [N s]; "m" sería la masa equivalente en ese cuerpo, en [kg]; y "$p_{trasl}(t)$" sería el momentum de traslación equivalente en ese mismo cuerpo, en [N s].

Eso significa que el cuerpo que rota, acoplado sin resbalamientos con cuerpos que se trasladan, se parece a uno de ellos dotado de masa "m"$=I/r^2$.

CC BY NC ND

55.0

UNA BALA CALIENTE (ENERGÍAS Y POTENCIAS)

En 1701, Newton publicó anónimamente su *Scala graduum caloris*, un ensayo acerca de la temperatura y los termómetros que incluía una conjetura respecto al enfriamiento de los cuerpos más calientes que el ambiente.

Las explicaciones modernas no difieren decisivamente de esa conjetura, aunque incluyen una distinción entre temperatura y calor, una cierta negación de éste en favor del concepto de energía, y algunos otros refinamientos.

Parodiando la época de Newton, imaginemos una bala esférica de hierro inicialmente caliente, en un ambiente de aire quieto y frío.

Fig. 1: Una bala caliente

Interesa predecir la evolución de la temperatura de la bala, suponiendo que la temperatura del ambiente no se altera apreciablemente.

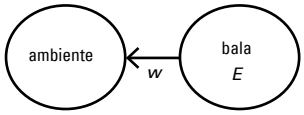


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$T(t)$ es la temperatura de la bala, en [K]:

$$T\left(t\right)=\frac{E\left(t\right)-e_0\cdot m}{c_T\cdot m} \tag{1}$$

$E(t)$ es la energía (térmica) en la bala, en [J]; e_0 es la energía específica de referencia de la bala (para T=0), en [J kg^{-1}]; m es la masa en la bala, en [kg]; c_T es el calor específico del hierro, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$E\left(t\right)=E\left(0\right)-\int_0^t w\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

$$e_0=0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$m=33.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$c_T=460 \tag{5}$$

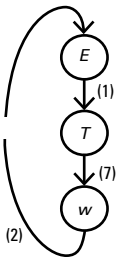
$E(0)$ es la energía inicialmente, en [J]; $w(t)$ es la potencia (térmica) de la bala al ambiente, por la superficie de contacto entre ambos, en [W]:

$$E\left(0\right)=11760000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$w\left(t\right)=\gamma\cdot A\cdot\left(T\left(t\right)-T_{amb}\right) \tag{7}$$

γ es un coeficiente relativo a la conducción térmica por la superficie entre el hierro y el aire, en [W m^{-2} K^{-1}]; A es el área de esa superficie, en [m^2]; T_{atm} es la temperatura del aire ambiental, en [K]:

CC BY NC ND



$$\gamma = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$A = 0.12 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$T_{amb} = 300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (6), (8), (9) y (10) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2) y (7), contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 3 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^3 (=8) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la energía en el recinto, sino que la energía depende por integración de todas las potencias.

(2) tiene la energía despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 8 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^2$ (=4).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de la temperatura *T*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (2); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *E* inicial, e_0, *m*, c_T, γ, *A*, T_{amb}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(10) como:

$$e_0 = \ldots \tag{3'}$$

$$m = \ldots \tag{4'}$$

$$c_T = \ldots \tag{5'}$$

$$\gamma = \ldots \tag{8'}$$

$$A = \ldots \tag{9'}$$

$$T_{amb} = \ldots \tag{10'}$$

$$E_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$T_k = \frac{E_k - e_0 \cdot m}{c_T \cdot m} \tag{1'}$$

BY NC ND

$$w_k = \gamma \cdot A \cdot \left(T_k - T_{amb}\right) \qquad (7')$$

$$E_{k+1} = E_k - w_k \cdot dt \qquad (2')$$

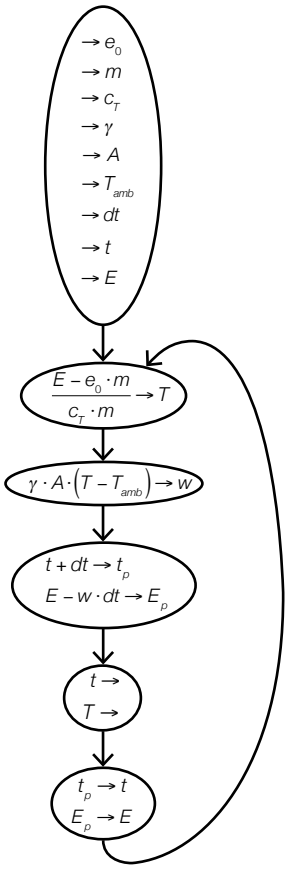


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=100 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

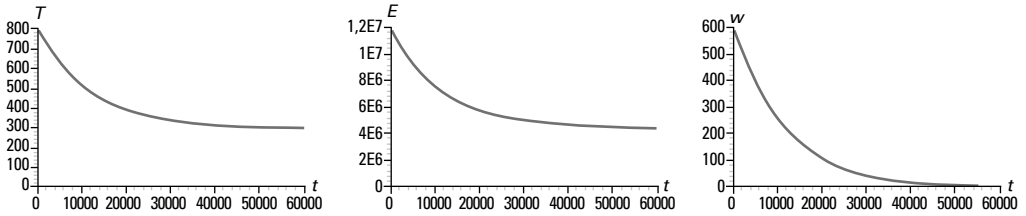


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la energía con el solo aburrimiento de derivar e insertar

CC BY NC ND

reemplazos directos. De hecho, derivando (2) e insertando (7) y (1):

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma \cdot A \cdot \left(\frac{E(t) - e_0 \cdot m}{c_T \cdot m} - T_{amb} \right) \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución de la temperatura de la bala, aceptando (a1) y considerando (1):

$$T(t) = \frac{E(t) - e_0 \cdot m}{c_T \cdot m} \qquad \text{(a2)}$$

BY NC ND

56.0

UNA BALA CALIENTE EN UN CALORÍMETRO (ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos una bala esférica de hierro inicialmente caliente, inmersa dentro de agua inicialmente fría y confinada dentro de un recipiente sin pasadas significativas para caudales de masa ni para potencias térmicas.

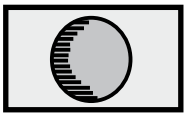


Fig. 1: Una bala caliente en un calorímetro

Interesa predecir las evoluciones de las temperaturas tanto del agua como de la bala.

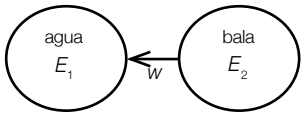


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$T_1(t)$ es la temperatura del agua, en [K]; $T_2(t)$ es la temperatura de la bala, en [K]:

$$T_1(t) = \frac{E_1(t) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1} \tag{1}$$

$$T_2(t) = \frac{E_2(t) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} \tag{2}$$

$E_1(t)$ es la energía (térmica) en el agua, en [J]; e_{01} es la energía específica de referencia del agua (para T_1=0), en [J kg^{-1}]; m_1 es la masa en el agua, en [kg]; c_{T1} es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]; $E_2(t)$ es la energía en la bala, en [J]; e_{02} es la energía específica de referencia de la bala (para T_2=0), en [J kg^{-1}]; m_2 es la masa en la bala, en [kg]; c_{T2} es el calor específico de la bala, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$E_1(t) = E_1(0) + \int_0^t w(\tau) \cdot d\tau \tag{3}$$

$$e_{01} = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$m_1 = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$c_{T1} = 4186 \tag{6}$$

$$E_2(t) = E_2(0) - \int_0^t w(\tau) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$e_{02} = 0 \quad \text{(sin convicción)} \tag{8}$$

CC BY NC ND

$$m_2 = 33.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$c_{T2} = 460 \tag{10}$$

$E_1(0)$ es la energía en el agua inicialmente, en [J]; $w(t)$ es la potencia (térmica) de la bala al agua, por la superficie de contacto entre ambos, en [W]; $E_2(0)$ es la energía en la bala inicialmente, en [J]:

$$E_1(0) = 61324900 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$w(t) = \gamma \cdot A \cdot \left(T_2(t) - T_1(t)\right) \tag{12}$$

$$E_2(0) = 5593830 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

γ es un coeficiente relativo a la conducción térmica por la superficie entre el hierro y el agua, en [W m^{-2} K^{-1}]; A es el área de esa superficie, en [m^2]:

$$\gamma = 50 \tag{14}$$

$$A = 0.12 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

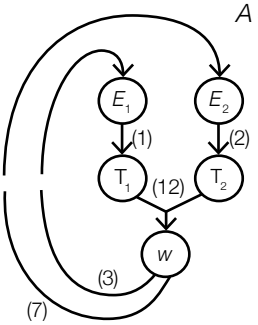


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (6), (8), (9), (10), (11), (13), (14) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2), (3) y (7), contienen 2 cada una; (12), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 5 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^4 \cdot 3^1$ (=48) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la energía en el recinto, sino que la energía depende por integración de todas las potencias.

(3) y (7) tienen energías despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 2 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 48 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^1$ (=12).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 12 sistemas de ecuaciones restantes, 11 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

BY NC ND

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas T_1 y T_2, si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (3) y (7); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar E_1 inicial, E_2 inicial, e_{01}, e_{02}, c_{T1}, c_{T2}, m_1, m_2, γ, A, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(15) como:

$$e_{01} = \ldots \quad (4')$$

$$e_{02} = \ldots \quad (8')$$

$$c_{T1} = \ldots \quad (6')$$

$$c_{T2} = \ldots \quad (10')$$

$$m_1 = \ldots \quad (5')$$

$$m_2 = \ldots \quad (9')$$

$$\gamma = \ldots \quad (14')$$

$$A = \ldots \quad (15')$$

$$E_{1,0} = \ldots \quad (11')$$

$$E_{2,0} = \ldots \quad (13')$$

$$T_{1,k} = \frac{E_{1,k} - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1} \quad (1')$$

$$T_{2,k} = \frac{E_{2,k} - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} \quad (2')$$

$$w_k = \gamma \cdot A \cdot \left(T_{1,k} - T_{2,k}\right) \quad (12')$$

$$E_{1,k+1} = E_{1,k} + w_k \cdot dt \quad (3')$$

$$E_{2,k+1} = E_{2,k} - w_k \cdot dt \quad (7')$$

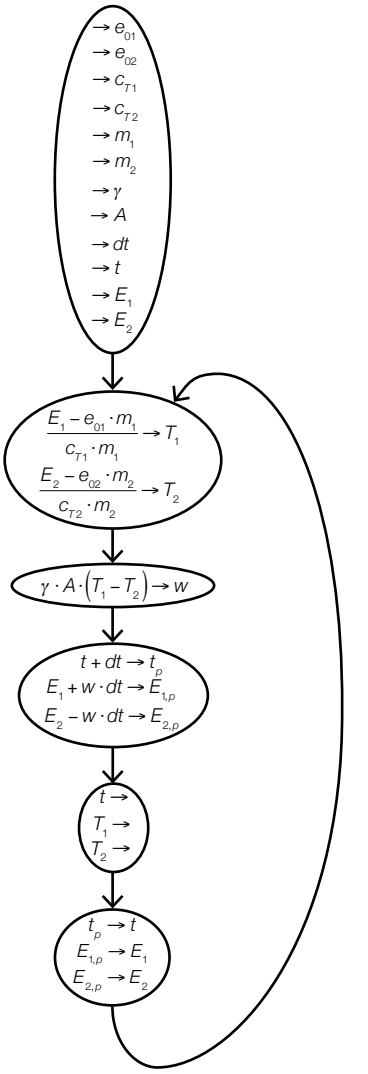


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

BY NC ND

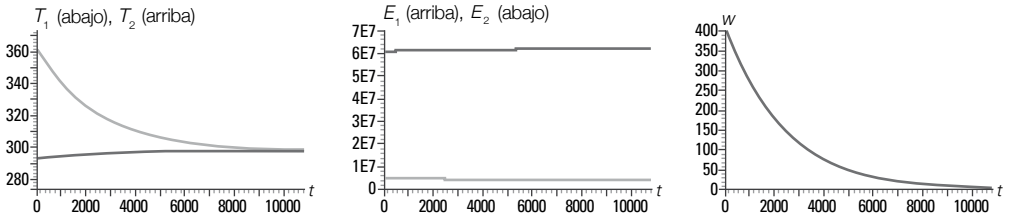


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (3) y (7) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las energías con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (3) e insertando (12), (2) y (1); y derivando (7) e insertando (12), (2) y (1):

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \gamma \cdot A \cdot \left(\frac{E_2(t) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} - \frac{E_1(t) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_{12}} \right) \tag{a1}$$

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = -\gamma \cdot A \cdot \left(\frac{E_2(t) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} - \frac{E_1(t) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_{12}} \right) \tag{a2}$$

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas, aceptando (a1) y (a2) y considerando (1) y (2):

$$T_1(t) = \frac{E_1(t) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1} \tag{a3}$$

$$T_2(t) = \frac{E_2(t) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} \tag{a4}$$

Al respecto, inicialmente:

$$E_1(0) + E_2(0) = E$$

donde E es la energía total dentro del recipiente, en [J], que se mantiene constante durante el transcurso del tiempo por la ausencia de pasadas para las potencias.

Y, finalmente, en condiciones estacionarias, según (a1)-(a4) y lo dicho recién:

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \frac{dE_2(t)}{dt} = 0 = \frac{E_2 - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} - \frac{E_1 - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_{12}} = T_2 - T_1$$

$$E_1 + E_2 = E$$

donde E_2, E_1, T_2 y T_1 son los estados estacionarios de $E_2(t)$, $E_1(t)$, $T_2(t)$ y $T_1(t)$, respectivamente.

Mediante las últimas ecuaciones y algunas maniobras algebraicas sencillas, es fácil deducir lo siguiente:

BY NC ND

$$E_1 = \frac{E \cdot c_{T1} \cdot m_1 + \left(e_{01} \cdot c_{T2} - e_{02} \cdot c_{T1}\right) \cdot m_1 \cdot m_2}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2}$$

$$E_2 = \frac{E \cdot c_{T2} \cdot m_2 + \left(e_{02} \cdot c_{T1} - e_{01} \cdot c_{T2}\right) \cdot m_1 \cdot m_2}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2}$$

$$T_1 = \frac{E_1 - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1} = \frac{E - \left(e_{01} \cdot m_1 + e_{02} \cdot m_2\right)}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2} = \frac{E_2 - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} = T_2$$

Esto permite compactar la causalidad si el tiempo en que se llega a los estados estacionarios se considera irrelevante (aunque aquí es bastante largo). Tal compactación se usa habitualmente, por ejemplo, cuando, en vez de la bala inmersa en el agua confinada en el recipiente, se trata de un fluido (líquido o gaseoso) mezclado rápidamente con otro en algún recinto.

Mediante algunas otras maniobras algebraicas y la ecuación que sigue a (a4), es fácil deducir algo más:

$$\frac{T_2(0) - T_2}{T_1 - T_1(0)} = \frac{\dfrac{E_2(0) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} - \dfrac{E - \left(e_{01} \cdot m_1 + e_{02} \cdot m_2\right)}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2}}{\dfrac{E - \left(e_{01} \cdot m_1 + e_{02} \cdot m_2\right)}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2} - \dfrac{E_1(0) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1}}$$

$$= \frac{\dfrac{E_2(0) - e_{02} \cdot m_2}{c_{T2} \cdot m_2} - \dfrac{E_1(0) + E_2(0) - \left(e_{01} \cdot m_1 + e_{02} \cdot m_2\right)}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2}}{\dfrac{E_1(0) + E_2(0) - \left(e_{01} \cdot m_1 + e_{02} \cdot m_2\right)}{c_{T1} \cdot m_1 + c_{T2} \cdot m_2} - \dfrac{E_1(0) - e_{01} \cdot m_1}{c_{T1} \cdot m_1}}$$

$$= \frac{c_{T1} \cdot m_1}{c_{T2} \cdot m_2}$$

Esto permite diagnosticar el calor específico de la bala u otro cuerpo (sólido, líquido o gaseoso) inmerso en el agua u otro fluido (líquido o gaseoso) confinado dentro del recipiente, otorgando a éste el nombre de calorímetro, si se conoce previamente el calor específico del fluido y se miden los cambios de temperaturas del fluido y del cuerpo, según:

$$c_{T2} = c_{T1} \cdot \frac{m_1 \cdot \left(T_1 - T_1(0)\right)}{m_2 \cdot \left(T_2(0) - T_2\right)}$$

Pero no permite diagnosticar la energía específica de referencia del cuerpo.

BY NC ND

57.0

AGUA A TRAVÉS DE UN CALEFACTOR Y DE UN RADIADOR VENTILADO [50] (ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un equipo demostrativo que consta de un estanque con agua en el que está instalado un calefactor, y una cañería de ida y vuelta, también con agua, en la que están instalados un radiador ventilado y una bomba hidráulica que mueve agua del estanque al radiador y del radiador al estanque. Podemos suponer que tanto el estanque como la cañería se mantienen llenos de agua, y que la conducción térmica sólo es importante en el radiador.

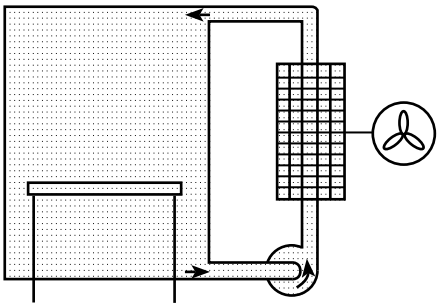


Fig. 1: Agua a través de un calefactor y de un radiador ventilado

Interesa predecir la evolución de la temperatura del agua dentro del estanque (presuntamente, la misma con que sale de allí) y la evolución de la temperatura del agua dentro del radiador (presuntamente, la misma con que sale de él).

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$T_e(t)$ es la temperatura del agua dentro del estanque, en [K]; $T_r(t)$ es la temperatura del agua dentro del radiador, en [K]:

$$T_e(t) = \frac{E_e(t)/m_e}{4180} \tag{1}$$

$$T_r(t) = \frac{E_r(t)/m_r}{4180} \tag{2}$$

$E_e(t)$ es la energía en el agua dentro del estanque, en [J]; m_e es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; $E_r(t)$ es la energía en el agua dentro del radiador, en [J]; m_r es la masa en el agua dentro del radiador, en [kg]:

[50] Recorte y reformulación de: G. Alberti y N. Yaksic, 2008, Actualización de la instrumentación, control y supervisión de un sistema intercambiador de calor, *Memoria, Dep. Electrónica, Universidad Santa María*, Valparaíso. En verdad, se trata de un aparato de iniciación en el control de temperaturas imitando el enfriamiento de un motor a explosión.

CC BY NC ND

$$E_e(t) = E_e(0) + \int_0^t \left(w_{calef}(\tau) + q(\tau) \cdot \frac{E_r(\tau)}{m_r} - q(\tau) \cdot \frac{E_e(\tau)}{m_e} \right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$$m_e = 75 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$$E_r(t) = E_r(0) + \int_0^t \left(q(\tau) \cdot \frac{E_e(\tau)}{m_e} - q(\tau) \cdot \frac{E_r(\tau)}{m_r} - G \cdot \frac{n_{vent}(\tau)}{n_{vent}(\tau) + N} \cdot \left(T_r(\tau) - T_{atm} \right) \right) \cdot d\tau \quad (5)$$ [51]

$$m_r = 0.38 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$E_e(0)$ es la energía en el agua dentro del estanque inicialmente, en [J]; $w_{calef}(t)$ es la potencia entrante al estanque por el calefactor, en [W]; $q(t)$ es el caudal de agua viajante a través del estanque y del radiador, en [kg s^{-1}]; $E_r(0)$ es la energía en el agua dentro del radiador inicialmente, en [J]; G es un coeficiente de salida de potencia del radiador, en [W K^{-1}]; $n_{vent}(t)$ es la frecuencia de giro del ventilador, en [s^{-1}]; N es otro coeficiente de salida de potencia del radiador, en [s^{-1}]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$E_e(0) = 91855500 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$w_{calef}(t) = 4500 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$q(t) = \begin{cases} 0.3 & \text{si } t < 7200 \\ 0.03 & \text{si } 7200 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$$E_r(0) = 465400 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$G = 480 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$ [52]

$$n_{vent}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3600 \\ 25 & \text{si } 3600 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

$$N = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$ [53]

$$T_{atm} = 293 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

Saltemos el dibujo de la estructura causal, también, reemplazándolo por una descripción verbal.

Si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho, pretendemos que: T_e depende de E_e; T_r, de E_r; E_e, de w_{calef}, q y E_r; y E_r, de q, E_e, n_{vent} y T_r; mientras, w_{calef}, q y n_{vent} quedan independientes.

Tal estructura causal es dudable pues, aunque (4), (6), (7), (10), (11), (13) y (14) no

[51] La aproximación para la última potencia, de salida obediente al ventilador, es improvisada.

[52] En el ejemplo, el radiador consta de 2 marcos puestos uno frente al otro, con 21 tubos planos verticales de 0.015 metros de ancho y 0.30 de longitud cada uno, paralelos entre sí por sus caras anchas. Entre cada par de tubos vecinos en un mismo marco, hay una placa plegada en zigzag descendente, de 0.015 metros de ancho y 1.86 de longitud, soldada a ambos tubos por los lados del zigzag. El coeficiente pelicular de salida de potencia en cada cara es cercano a 190 vatios por cada metro cuadrado y grado Kelvin, a plena ventilación. Por eso, suponemos: $G \approx 190 \cdot ((1.86 \cdot 0.015 \cdot 2 + 0.30 \cdot 0.015 \cdot 1) \cdot 21) \cdot 2 \approx 480$.

[53] En el ejemplo, la frecuencia máxima de giro del ventilador es 50 hertzios y, como se trata de un ventilador y un radiador estándares, es probable que una frecuencia de giro mayor aumente poco la salida de potencia del radiador. Por eso, porque el aumento de la frecuencia cerca de 50 hertzios ya muestra signos de poco aumento de la salida de potencia, y porque N equivale a la frecuencia de giro con que la eficiencia de la ventilación se reduce a la mitad, suponemos $N \approx 50$.

CC BY NC ND

contienen ninguna variable que evoluciona: (8), (9) y (12) contienen 1 cada una; (1) y (2), 2; (3), 4; (5), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 7 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^3 \cdot 2^2 \cdot 4^1 \cdot 5^1$ (=80) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(14).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la energía en el recinto, sino que la energía depende por integración de todas las potencias.

(3) y (5) tiene energías despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 80 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(14), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^2$ (=4).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(14).

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas T_e y T_r; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (3) y (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar E_e inicial, E_r inicial, m_e, m_r, *G*, *N*, T_{atm}, w_{calef}, *q*, n_{vent}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(14) adecuadamente.

Saltemos el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación, también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

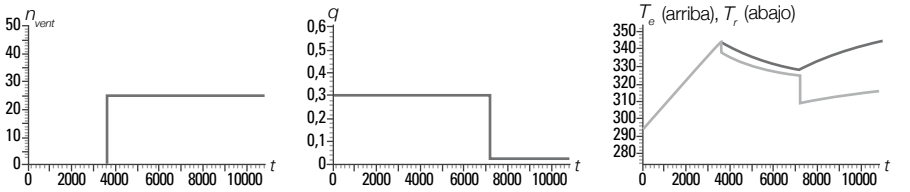


Fig. 2: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (3) y (5) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las energías con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (3); y derivando (5) e insertando (2):

$$\frac{dE_e(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{m_e} \cdot E_e(t) + \frac{q(t)}{m_r} \cdot E_r(t) + w_{calef}(t) \qquad \text{(a1)}$$

BY NC ND

$$\frac{dE_r(t)}{dt} = \frac{q(t)}{m_e}\cdot E_e(t) - \left(\frac{q(t)}{m_r} + \frac{G\cdot \frac{n_{vent}(t)}{n_{vent}(t)+N}}{4180\cdot m_r} \right)\cdot E_r(t) + G\cdot \frac{n_{vent}(t)}{n_{vent}(t)+N}\cdot T_{atm} \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas, aceptando (a1) y (a2), y considerando (1) y (2):

$$T_e(t) = \frac{1}{4180\cdot m_e}\cdot E_e(t) \qquad \text{(a3)}$$

$$T_r(t) = \frac{1}{4180\cdot m_r}\cdot E_r(t) \qquad \text{(a4)}$$

Apéndice acerca de la validez de (1)-(14)

Según (1)-(14) (o, más simplemente, según (a1)-(a4)), en estados estacionarios tanto para el estanque como para el radiador:

$$0 = -\frac{q}{m_e}\cdot E_e + \frac{q}{m_r}\cdot E_r + w_{calef}$$

$$0 = \frac{q}{m_e}\cdot E_e - \left(\frac{q}{m_r} + \frac{G\cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N}}{4180\cdot m_r} \right)\cdot E_r + G\cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N}\cdot T_{atm}$$

$$T_e = \frac{1}{4180\cdot m_e}\cdot E_e$$

$$T_r = \frac{1}{4180\cdot m_r}\cdot E_r$$

con lo cual:

$$T_e = T_{atm} + \left(\frac{n_{vent}+N}{G\cdot n_{vent}} + \frac{1}{4180\cdot q} \right)\cdot w_{calef}$$

$$T_r = T_{atm} + \frac{n_{vent}+N}{G\cdot n_{vent}}\cdot w_{calef}$$

La figura A1 tabula, bajo T_e y T_r, temperaturas estacionarias medidas en circunstancias reales [54] que debiesen corresponder al ejemplo aludido hasta aquí, y también tabula, bajo $T_{e,pred}$ y $T_{r,pred}$, las temperaturas estacionarias predichas mediante (1)-(14) (o, más simplemente, mediante las dos ecuaciones recientes). Los parecidos entre mediciones y predicciones son manifiestos. El equipo estaba en una sala cuya temperatura era alterada por el funcionamiento del equipo mismo, sin ser medida. Así, es posible que las diferencias entre mediciones y predicciones se deban, en parte, a la simpleza de (1)-(14) y, en otra, a falta de garantía respecto a T_{atm}.

[54] De Alberti y Yaksic, 2008.

w_{calef}	n_{vent}	q	T_e	$T_{e,pred}$	T_r	$T_{r,pred}$
9000	50	0.583	341.7	334.2	338.9	330.5
9000	25	0.583	350.5	352.9	348.5	349.2
4500	50	0.583	316.7	313.6	315.6	311.8

Fig. A1: Temperaturas estacionarias para el estanque y el radiador; medidas y predichas

Para más abundancia, como la temperatura del radiador puede experimentar evoluciones mucho más rápidas que las de la temperatura del estanque, cabe considerar tales evoluciones rápidas como conducentes a estados casi-estacionarios para el radiador. Según (1)-(14) (o, más simplemente, según (a2)-(a4)), en esos estados, después de evoluciones rápidas:

$$0 \approx \frac{q}{m_e} \cdot E_e - \left(\frac{q}{m_r} + \frac{G \cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N}}{4180 \cdot m_r} \right) \cdot E_r + G \cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N} \cdot T_{atm}$$

$$T_e = \frac{1}{4180 \cdot m_e} \cdot E_e$$

$$T_r = \frac{1}{4180 \cdot m_r} \cdot E_r$$

con lo cual:

$$T_r \approx \frac{4180 \cdot q \cdot T_e + G \cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N} \cdot T_{atm}}{4180 \cdot q + G \cdot \frac{n_{vent}}{n_{vent}+N}}$$

La figura A2 tabula, bajo T_e y T_r, temperaturas casi-estacionarias para el radiador (o lisamente estacionarias tanto para el radiador como para el estanque) medidas en circunstancias reales [55] , y también tabula, bajo $T_{r,pred2}$, las temperaturas casi-estacionarias predichas mediante la última ecuación (donde T_e parece meramente dominante y, con su medición, contrarresta la falta de garantía respecto a T_{atm}). Los parecidos entre mediciones y predicciones son, otra vez, manifiestos. Las diferencias se deberían, en parte, a la simpleza de (1)-(14) y, en otra, a debilidad de la garantía respecto a q, ya que la medición de caudales se confió a una turbina cuyo desempeño con caudales leves era inseguro.

[55] De Alberti y Yaksic, 2008.

BY NC ND

n_{vent}	q	T_e	T_r	$T_{r.pred2}$
50	0.583	341.70	338.90	337.33
25	0.583	350.50	348.50	346.96
50	0.583	316.70	315.60	314.58
50	0.583	297.30	297.10	296.91
50	0.292	301.00	300.80	299.69
50	0.175	361.30	341.40	344.43
40	0.175	361.40	342.60	345.96
30	0.175	361.70	344.20	348.13
20	0.175	361.70	346.30	350.85
10	0.175	362.10	352.20	355.29
0	0.175	362.60	361.80	362.60

Fig. A2: Temperaturas casi-estacionarias para el radiador; medidas y predichas

Los parecidos entre la lentitud de las evoluciones medidas y las predichas, fuera de los estados estacionarios y casi-estacionarios, también son manifiestos.

BY NC ND

58.0
UN ALAMBRE CALIENTE (ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un alambre caliente, quieto.

Fig. 1: Alambre caliente

Interesa predecir las evoluciones de las temperaturas a lo largo de ese alambre (inventando en él rodajas ficticias, delgadas y presuntamente homogéneas por dentro, y numerándolas de izquierda a derecha), si tales temperaturas no son iguales inicialmente y las potencias que viajan entre el alambre y el ambiente que lo rodea son irrelevantes.

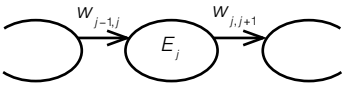


Fig. 2: Estructura espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

t es el tiempo, en [s].
$T_j(t)$ es la temperatura de la rodaja j, en [K]:

$$T_j(t) = \frac{E_j(t)}{c \cdot m} \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{1}$$ [56]

$E_j(t)$ es la energía térmica en la rodaja j, en [J]; c es el calor específico de cualquier rodaja, en [J kg^{-1} K^{-1}]; m es la masa en cualquier rodaja, en [kg]; J es la cantidad de rodajas:

$$E_j(t) = \begin{cases} E_1(0) - \int_0^t w_{1,1+1}(\tau) \cdot d\tau & \text{si } j = 1 \\ E_j(0) + \int_0^t \left(w_{j-1,j}(\tau) - w_{j,j+1}(\tau) \right) \cdot d\tau & \text{si } 1 < j < J \\ E_J(0) + \int_0^t w_{J-1,J}(\tau) \cdot d\tau & \text{si } j = J \end{cases} \tag{2}$$

$c = 460$ (por ejemplo, si el alambre es de acero) (3)
$m = 0.0024$ (por ejemplo) (4)
$J = 9$ (por ejemplo) (5)

$E_j(0)$ es la energía en la rodaja j inicialmente, en [J]; $w_{j,j+1}(t)$ es la potencia de la rodaja j a la $j+1$, en [W]:

[56] Simplificación suponiendo $e_0=0$.

CC BY NC ND

$$E_j(0) = \begin{cases} 331.2 & \text{si } 1 \le j < 4 \\ 883.2 & \text{si } j = 5 \\ 331.2 & \text{si } 6 \le j < 9 \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$w_{j,j+1}(t) = \frac{g \cdot A}{dx} \cdot \left(T_j(t) - T_{j+1}(t)\right) \quad \text{si } 1 \le j < J \tag{7}$$

g es la conductividad térmica de cualquier rodaja, en [W m^{-1} K^{-1}]; A es su área transversal, en [m^2]; dx es su longitud, en [m]:

$$g = 50 \quad \text{(por ejemplo, si el alambre es de acero)} \tag{8}$$

$$A = 3 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$dx = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

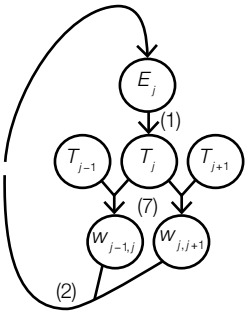


Fig. 3: Estructura causal para una rodaja (si $1<j<J$, si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (6), (8), (9) y (10) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (2) y (7) contienen 2 cada una; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 3 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear 2^3 (=8) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(10).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(2) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 6 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado (para la rodaja *j,* la *j-1* y la *j+1*) y, de los 8 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(10), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^2$ (=4).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j*, la *j-1* o la *j+1*), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(10).

Si nos interesa la evolución de la temperatura T_j; si queremos hacer predicciones

CC BY NC ND

usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (2); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar E_j inicial, T_{j-1}, T_{j+1}, *c, m, g, A, dx, dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(10) como:

$c = \ldots$ (3′)

$m = \ldots$ (4′)

$J = \ldots$ (5′)

$g = \ldots$ (8′)

$A = \ldots$ (9′)

$dx = \ldots$ (10′)

$E_{j,0} = \ldots$ (6′)

$$T_{j,k} = \frac{E_{j,k}}{c \cdot m} \quad \text{si } 1 \le j \le J \qquad (1')$$

$$w_{j,j+1,k} = \frac{g \cdot A}{dx} \cdot \left(T_{j,k} - T_{j+1,k} \right) \quad \text{si } 1 \le j < J \qquad (7')$$

$$E_{j,k+1} = \begin{cases} E_{1,k} - w_{1,2,k} \cdot dt & \text{si } j = 1 \\ E_{j,k} + \left(w_{j-1,j,k} - w_{j,j+1,k} \right) \cdot dt & \text{si } 1 < j < J \\ E_{J,k} + w_{J-1,J,k} \cdot dt & \text{si } j = J \end{cases} \qquad (2')$$

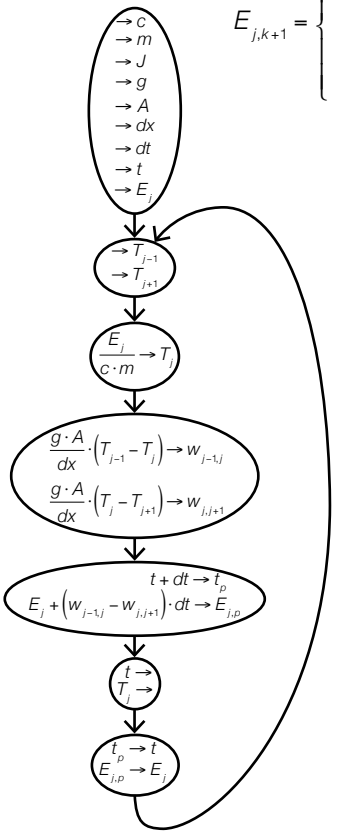


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación) para una rodaja (si 1<*j*<*J*)

BY NC ND

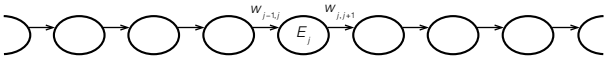


Fig. 5: Estructura espacial para el alambre

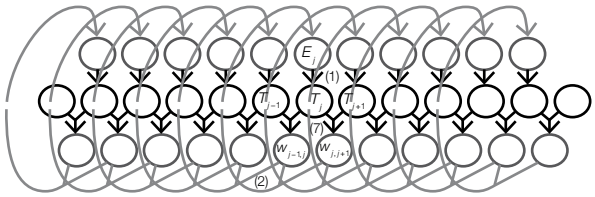


Fig. 6: Estructura causal para el alambre

El dibujo de la estructura temporal del método de computación para el alambre, es enredado. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=10 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 7.

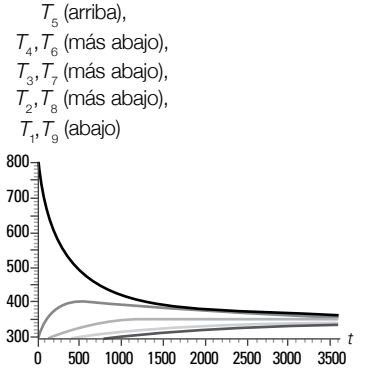


Fig. 7: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las energías. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de energía en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Además, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de potencias en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las energías. Y así sucesivamente.

$\underline{E}_j(t)$ es la concentración de energía en el volumen de la rodaja j, en [J m^{-3}]; $\underline{m}(t)$ es la concentración de masa en el volumen de cualquier rodaja, en [kg m^{-3}]; $\underline{w}_{j,j+1}(t)$ es la concentración de potencia en el área de la superficie entre las rodajas j y $j+1$, en [W m^{-2}]:

$$\underline{E}_j\left(t\right) = \frac{E_j\left(t\right)}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad \text{(a1)}$$

CC BY NC ND

$$\underline{m}(t) = \frac{m(t)}{A \cdot dx} \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{a2}$$

Derivando (a1), insertando (2), (7), (1) y (a1), y usando (a2):

$$\frac{d\underline{E}_j(t)}{dt} = \frac{g}{c \cdot \underline{m}} \cdot \frac{\underline{E}_{j-1}(t) - 2 \cdot \underline{E}_j(t) + \underline{E}_{j+1}(t)}{(dx)^2} \quad \text{si } 1 < j < J$$

Y, haciendo que dx tienda a 0 y reconociendo que $d\underline{E}(x,t)/dt = \partial \underline{E}(x,t)/\partial t$ y $d^2\underline{E}(x,t)/dx^2 = \partial^2 \underline{E}(x,t)/\partial x^2$ cuando estas derivadas parciales se refieren a x y a t constantes, respectivamente:

$$\frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = \frac{g}{c \cdot \underline{m}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{si } 0 < x < X \tag{a3}$$

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) y acomodando para dx tendiente a 0:

$$T(x,t) = \frac{\underline{E}(x,t)}{c \cdot \underline{m}} \quad \text{si } 0 < x < X \tag{a4}$$

Sin embargo, no conviene exagerar: cuando el alambre es muy largo, las predicciones hechas a base de (a3) pueden ponerse extravagantes; por ejemplo, suponiendo un alambre infinitamente largo tanto hacia la derecha como hacia a la izquierda, (a3) queda desprovista de límites para x:

$$\frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = \frac{g}{c \cdot \underline{m}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2}$$

y surge la solución siguiente:

$$\underline{E}(x,t) = e^{-x^2 \cdot c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)} \cdot \sqrt{c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)}$$

como se puede comprobar fácilmente:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2} = e^{-x^2 \cdot c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)} \cdot \sqrt{c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)} \cdot \frac{x^2 \cdot c \cdot \underline{m} - 2 \cdot g \cdot t}{4 \cdot g \cdot t^2} \cdot \frac{c \cdot \underline{m}}{g}$$

$$\frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = e^{-x^2 \cdot c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)} \cdot \sqrt{c \cdot \underline{m}/(4 \cdot g \cdot t)} \cdot \frac{x^2 \cdot c \cdot \underline{m} - 2 \cdot g \cdot t}{4 \cdot g \cdot t^2}$$

luego $$\frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = \frac{g}{c \cdot \underline{m}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2}$$

El caso es que, en cualquier instante, la solución es una función gausseana (estrictamente positiva) cuya desviación estándar es el inverso multiplicativo de su valor máximo (para x=0). Según eso, $\underline{E}(x,t)$ para x=0 y $\underline{E}(x,t)$ para $x \to \pm\infty$ evolucionan al revés simultáneamente, pese a que la distancia involucrada es descomunal.

CC BY NC ND

59.0

AGUA CALIENTE EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical y con agua que entra sueltamente por arriba, reposa y sale por abajo, a través de un orificio; pero ahora el agua que entra está más caliente que el ambiente.

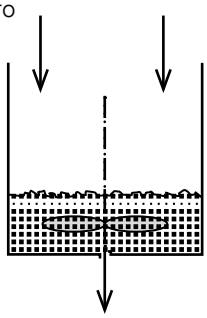


Fig. 1: Agua caliente en un estanque cilíndrico con eje vertical

Interesa predecir la evolución de la temperatura del agua que sale, suponiendo que el nivel del agua nunca desborda al estanque, y que la evaporación del agua es poco significativa (lo cual es dudable).

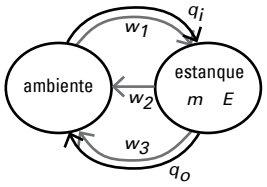


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

T es la temperatura del agua que sale y de la que está dentro, en [K]:

$$T(t) = \frac{e(t)}{c} \qquad (1)\ ^{57}$$

$e(t)$ es la energía (térmica) específica del agua que está dentro, en [J kg^{-1}]; c_T es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$e(t) = \frac{E(t)}{m(t)} \qquad (2)$$

$$c_T = 4180 \qquad (3)$$

$E(t)$ es la energía (térmica) en el agua que está dentro, en [J]; $m(t)$ es la masa en el agua que está dentro, en [kg]:

[57] Simplificación suponiendo e_0=0

CC BY NC ND

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left(w_1(\tau) - w_2(\tau) - w_3(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{5}$$

$E(0)$ es la energía inicialmente, en [J]; $w_1(t)$ es la potencia del ambiente al estanque, por arriba, con el agua entrante, en [W]; $w_2(t)$ es la potencia (térmica) del estanque al ambiente a través de la superficie superior del agua y de las paredes, en [W]; $w_3(t)$ es la potencia del estanque al ambiente, por abajo, con el agua saliente, en [W]; $m(0)$ es la masa inicialmente, en [kg]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_o(t)$ es el caudal que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]:

$$E(0) = 3845683600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$w_1(t) = q_i(t) \cdot e_i(t) \tag{7}$$

$$w_2(t) = \left(\gamma_1 \cdot \pi \cdot R^2 + \gamma_2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h(t)}{\varepsilon} \right) \cdot \left(T(t) - T_{amb} \right) \tag{8}$$

$$w_3(t) = q_o(t) \cdot e(t) \tag{9}$$

$$m(0) = 3140 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$q_i(t) = \begin{cases} 0.500 & \text{si} \quad 0 \le t < 1800 \\ 0.733 & \text{si} \quad 1800 \le t < 19800 \\ 0.600 & \text{si} \quad 19800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$q_o(t) = K \cdot \sqrt{h(t)} \tag{12}$$

$e_i(t)$ es la energía específica del agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [J kg^{-1}]; γ_1 es un coeficiente relativo a la conducción térmica por la superficie entre el agua y el aire, en [W m^{-2} K^{-1}]; R es el radio del estanque, en [m]; γ_2 es la conductividad térmica a través de las paredes del estanque, en [W m^{-1} K^{-1}]; $h(t)$ es la altura del agua, desde el extremo inferior del estanque, en [m]; ε es el espesor de las paredes del estanque, en [m]; T_{amb} es la temperatura del ambiente, en [K]; K es un coeficiente de salida del agua, en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}]:

$$e_i(t) = \begin{cases} 1224740 & \text{si} \quad 0 \le t < 3600 \\ 1308340 & \text{si} \quad 3600 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$\gamma_1 = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$R = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$\gamma_2 = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$h(t) = \frac{V(t)}{\pi \cdot R^2} \tag{17}$$

$$\varepsilon = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

CC BY NC ND

$T_{amb} = 293$ (por ejemplo) (19)

$K = 0.505$ (por ejemplo) (20)

$V(t)$ es el volumen del agua, en [m^3]:

$$V(t) = \frac{m(t)}{\rho} \quad (21)$$

ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]:

$\rho = 1000$ (22)

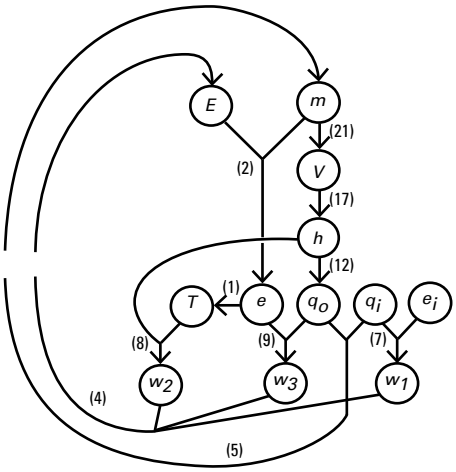


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (6), (10), (14), (15), (16), (18), (19), (20) y (22) no contienen ninguna variable que evoluciona: (11) y (13) contienen 1 cada una; (1), (12), (17) y (21), 2 cada una; (2), (5), (7), (8) y (9), 3; (4), 4; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 12 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 4^1$ (=15452) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(22).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia o un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de las otras o los otros a través de la frontera y, por derivación, de la energía o la masa en el recinto, sino que energía o la masa depende por integración de todas las potencias o todos los caudales.

(4) tiene la energía despejada en su lado izquierdo y (5) tiene la masa, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen a los que están planteados y, de los 15452 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(22), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^0$ (=1296).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1296 sistemas de ecuaciones restantes, 1295 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no

CC BY NC ND

son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(22).

Si nos interesa la evolución de la temperatura *T*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (4) y (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *E* inicial, *m* inicial, q_i, e_i, c_T, γ_1, R, γ_2, ε, T_{amb}, K, ρ, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(22) como:

$$c_T = \ldots \tag{3'}$$

$$\gamma_1 = \ldots \tag{14'}$$

$$R = \ldots \tag{15'}$$

$$\gamma_2 = \ldots \tag{16'}$$

$$\varepsilon = \ldots \tag{18'}$$

$$T_{amb} = \ldots \tag{19'}$$

$$K = \ldots \tag{20'}$$

$$\rho = \ldots \tag{22'}$$

$$E_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{10'}$$

$$q_{i,k} = \ldots \tag{11'}$$

$$e_{i,k} = \ldots \tag{13'}$$

$$e_k = \frac{E_k}{m_k} \tag{2'}$$

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} \tag{21'}$$

$$h_k = \frac{V_k}{\pi \cdot R^2} \tag{17'}$$

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{h_k} \tag{12'}$$

$$T_k = \frac{e_k}{c} \tag{1'}$$

$$w_{1,k} = q_{i,k} \cdot e_{i,k} \tag{7'}$$

$$w_{2,k} = \left(\gamma_1 \cdot \pi \cdot R^2 + \gamma_2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h_k}{\varepsilon} \right) \cdot \left(T_k - T_{amb} \right) \tag{8'}$$

$$w_{3,k} = q_{o,k} \cdot e_k \tag{9'}$$

$$E_{k+1} = E_k + \left(w_{1,k} - w_{2,k} - w_{3,k} \right) \cdot dt \tag{4'}$$

$$m_{k+1} = m_k + \left(q_{i,k} - q_{o,k} \right) \cdot dt \tag{5'}$$

CC BY NC ND

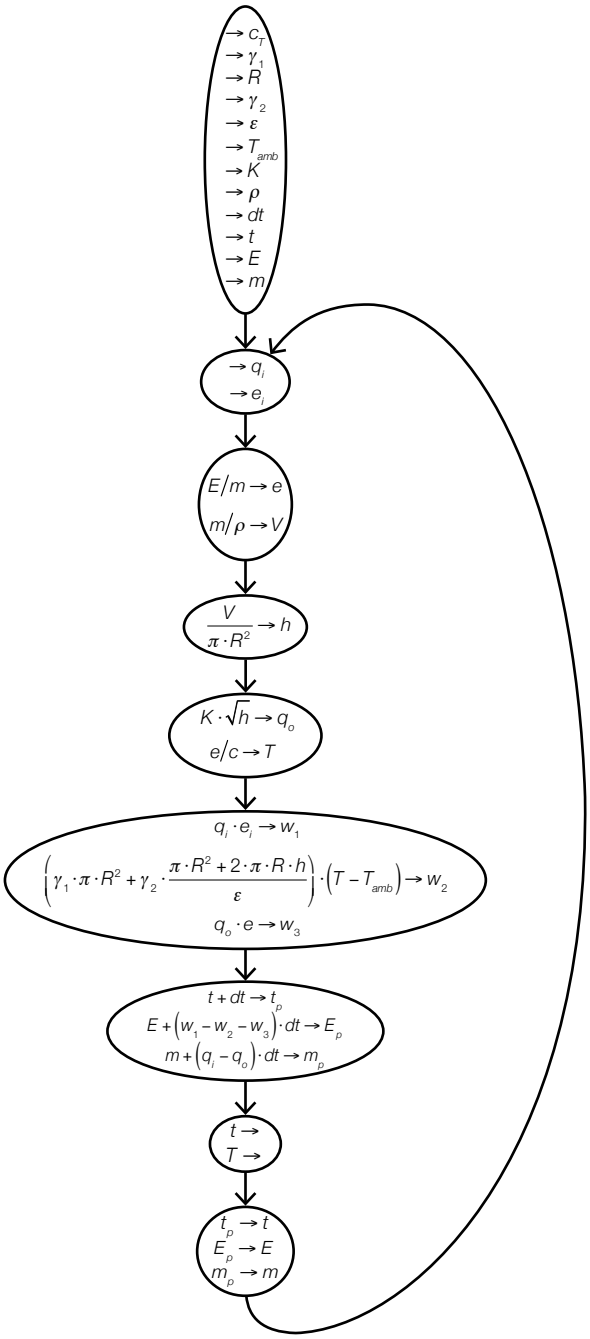


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=100 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

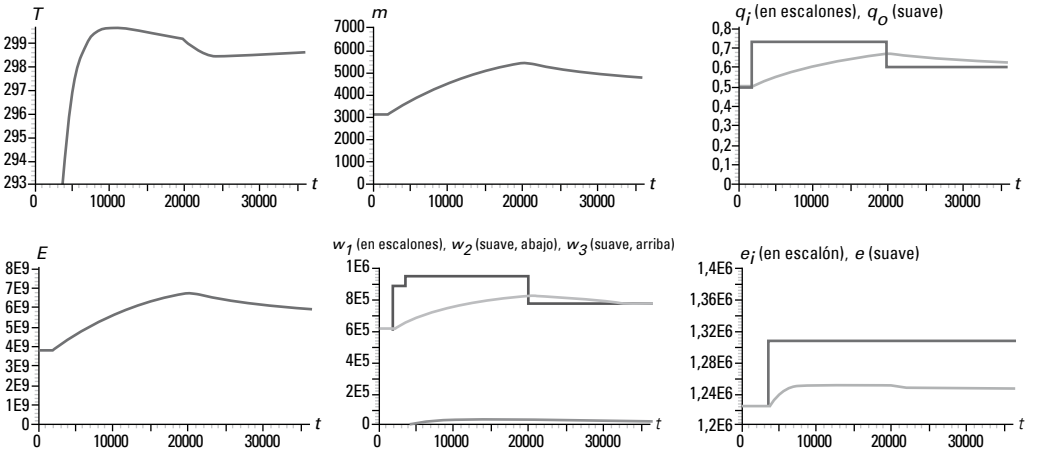


Fig. 5: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y (5) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la energía y la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8), (9), (1), (12), (17), (2) y (21), y derivando (5) e insertando (12), (17) y (21):

$$\frac{dE(t)}{dt} = q_i(t)\cdot e_i(t) - \left(\gamma_1\cdot\pi\cdot R^2 + \gamma_2\cdot\frac{\rho\cdot\pi\cdot R^3 + 2\cdot m(t)}{\rho\cdot R\cdot\varepsilon}\right)\cdot\left(\frac{E(t)}{c\cdot m(t)} - T_{amb}\right) - K\cdot\sqrt{\frac{m(t)}{\rho\cdot\pi\cdot R^2}}\cdot\frac{E(t)}{m(t)} \qquad \text{(a1)}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = q_i(t) - K\cdot\sqrt{\frac{m(t)}{\rho\cdot\pi\cdot R^2}} \qquad \text{(a2)}$$

Si nos interesa la evolución de la temperatura del agua que sale, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) e insertando (2):

$$T(t) = \frac{E(t)}{c\cdot m(t)} \qquad \text{(a3)}$$

BY NC ND

60.0

TEMPERATURAS A LO LARGO DE UN TUBO CILÍNDRICO CON EJE HORIZONTAL (MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un tubo que permanece lleno con agua caliente y la encauza horizontalmente hacia la derecha.

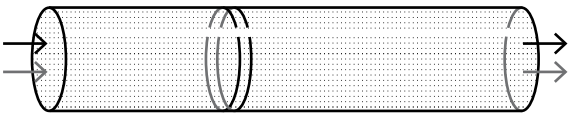


Fig. 1: Agua caliente en un tubo horizontal

Interesa predecir las evoluciones de las temperaturas del agua a lo largo del tubo (inventando en ésta rodajas ficticias, quietas, delgadas y presuntamente homogéneas por dentro, y numerándolas de izquierda a derecha).

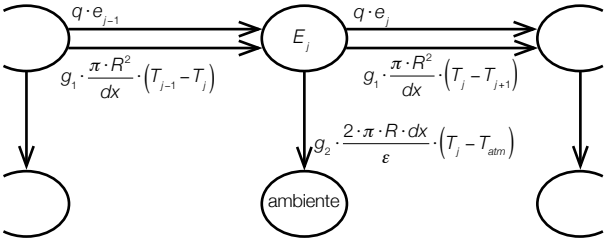


Fig. 2: Estructura espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

t es el tiempo, en [s].

$T_j(t)$ es la temperatura del agua dentro de la rodaja j, en [K]:

$$T_j(t) = \frac{e_j(t)}{c} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (1)$$ [58]

$e_j(t)$ es la energía específica del agua dentro de la rodaja j, en [J kg^{-1}]; c es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]; J es el número de rodajas:

$$e_j(t) = \frac{E_j(t)}{m} \quad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (2)$$

$$c = 4180 \qquad (3)$$

$$J = 7 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

$E_j(t)$ es la energía en el agua dentro de la rodaja j, en [J]; m es la masa en el agua dentro de cualquier rodaja, en [kg]:

[58] Simplificación suponiendo e_0=0.

CC BY NC ND

$$E_j(t) = \begin{cases} 579445 & \text{si } j = 1 \\ E_j(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} q(\tau)\cdot e_{j-1}(\tau) - q(\tau)\cdot e_j(\tau) \\ +g_1 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(T_{j-1}(\tau) - T_j(\tau)\right) \\ -g_1 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(T_j(\tau) - T_{j+1}(\tau)\right) \\ -g_2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx}{\varepsilon} \cdot \left(T_j(\tau) - T_{atm}\right) \end{pmatrix} \cdot d\tau & \text{si } 1 < j < J \\ 480955 & \text{si } j = J \end{cases}$$

(en los extremos, por ejemplo [59]) (5)

$$m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot dx \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{6}$$

$E_j(0)$ es la energía en el agua dentro de la rodaja j inicialmente, en [J]; $q(t)$ es el caudal de agua que viaja hacia la derecha por el tubo, en [kg s^{-1}]; g_1 es la conductividad térmica del agua, en [W m^{-1} K^{-1}]; R es el radio interno del tubo, en [m]; dx es el ancho de las rodajas, en [m]; g_2 es la conductividad térmica del tubo, en [W m^{-1} K^{-1}]; ε es el espesor de la pared del tubo, en [m]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$E_j(0) = 480955 \quad \text{si } 1 \le j \le J \text{ (por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 120 \\ 0.05 & \text{si } 120 \le t < 360 \\ 0 & \text{si } 360 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$g_1 = 0.62 \tag{9}$$

$$R = 0.025 \text{ (por ejemplo)} \tag{10}$$

$$dx = 0.20 \text{ (por ejemplo)} \tag{11}$$

$$g_2 = 0.80 \text{ (por ejemplo, si el tubo es de vidrio)} \tag{12}$$

$$\varepsilon = 0.0025 \text{ (por ejemplo)} \tag{13}$$

$$T_{atm} = 293 \text{ (por ejemplo)} \tag{14}$$

$$\rho = 1000 \tag{15}$$

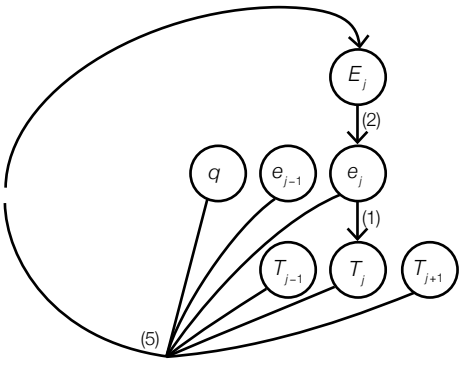


Fig. 3: Estructura causal para una rodaja (si 1<j<J, si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

[59] Esto supone potencias periféricas ocultas y sospechosamente complacientes.

BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (3), (4), (6), (7), (9), (10), (11), (12), (13), (14) y (15) no contienen ninguna variable que evoluciona: (8) contiene 1; (1) y (2), 2 cada una; (5), 7; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 4 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^2 \cdot 7^1$ (=28) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(15).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la energía en el recinto, sino que la energía depende por integración de todas las potencias.

(5) tiene la energía despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 7 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado (para la rodaja *j*, la *j-1* y la *j+1*) y, de los 28 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(15), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^2$ (=4).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j*, la *j-1* o la *j+1*), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(15).

Si nos interesa la evolución de T_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integración en (5); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar E_j inicial, *q, c, J,* g_1, *R, dx,* g_2, ε, T_{atm}, ρ, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(15) como:

$c = \ldots$ (3′)

$J = \ldots$ (4′)

$g_1 = \ldots$ (9′)

$R = \ldots$ (10′)

$dx = \ldots$ (11′)

$g_2 = \ldots$ (12′)

$\varepsilon = \ldots$ (13′)

$T_{atm} = \ldots$ (14′)

$\rho = \ldots$ (15′)

$E_{j,0} = \ldots$ si $1 < j < J$ (6′)

$m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot dx$ (7′)

$q_k = \ldots$ (8′)

$e_{j,k} = \dfrac{E_{j,k}}{m}$ si $1 \le j \le J$ (2′)

$T_{j,k} = \dfrac{e_{j,k}}{c}$ si $1 \le j \le J$ (1′)

CC BY NC ND

$$E_{j,k+1} = \begin{cases} .. & \text{si } j = 1 \\ E_{j,k} + \begin{pmatrix} q_k \cdot e_{j-1,k} - q_k \cdot e_{j,k} \\ +g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(T_{j-1.k} - T_{j,k}\right) \\ -g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R^2}{dx} \cdot \left(T_{j,k} - T_{j+1,k}\right) \\ -g_2 \cdot \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot dx}{\varepsilon} \cdot \left(T_{j,k} - T_{atm}\right) \end{pmatrix} \cdot dt & \text{si } 1 < j < J \\ ... & \text{si } j = J \end{cases} \qquad (5')$$

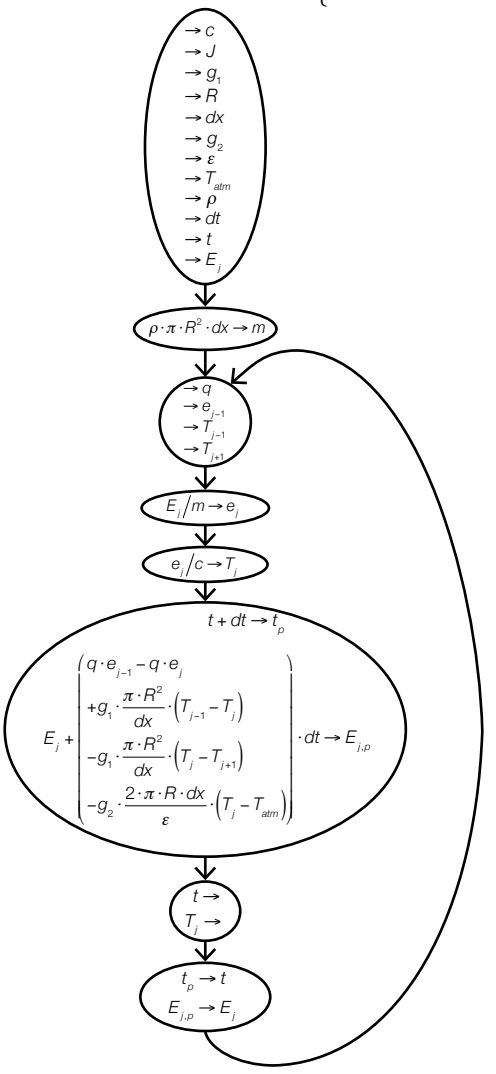


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación) para una rodaja (si 1<*j*<*J*)

BY NC ND

Los dibujos de la estructura espacial, la causal y la temporal para el tubo completo, son bastante enredados. Saltémoslos.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

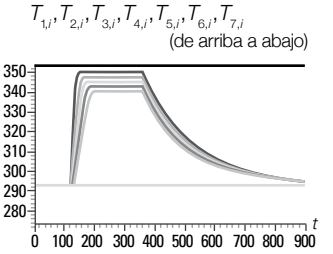


Fig. 5: Predicciones

En las predicciones, $T_1(t)$=353 y $T_J(t)$=293 por las imposiciones hechas en (5) a las rodajas 1 y J (=7) como condiciones de los bordes del tubo. Tales condiciones son dudables causalmente.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (5), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las energías. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de energía en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Además, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de potencias en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las energías. Y así sucesivamente.

$\underline{E}_j(t)$ es la concentración de energía en el volumen de la rodaja j, en [J m^{-3}]; $\underline{m}$ es la concentración de masa en el volumen de cualquier rodaja, en [kg m^{-3}]; $\underline{q}(t)$ es la concentración de caudal en el área de la superficie entre rodajas, en [kg s^{-1} m^{-2}]:

$$\underline{E}_j(t) = \frac{E_j(t)}{\pi \cdot R^2 \cdot dx} \qquad \text{si} \quad 1 < j < J \qquad \text{(a1)}$$

$$\underline{m} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 \cdot dx} \qquad \text{(a2)}\ ^{60}$$

$$\underline{q}(t) = \frac{q(t)}{\pi \cdot R^2} \qquad \text{(a3)}$$

Derivando (a1), insertando (5), (1) y (2), y usando (a1), (a2) y (a3):

[60] Como puede apreciarse en (6), aquí $\underline{m}$ coincide con ρ, porque la masa de la disolución dentro de cualquier rodaja abarca parejamente todo el volumen de ésta.

CC BY NC ND

$$\frac{d\underline{E}_j(t)}{dt} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\underline{E}_{j-1}(t) - 2 \cdot \underline{E}_j(t) + \underline{E}_{j+1}(t)}{(dx)^2} - \frac{\underline{q}(t)}{\rho} \cdot \frac{\underline{E}_j(t) - \underline{E}_{j-1}(t)}{dx}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R \cdot \varepsilon} \cdot \underline{E}_j(t) + \frac{2 \cdot g_2}{R \cdot \varepsilon} \cdot T_{atm} \qquad \text{si } 1 < j < J$$

Y, haciendo que *dx* tienda a 0:

$$\frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial t} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\underline{q}(t)}{\rho} \cdot \frac{\partial \underline{E}(x,t)}{\partial x}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R \cdot \varepsilon} \cdot \underline{E}(x,t) + \frac{2 \cdot g_2}{R \cdot \varepsilon} \cdot T_{atm} \qquad \text{si } 1 < j < J \qquad \text{(a4)}$$

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) y acomodando para *dx* tendiente a 0:

$$T(x,t) = \frac{\underline{E}(x,t)}{\rho \cdot c} \qquad \text{si } 0 < x < X \qquad \text{(a5)}$$

Por cierto, *X* es la longitud del tubo, en [m].

CC BY NC ND

61.0

AGUAS EN UN INTERCAMBIADOR DE CALOR (MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un intercambiador hecho con dos tubos cilíndricos, concéntricos y con ejes de simetría horizontal; por el tubo interno, viaja hacia la derecha agua inicialmente caliente y entre los tubos viaja hacia la izquierda agua inicialmente fría, en contra-flujo. Ambos tubos están llenos de agua siempre; la variación de la densidad del agua es insignificante; y las energías y potencias mecánicas, también.

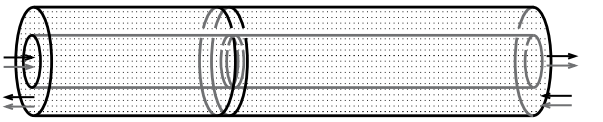


Fig. 1: Aguas en un intercambiador de calor

Interesa predecir las evoluciones de las temperaturas de las aguas a lo largo de ambos tubos (inventando en éstos rodajas ficticias, delgadas y presuntamente homogéneas, y numerándolas de izquierda a derecha).

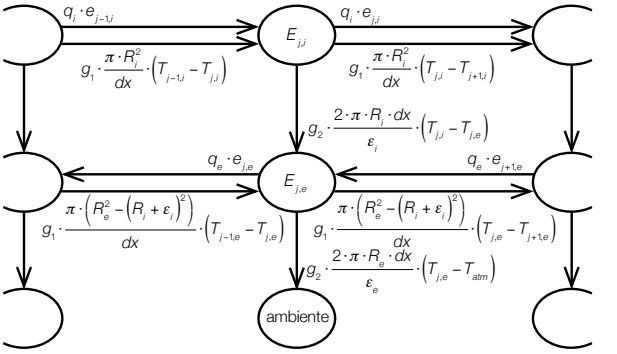


Fig. 2: Estructura espacial para una rodaja (si $1<j<J$)

t es el tiempo, en [s].

$T_{j,i}(t)$ es la temperatura del agua dentro del tubo interno de la rodaja j, en [K]; $T_{j,e}(t)$ es la temperatura del agua entre los tubos de la rodaja j, en [K]:

$$T_{j,i}\left(t\right) = \frac{e_{j,i}\left(t\right)}{c} \quad \text{si } 1 \le j \le J \qquad (1)\ ^{61}$$

$$T_{j,e}\left(t\right) = \frac{e_{j,e}\left(t\right)}{c} \quad \text{si } 1 \le j \le J \qquad (2)$$

$e_{j,i}(t)$ es la energía específica del agua dentro del tubo interno de la rodaja j, en [J kg^{-1}]; c es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]; J es el número de rodajas; $e_{j,e}(t)$

[61] Simplificación suponiendo e_0=0.

CC BY NC ND

es la energía específica del agua entre los tubos de la rodaja *j*, en [J kg^{-1}]:

$$e_{j,i}\left(t\right)=\frac{E_{j,i}\left(t\right)}{m_i} \quad \text{si} \quad 1\le j\le J \tag{3}$$

$$c=4180 \tag{4}$$

$$J=7 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$e_{j,e}\left(t\right)=\frac{E_{j,e}\left(t\right)}{m_e} \qquad \text{si} \quad 1<j<J \tag{6}$$

$E_{j,i}(t)$ es la energía en el agua dentro del tubo interno de la rodaja *j*, en [J]; m_i es la masa en el agua dentro del tubo interno de cualquier rodaja, en [kg]; $E_{j,e}(t)$ es la energía en el agua entre los tubos de la rodaja *j*, en [J]; m_e es la masa en el agua entre los tubos de cualquier rodaja, en [kg]:

$$E_{j,i}\left(t\right)=\begin{cases} 579445 & \text{si } j=1 \\ E_{j,i}\left(0\right)+\displaystyle\int_0^t \begin{pmatrix} q_i\left(\tau\right)\cdot e_{j-1,i}\left(\tau\right)-q_i\left(\tau\right)\cdot e_{j,i}\left(\tau\right) \\ +g_1\cdot\dfrac{\pi\cdot R_i^2}{dx}\cdot\left(T_{j-1,i}\left(\tau\right)-T_{j,i}\left(\tau\right)\right) \\ -g_1\cdot\dfrac{\pi\cdot R_i^2}{dx}\cdot\left(T_{j,i}\left(\tau\right)-T_{j+1,i}\left(\tau\right)\right) \\ -g_2\cdot\dfrac{2\cdot\pi\cdot R_i\cdot dx}{\varepsilon_i}\cdot\left(T_{j,i}\left(\tau\right)-T_{j,e}\left(\tau\right)\right) \end{pmatrix}\cdot d\tau & \text{si } 1<j<J \\ 480955 & \text{si } j=J \end{cases}$$

(en los extremos, por ejemplo) (7) [62]

$$m_i=\rho\cdot\pi\cdot R_i^2\cdot dx \quad \text{si} \quad 1\le j\le J \tag{8}$$

$$E_{j,e}\left(t\right)=\begin{cases} 1341825 & \text{si } j=1 \\ E_{j,e}\left(0\right)+\displaystyle\int_0^t \begin{pmatrix} q_e\left(\tau\right)\cdot e_{j+1,e}\left(\tau\right)-q_e\left(\tau\right)\cdot e_{j,e}\left(\tau\right) \\ +g_1\cdot\dfrac{\pi\cdot\left(R_e^2-\left(R_i+\varepsilon_i\right)^2\right)}{dx}\cdot\left(T_{j-1,e}\left(\tau\right)-T_{j,e}\left(\tau\right)\right) \\ -g_1\cdot\dfrac{\pi\cdot\left(R_e^2-\left(R_i+\varepsilon_i\right)^2\right)}{dx}\cdot\left(T_{j,e}\left(\tau\right)-T_{j+1,e}\left(\tau\right)\right) \\ +g_2\cdot\dfrac{2\cdot\pi\cdot R_i\cdot dx}{\varepsilon_i}\cdot\left(T_{j,i}\left(\tau\right)-T_{j,e}\left(\tau\right)\right) \\ -g_2\cdot\dfrac{2\cdot\pi\cdot R_e\cdot dx}{\varepsilon_e}\cdot\left(T_{j,e}\left(\tau\right)-T_{atm}\right) \end{pmatrix}\cdot d\tau & \text{si } 1<j<J \\ 1341825 & \text{si } j=J \end{cases}$$

(en los extremos, por ejemplo) (9) [63]

[62] Esto supone potencias periféricas ocultas y sospechosamente complacientes.
[63] Esto también supone potencias periféricas ocultas y sospechosamente complacientes.

CC BY NC ND

$$m_e = \rho \cdot \pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i \right)^2 \right) \cdot dx \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{10}$$

$E_{j,i}(0)$ es la energía en el agua dentro del tubo interno de la rodaja j inicialmente, en [J]; $q_i(t)$ es el caudal de agua que viaja hacia la derecha por el tubo interno, en [kg s^{-1}]; g_1 es la conductividad térmica del agua, en [W m^{-1} K^{-1}]; R_i es el radio interno del tubo interno, en [m]; dx es el ancho de las rodajas, en [m]; g_2 es la conductividad térmica de ambos tubos, en [W m^{-1} K^{-1}]; ε_i es el espesor de la pared del tubo interno, en [m]; ρ es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; $E_{j,e}(0)$ es la energía en el agua entre los tubos de la rodaja j inicialmente, en [kg]; $q_e(t)$ es el caudal que viaja hacia la izquierda entre los tubos, en [kg s^{-1}]; R_e es el radio interno del tubo externo, en [m]; ε_e es el espesor de la pared del tubo externo, en [m]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$E_{j,i}(0) = 480955 \quad \text{si } 1 \le j \le J \text{ (por ejemplo)} \tag{11}$$

$$q_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 120 \\ 0.05 & \text{si } 120 \le t < 360 \\ 0 & \text{si } 360 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$g_1 = 0.62 \tag{13}$$

$$R_i = 0.025 \text{ (por ejemplo)} \tag{14}$$

$$dx = 0.20 \text{ (por ejemplo)} \tag{15}$$

$$g_2 = 0.80 \text{ (por ejemplo, si los tubos son de vidrio)} \tag{16}$$

$$\varepsilon_i = 0.0025 \text{ (por ejemplo)} \tag{17}$$

$$\rho = 1000 \tag{18}$$

$$E_{j,e}(0) = 1341825 \quad \text{si } 1 \le j \le J \text{ (por ejemplo)} \tag{19}$$

$$q_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 240 \\ 0.03 & \text{si } 240 \le t < 480 \\ 0 & \text{si } 480 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$R_e = 0.050 \text{ (por ejemplo)} \tag{21}$$

$$\varepsilon_e = 0.0025 \text{ (por ejemplo)} \tag{22}$$

$$T_{atm} = 293 \text{ (por ejemplo)} \tag{23}$$

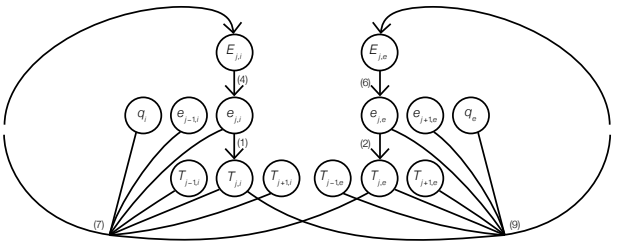


Fig. 3: Estructura causal para una rodaja (si $1<j<J$, si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

CC BY NC ND

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (8), (10), (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (21), (22) y (23) no contienen ninguna variable que evoluciona: (12) y (20) contienen 1 cada una; (1), (2), (3) y (6), 2; (7) y (8), 8; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 8 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^4 \cdot 8^2$ (=1024) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(23).

Pero no es cuerdo plantear que una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la energía en el recinto, sino que la energía depende por integración de todas las potencias.

(7) y (9) tienen energías despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 8 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado (para la rodaja *j*, la *j*-1 y la *j*+1) y, de los 8 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(23), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^2$ (=16).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 16 sistemas de ecuaciones restantes, 15 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j*, la *j*-1 o la *j*+1), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(23).

Si nos interesa la evolución de T_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (7) y (9); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar $E_{j,i}$ inicial, $E_{j,e}$ inicial, q_i, q_e, $e_{j-1,i}$, $e_{j+1,i}$, $e_{j-1,e}$, $e_{j+1,e}$, c, g_1, g_2, R_i, R_e, ε_i, ε_e, J, dx, ρ, T_{atm}, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(23) como:

$c = \ldots$ (4′)

$g_1 = \ldots$ (13′)

$g_2 = \ldots$ (16′)

$R_i = \ldots$ (14′)

$R_e = \ldots$ (21′)

$\varepsilon_i = \ldots$ (17′)

$\varepsilon_e = \ldots$ (22′)

$\rho = \ldots$ (18′)

$T_{atm} = \ldots$ (23′)

$J = \ldots$ (5′)

$dx = \ldots$ (15′)

$E_{j,i,0} = \ldots$ si $1 \le j \le J$ (11′)

$E_{j,e,0} = \ldots$ si $1 \le j \le J$ (19′)

$m_i = \rho \cdot \pi \cdot R_i^2 \cdot dx$ si $1 \le j \le J$ (8′)

$m_e = \rho \cdot \pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i \right)^2 \right) \cdot dx$ si $1 \le j \le J$ (10′)

CC BY NC ND

$$q_{i,k} = \ldots \tag{12'}$$

$$q_{e,k} = \ldots \tag{20'}$$

$$e_{j,i,k} = \frac{E_{j,i,k}}{m_i} \qquad \text{si } 1 \le j \le J \tag{3'}$$

$$e_{j,e,k} = \frac{E_{j,e,k}}{m_e} \qquad \text{si } 1 \le j \le J \tag{6'}$$

$$T_{j,i,k} = \frac{e_{j,i,k}}{c} \quad \text{si } 1 \le j \le J \tag{1'}$$

$$T_{j,e,k} = \frac{e_{j,e,k}}{c} \quad \text{si } 0 \le j \le J \tag{2'}$$

$$E_{j,i,k+1} = \begin{cases} \ldots & \text{si } j = 1 \\ E_{j,i,k} + \left(\begin{array}{l} q_{i,k} \cdot e_{j-1,i,k} - q_{i,k} \cdot e_{j,i,k} \\ +g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R_i^2}{dx} \cdot \left(T_{j-1,i,k} - T_{j,i,k} \right) \\ -g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot R_i^2}{dx} \cdot \left(T_{j,i,k} - T_{j+1,i,k} \right) \\ -g_2 \cdot \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot dx}{\varepsilon_i} \cdot \left(T_{j,i,k} - T_{j,e,k} \right) \end{array} \right) \cdot dt & \text{si } 1 < j < J \\ \ldots & \text{si } j = J \end{cases} \tag{7'}$$

$$E_{j,e,k+1} = \begin{cases} \ldots & \textit{si } j = 1 \\ E_{j,e,k} + \left(\begin{array}{l} q_{e,k} \cdot e_{j+1,e,k} - q_{e,k} \cdot e_{j,e,k} \\ +g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i \right)^2 \right)}{dx} \cdot \left(T_{j-1,e,k} - T_{j,e,k} \right) \\ -g_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i \right)^2 \right)}{dx} \cdot \left(T_{j,e,k} - T_{j+1,e,k} \right) \\ +g_2 \cdot \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot dx}{\varepsilon_i} \cdot \left(T_{j,i,k} - T_{j,e,k} \right) \\ -g_2 \cdot \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R_e \cdot dx}{\varepsilon_e} \cdot \left(T_{j,e,k} - T_{atm} \right) \end{array} \right) \cdot dt & \textit{si } 1 < j < J \\ \ldots & \textit{si } j = J \end{cases} \tag{9'}$$

CC BY NC ND

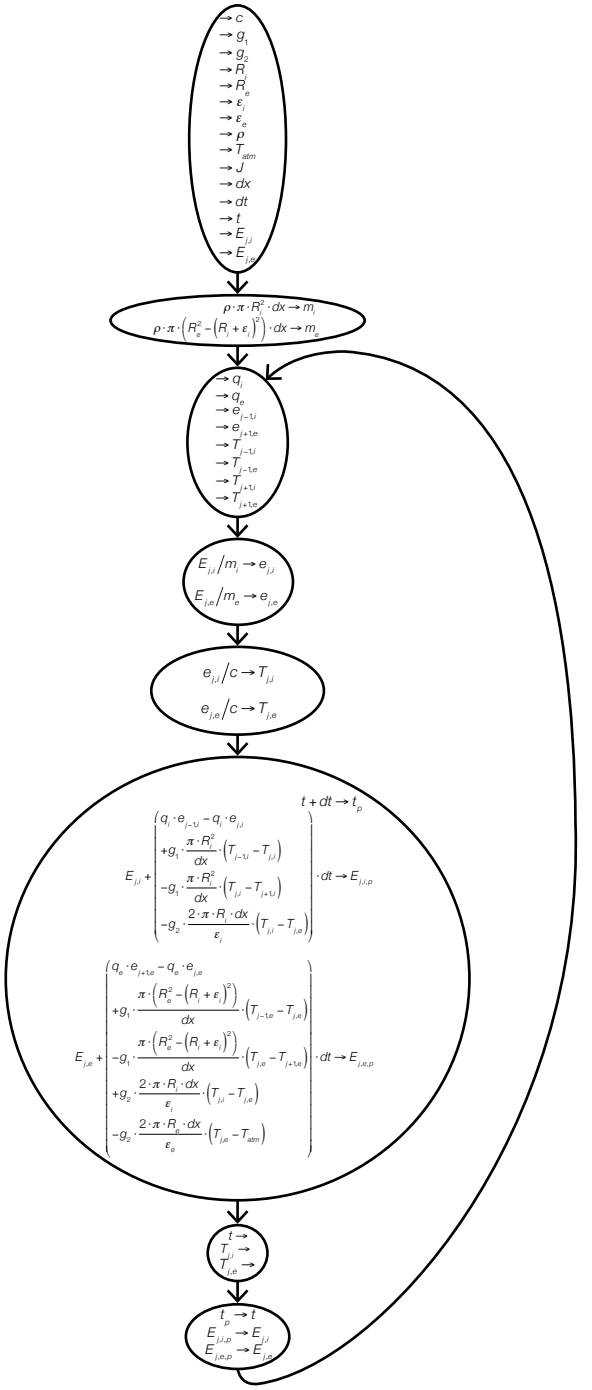


Fig. 4: Estructura temporal (de método de computación) para una rodaja (si $1<j<J$)

CC BY NC ND

Los dibujos de la estructura espacial, la causal y la temporal para el intercambiador completo, son bastante enredados. Saltémoslos.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 5.

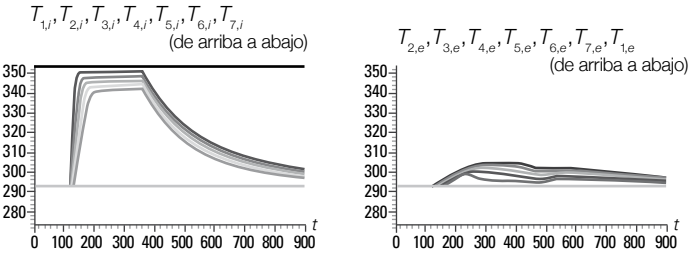


Fig. 5: Predicciones

En las predicciones, $T_{1,i}(t)$=353 y $T_{7,i}(t)=T_{7,e}(t)=T_{1,e}(t)$= 293=$T_{atm}$ por las imposiciones hechas en (4) y (6) a las rodajas 1 y J (=7) como condiciones de los bordes del intercambiador. Tales condiciones son dudables causalmente.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7) y (9), se podría intentar ecuaciones diferenciales para las energías. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de energía en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Además, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de potencias en las áreas de las fronteras a través de las que viajan las energías. Y así sucesivamente.

$\underline{E}_{j,i}(t)$ es la concentración de energía en el volumen dentro del tubo interior de la rodaja j, en [J m^{-3}]; $\underline{E}_{j,e}(t)$ es la concentración de energía en el volumen entre los tubos de la rodaja j, en [J m^{-3}]:

$$\underline{E}_{j,i}(t) = \frac{E_{j,i}(t)}{\pi \cdot R_i^2 \cdot dx} \qquad \text{si } 1 \le j \le J \tag{a1}$$

$$\underline{E}_{j,i}(t) = \frac{E_{j,i}(t)}{\pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i\right)^2\right) \cdot dx} \qquad \text{si } 1 \le j \le J \tag{a2}$$

$$\underline{q}_i(t) = \frac{q_i(t)}{\pi \cdot R^2} \tag{a3}$$

$$\underline{q}_i(t) = \frac{q_i(t)}{\pi \cdot R_i^2} \tag{a4}$$

$$\underline{q}_e(t) = \frac{q_e(t)}{\pi \cdot \left(R_e^2 - \left(R_i + \varepsilon_i\right)^2\right)} \tag{a5}$$

Derivando (a1), insertando (7), (1), (2), (3) y (6), y usando (a1), (a2) y (a3); y derivando (a2), insertando (9), (2), (1), (6) y (4), y usando (a4), (a2) y (a1):

CC BY NC ND

$$\frac{d\underline{E}_{j,i}(t)}{dt} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\underline{E}_{j-1,i}(t) - 2 \cdot \underline{E}_{j,i}(t) + \underline{E}_{j+1,i}(t)}{(dx)^2} - \frac{\underline{q}_i(t)}{\rho} \cdot \frac{\underline{E}_{j,i}(t) - \underline{E}_{j-1,i}(t)}{dx}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R_i \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_{j,i}(t) + \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R_i \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_{j,e}(t) \qquad \text{si } 1 < j < J$$

$$\frac{d\underline{E}_{j,e}(t)}{dt} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\underline{E}_{j-1,e}(t) - 2 \cdot \underline{E}_{j,e}(t) + \underline{E}_{j+1,e}(t)}{(dx)^2} + \frac{\underline{q}_e(t)}{\rho} \cdot \frac{\underline{E}_{j+1,e}(t) - \underline{E}_{j,e}(t)}{dx}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot \left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right)} \cdot \left(\frac{R_i}{\varepsilon_i} + \frac{R_e}{\varepsilon_e}\right) \cdot \underline{E}_{j,e}(t) + \frac{2 \cdot g_2 \cdot R_i}{\rho \cdot c \cdot \left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right) \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_{j,i}(t)$$

$$+ \frac{2 \cdot g_2 \cdot R_e}{\left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right) \cdot \varepsilon_e} \cdot T_{atm} \qquad \text{si } 1 < j < J$$

Y haciendo que *dx* tienda a 0:

$$\frac{\partial \underline{E}_i(x,t)}{\partial t} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\underline{q}_i(t)}{\rho} \cdot \frac{\partial \underline{E}_i(x,t)}{\partial x}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R_i \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_i(x,t) + \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot R_i \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_e(x,t) \qquad \text{si } 0 < x < X \qquad \text{(a6)}$$

$$\frac{\partial \underline{E}_e(x,t)}{\partial t} = \frac{g_1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}_e(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\underline{q}_e(t)}{\rho} \cdot \frac{\partial \underline{E}_e(x,t)}{\partial x}$$

$$- \frac{2 \cdot g_2}{\rho \cdot c \cdot \left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right)} \cdot \left(\frac{R_i}{\varepsilon_i} + \frac{R_e}{\varepsilon_e}\right) \cdot \underline{E}_e(x,t) + \frac{2 \cdot g_2 \cdot R_i}{\rho \cdot c \cdot \left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right) \cdot \varepsilon_i} \cdot \underline{E}_i(x,t) \qquad \text{(a7)}$$

$$+ \frac{2 \cdot g_2 \cdot R_e}{\left(R_e^2 - (R_i + \varepsilon_i)^2\right) \cdot \varepsilon_e} \cdot T_{atm} \qquad \text{si } 0 < x < X$$

Si nos interesan las evoluciones de las temperaturas, aceptando (a1) y (a2), considerando (1) y (2), insertando (4) y (6), y acomodando para *dx* tendiente a 0:

$$T_i(x,t) = \frac{\underline{E}_i(x,t)}{\rho \cdot c} \qquad \text{si } 0 < x < X \qquad \text{(a8)}$$

$$T_e(x,t) = \frac{\underline{E}_e(x,t)}{\rho \cdot c} \qquad \textit{si } 0 < x < X \qquad \text{(a9)}$$

Por cierto, *X* es la longitud del tubo, en [m].

CC BY NC ND

62.0

UN APAGADO DE CAL (MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Para aumentar el potencial de hidrógeno (pH) en procesos mineralógicos como la flotación del cobre, se puede usar lechadas de cal apagada ($Ca(OH)_2$) que se fabrican haciendo reaccionar cal viva (CaO) con agua (H_2O) en exceso.

La fabricación se realiza llevando a un estanque (mediante una correa transportadora) un caudal de cal viva y (mediante una cañería) otro de agua mucho mayor que el requerido por la estequiometría, de manera que el contenido del estanque resulta ser una disolución acuosa con poca cal apagada como soluto, y un aspecto lechoso que justifica el nombre de lechada.

La reacción es:

$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$$

y es exotérmica y muy rápida (en comparación con el tiempo de residencia en el estanque), de manera que la cal viva dura muy poco y el contenido del estanque se calienta (sin experimentar evaporaciones significativas).

Imaginemos, pues, un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical; con cal viva y agua que entran por arriba reaccionando rápidamente, reposan como lechada de cal apagada, y salen por abajo.

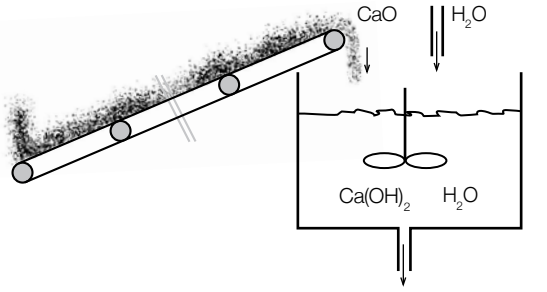


Fig.1: Cal viva, agua y cal apagada en un apagado de cal

Interesa predecir las evoluciones del nivel de la disolución dentro del estanque, la fracción de masa de cal apagada (soluto) en la disolución dentro del estanque, y la temperatura de la disolución dentro del estanque.

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel de la disolución dentro del estanque, en [m]; $\gamma(t)$ es la fracción de masa de cal apagada en la disolución, en [kg (de cal apagada) kg^{-1} (de disolución)]; $T(t)$ es la temperatura de la disolución, en [K]:

$$h(t) \approx \frac{m_{H2O}(t)}{\rho_{H2O} \cdot \pi \cdot R^2} \qquad (1)$$

CC BY NC ND

$$\gamma\left(t\right)=\frac{m_{Ca(OH)2}\left(t\right)}{m_{Ca(OH)2}\left(t\right)+m_{H2O}\left(t\right)} \tag{2}$$

$$T\left(t\right)=\frac{E\left(t\right)}{c_{Ca(OH)2}\cdot m_{Ca(OH)2}\left(t\right)+c_{H2O}\cdot m_{H2O}\left(t\right)} \tag{3}$$

$m_{H2O}(t)$ es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ_{H2O} es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; R es el radio del estanque, en [m]; $m_{Ca(OH)2}(t)$ es la masa en la cal apagada dentro del estanque, en [kg]; $E(t)$ es la energía en la disolución, en [J]; $c_{Ca(OH)2}$ es el calor específico de la cal apagada, en [J kg^{-1} K^{-1}]; c_{H2O} es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$m_{H2O}\left(t\right)=m_{H2O}\left(0\right)+\int_0^t\left(q_{H2O,i,n}\left(\tau\right)-q_{H2O,o}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$$\rho_{H2O}=1000 \tag{5}$$

$$R=1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$m_{Ca(OH)2}\left(t\right)=m_{Ca(OH)2}\left(0\right)+\int_0^t\left(q_{Ca(OH)2,i,n}\left(\tau\right)-q_{Ca(OH)2,o}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{7}$$

$$E\left(t\right)=E\left(0\right)+\int_0^t\left(w_{CaO,i}\left(\tau\right)+w_{H2O,i}\left(\tau\right)+w_{reac}\left(\tau\right)-w_{Ca(OH)2,o}\left(\tau\right)-w_{H2O,o}\left(\tau\right)-w_c\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{8}$$

$$c_{Ca(OH)2}=1180 \tag{9}$$

$$c_{H2O}=4180 \tag{10}$$

$m_{H2O}(0)$ es la masa en el agua dentro del estanque inicialmente, en [kg]; $q_{H2O,i,n}(t)$ es el caudal neto de agua que viaja del ambiente al estanque (descontando el agua que reacciona con la cal viva), por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{H2O,o}(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $m_{Ca(OH)2}(0)$ es la masa de cal apagada dentro del estanque inicialmente, en [kg]; $q_{Ca(OH)2,i,n}(t)$ es el caudal neto de cal apagada que viaja del ambiente al estanque (contando la cal viva y el agua que reacciona con ella), por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{Ca(OH)2,o}(t)$ es el caudal de cal apagada que viaja del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $E(0)$ es la energía en la disolución inicialmente, en [J]; $w_{CaO,i}(t)$ es la potencia de la correa al estanque, con la cal viva, en [W]; $w_{H2O,i(}t)$ es la potencia del ambiente al estanque, con el agua, en [W]; $w_{reac}(t)$ es la potencia de las configuraciones moleculares de la cal viva y el agua a la lechada, por reacción, en [W]; $w_{Ca(OH)2,o}(t)$ es la potencia del estanque al ambiente, con la cal apagada, en [W]; $w_{H2O,o}(t)$ es la potencia del estanque al ambiente, con el agua, en [W]; $w_c(t)$ es la potencia del estanque al ambiente, por las paredes y la superficie de la lechada, en [W]:

$$m_{H2O}\left(0\right)=4000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$q_{H2O,i,n}\left(t\right)=q_{H2O,i}\left(t\right)-q_{CaO,i}\left(t\right)\cdot\frac{\mu_{H2O}}{\mu_{CaO}} \tag{12}$$

CC BY NC ND

$$q_{H2O,o}\left(t\right) = q_o\left(t\right) \cdot \frac{m_{H2O}\left(t\right)}{m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + m_{H2O}\left(t\right)} \quad (13)$$

$$m_{Ca(OH)2}\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$q_{Ca(OH)2,i,n}\left(t\right) = q_{CaO,i}\left(t\right) \cdot \frac{\mu_{Ca(OH)2}}{\mu_{CaO}} \quad (15)$$

$$q_{Ca(OH)2o}\left(t\right) = q_o\left(t\right) \cdot \frac{m_{Ca(OH)2}\left(t\right)}{m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + m_{H2O}\left(t\right)} \quad (16)$$

$$E\left(0\right) = 4.8153 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

$$w_{CaO,i}\left(t\right) = q_{CaO,i}\left(t\right) \cdot e_{CaO,i}\left(t\right) \quad (18)$$

$$w_{H2O,i}\left(t\right) = q_{H2O,i}\left(t\right) \cdot e_{H2O,i}\left(t\right) \quad (19)$$

$$w_{reac}\left(t\right) = \lambda_{CaO} \cdot q_{CaO,i}\left(t\right) \quad (20)$$

$$w_{Ca(OH)2,o}\left(t\right) = q_o\left(t\right) \cdot \frac{E\left(t\right)}{m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + m_{H2O}\left(t\right)} \cdot \frac{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2}\left(t\right)}{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + c_{H2O} \cdot m_{H2O}\left(t\right)} \quad (21)$$

$$w_{H2O,o}\left(t\right) = q_o\left(t\right) \cdot \frac{E\left(t\right)}{m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + m_{H2O}\left(t\right)} \cdot \frac{c_{H2O} \cdot m_{H2O}\left(t\right)}{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2}\left(t\right) + c_{H2O} \cdot m_{H2O}\left(t\right)} \quad (22)$$

$$w_c\left(t\right) = \left(k_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot h\left(t\right)}{\varepsilon} + \frac{\pi \cdot R^2}{\varepsilon} \right) + k_2 \cdot \pi \cdot R^2 \right) \cdot \left(T\left(t\right) - T_{atm}\left(t\right) \right) \quad (23)$$

$q_{H2O,i}(t)$ es el caudal completo de agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; $q_{CaO,i}(t)$ es el caudal de cal viva que viaja de la correa al estanque, por arriba, en [kg s^{-1}]; μ_{H2O} es la masa molecular del agua, en [kg]; μ_{CaO} es la masa molecular de la cal viva, en [kg]; $q_o(t)$ es el caudal total del estanque al ambiente, por abajo, en [kg s^{-1}]; $\mu_{Ca(OH)2}$ es la masa molecular de la cal apagada, en [kg]; $e_{CaO,i}(t)$ es la energía específica de la cal viva que viaja de la correa al estanque, por arriba, en [J kg^{-1}]; $e_{H2O,i}(t)$ es la energía específica del agua que viaja del ambiente al estanque, por arriba, en [J kg^{-1}]; λ_{CaO} es el poder calorífico de la cal viva (al combinarse con agua), en [J kg^{-1}]; k_1 es la conductividad térmica de las paredes del estanque, en [W m^{-1} K^{-1}]; ε es el espesor de las paredes del estanque, en [m]; k_2 es un coeficiente relativo a la conducción térmica entre la superficie de la lechada y el aire, en [W m^{-2} K^{-1}]; $T_{atm}(t)$ es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$q_{H2O,i}\left(t\right) = 1.12 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (24)$$

$$q_{CaO,i}\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < 120 \\ 0.07 & \text{si} \quad 120 \le t < 1920 \\ 0 & \text{si} \quad 1920 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (25)$$

CC BY NC ND

$$\mu_{H2O} = 2.99 \cdot 10^{-26} \quad (26)$$

$$\mu_{CaO} = 9.31 \cdot 10^{-26} \quad (27)$$

$$q_o\left(t\right) \approx K \cdot \sqrt{\rho_{H2O} \cdot g \cdot h\left(t\right)} \quad (28)$$

$$\mu_{Ca(OH)2} = 12.30 \cdot 10^{-26} \quad (29)$$

$$e_{CaO,i}\left(t\right) = 253500 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (30)$$

$$e_{H2O,i}\left(t\right) = 1204000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (31)$$

$$\lambda_{CaO} = 1136000 \quad (32)$$

$$k_1 = 35 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (33)$$

$$\varepsilon = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (34)$$

$$k_2 = 50 \quad (35)$$

$$T_{atm}\left(t\right) = 288 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (36)$$

K es el coeficiente de paso de la lechada, por abajo, en [$kg^{-1/2}$ $m^{-1/2}$]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]:

$$K = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (37)$$

$$g = 9.81 \quad (38)$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (5), (6), (9), (10), (11), (14), (17), (26), (27), (29), (32), (33), (34), (35), (37) y (38) no contienen ninguna variable que evoluciona: (24), (25), (30), (31) y (36) contienen 1 cada una; (1), (12), (15), (20) y (28) contienen 2; (2), (4), (7), (18) y (19), 3; (3), (13), (16) y (23), 4; (21) y (22), 5; (8), 7; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 22 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ (=348364800) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(38).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o la energía en el recinto, sino que la masa o la energía depende por integración de todos los caudales o todas las potencias.

(4) y (7) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; (8) tiene una energía; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 348364800 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(38), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^8 \cdot 2^5 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^2$ (=5529600).

Pero, causalmente, no es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más ecuaciones.

De los 5529600 sistemas de ecuaciones restantes, 5529599 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas, y pese a

CC BY NC ND

la compactación de la causalidad hecha tras (3), (15), (21) y (22)): (1)-(38).

Si nos interesan las evoluciones de h, γ y T; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (4), (7) y (8); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_{H2O} inicial, $m_{Ca(OH)2}$ inicial, E inicial, $q_{H2O,i}$, $q_{CaO,i}$, $e_{H2O,i}$, $e_{CaO,i}$, k_1, ε, K, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(38) como:

$$R = \ldots \tag{6'}$$

$$k_1 = \ldots \tag{33'}$$

$$\varepsilon = \ldots \tag{34'}$$

$$K = \ldots \tag{37'}$$

$$m_{H2O,0} = \ldots \tag{11'}$$

$$m_{Ca(OH)2,0} = \ldots \tag{14'}$$

$$E_0 = \ldots \tag{17'}$$

$$\rho_{H2O} = 1000 \tag{5'}$$

$$c_{Ca(OH)2} = 1180 \tag{9'}$$

$$c_{H2O} = 4180 \tag{10'}$$

$$\mu_{H2O} = 2.99 \cdot 10^{-26} \tag{26'}$$

$$\mu_{CaO} = 9.31 \cdot 10^{-26} \tag{27'}$$

$$\mu_{Ca(OH)2} = 12.30 \cdot 10^{-26} \tag{29'}$$

$$\lambda_{CaO} = 1136000 \tag{32'}$$

$$k_2 = 50 \tag{35'}$$

$$g = 9.81 \tag{38'}$$

$$q_{H2O,i,k} = \ldots \tag{24'}$$

$$q_{CaO,i,k} = \ldots \tag{25'}$$

$$e_{CaO,i,k} = \ldots \tag{30'}$$

$$e_{H2O,i,k} = \ldots \tag{31'}$$

$$T_{atm,k} = \ldots \tag{36'}$$

$$h_k = \frac{m_{H2O,k}}{\rho_{H2O} \cdot \pi \cdot R^2} \tag{1'}$$

$$\gamma_k = \frac{m_{Ca(OH)2,k}}{m_{Ca(OH)2,k} + m_{H2O,k}} \tag{2'}$$

$$T_k = \frac{E_k}{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2,k} + c_{H2O} \cdot m_{H2O,k}} \tag{3'}$$

CC BY NC ND

$$q_{o,k} = K \cdot \sqrt{\rho_{H2O} \cdot g \cdot h_k} \tag{28'}$$

$$q_{H2O,i,n,k} = q_{H2O,i,k} - q_{CaO,i,k} \cdot \frac{\mu_{H2O}}{\mu_{CaO}} \tag{12'}$$

$$q_{H2O,o,k} = q_{o,k} \cdot \frac{m_{H2O,k}}{m_{Ca(OH)2,k} + m_{H2O,k}} \tag{13'}$$

$$q_{Ca(OH)2,i,n,k} = q_{CaO,i,k} \cdot \frac{\mu_{Ca(OH)2}}{\mu_{CaO}} \tag{15'}$$

$$q_{Ca(OH)2o,k} = q_{o,k} \cdot \frac{m_{Ca(OH)2,k}}{m_{Ca(OH)2,k} + m_{H2O,k}} \tag{16'}$$

$$w_{CaO,i,k} = q_{CaO,i,k} \cdot e_{CaO,i,k} \tag{18'}$$

$$w_{H2O,i,k} = q_{H2O,i,k} \cdot e_{H2O,i,k} \tag{19'}$$

$$w_{reac,k} = \lambda_{CaO} \cdot q_{CaO,i,k} \tag{20'}$$

$$w_{Ca(OH)2,o,k} = q_{o,k} \cdot \frac{E_k}{m_{Ca(OH)2,k} + m_{H2O,k}} \cdot \frac{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2,k}}{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2,k} + c_{H2O} \cdot m_{H2O,k}} \tag{21'}$$

$$w_{H2O,o,k} = q_{o,k} \cdot \frac{E_k}{m_{Ca(OH)2,k} + m_{H2O,k}} \cdot \frac{c_{H2O} \cdot m_{H2O,k}}{c_{Ca(OH)2} \cdot m_{Ca(OH)2,k} + c_{H2O} \cdot m_{H2O,k}} \tag{22'}$$

$$w_{c,k} = \left(k_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot h_k}{\varepsilon} + \frac{\pi \cdot R^2}{\varepsilon} \right) + k_2 \cdot \pi \cdot R^2 \right) \cdot \left(T_k - T_{atm,k} \right) \tag{23'}$$

$$m_{H2O,k+1} = m_{H2O,k} + \left(q_{H2O,i,n,k} - q_{H2O,o,k} \right) \cdot dt \tag{4'}$$

$$m_{Ca(OH)2,k+1} = m_{Ca(OH)2,k} + \left(q_{Ca(OH)2,i,n,k} - q_{Ca(OH)2,o,k} \right) \cdot dt \tag{7'}$$

$$E_{k+1} = E_k + \left(w_{CaO,i,k} + w_{H2O,i,k} + w_{reac,k} - w_{Ca(OH)2,o,k} - w_{H2O,o,k} - w_{c,k} \right) \cdot dt \tag{8'}$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante largo. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

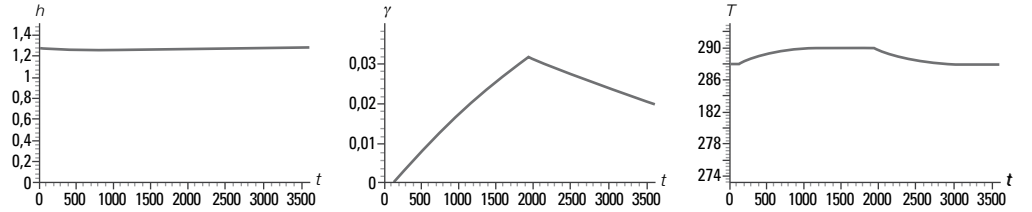


Fig. 2: Predicciones

BY NC ND

Aprovechando el carácter de (4), (7) y (8) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la energía y la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (12), (13), (28) y (1); derivando (7) e insertando (15), (16), (28) y (1); y derivando (8) e insertando (18), (19), (20), (21), (22), (23), (28), (1) y (3):

$$\frac{dm_{H2O}(t)}{dt} = q_{H2O,i}(t) - q_{CaO,i}(t)\cdot\frac{\mu_{H2O}}{\mu_{CaO}} - K\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m_{H2O}(t)}{\pi\cdot R^2}}\cdot\frac{m_{H2O}(t)}{m_{Ca(OH)2}(t)+m_{H2O}(t)} \tag{a1}$$

$$\frac{dm_{Ca(OH)2}(t)}{dt} = q_{CaO,i}(t)\cdot\frac{\mu_{Ca(OH)2}}{\mu_{CaO}} - K\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m_{H2O}(t)}{\pi\cdot R^2}}\cdot\frac{m_{Ca(OH)2}(t)}{m_{Ca(OH)2}(t)+m_{H2O}(t)} \tag{a2}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = q_{CaO,i}(t)\cdot\left(e_{CaO,i}(t)+\lambda_{CaO}\right) + q_{H2O,i}(t)\cdot e_{H2O,i}(t) - K\cdot\sqrt{\frac{g\cdot m_{H2O}(t)}{\pi\cdot R^2}}\cdot\frac{E(t)}{m_{Ca(OH)2}(t)+m_{H2O}(t)}$$

$$-\left(\left(k_1\cdot\left(\frac{2\cdot m_{H2O}(t)}{\varepsilon\cdot\rho_{H2O}\cdot R}+\frac{\pi\cdot R^2}{\varepsilon}\right)+k_2\cdot\pi\cdot R^2\right)\cdot\left(\frac{E(t)}{c_{Ca(OH)2}\cdot m_{Ca(OH)2}(t)+c_{H2O}\cdot m_{H2O}(t)}-T_{atm}(t)\right)\right) \tag{a3}$$

Si nos interesan las evoluciones del nivel de la disolución, la fracción de masa de cal apagada en la disolución, y la temperatura de la disolución dentro del estanque, aceptando (a1), (a2) y (a3), y considerando (1), (2) y (3):

$$h(t) = \frac{m_{H2O}(t)}{\rho_{H2O}\cdot\pi\cdot R^2} \tag{a4}$$

$$\gamma(t) = \frac{m_{Ca(OH)2}(t)}{m_{Ca(OH)2}(t)+m_{H2O}(t)} \tag{a5}$$

$$T(t) = \frac{E(t)}{c_{Ca(OH)2}\cdot m_{Ca(OH)2}(t)+c_{H2O}\cdot m_{H2O}(t)} \tag{a6}$$

CC BY NC ND

63.0

UNA CALDERA
(MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos una caldera cilíndrica con eje de simetría vertical, en cuyo hogar se quema rápidamente petróleo y aire y, rodeado por los gases calientes producidos por la combustión, se encuentra un estanque cilíndrico también con eje de simetría vertical y con agua que entra por arriba, reposa y sale por abajo, a través de un orificio.

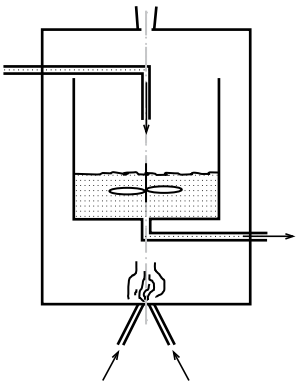


Fig. 1: Una caldera

Interesa predecir la evolución de la temperatura del agua que sale, suponiendo que la duración de la reacción química de combustión (exotérmica), la evaporación del agua y las potencias mecánicas se pueden considerar irrelevantes, y que el caudal de aire entrante es regulado por un carburador que lo mantiene en proporción estequiométrica respecto al petróleo.

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$T_a(t)$ es la temperatura del agua dentro del estanque y saliendo de él, en [K]:

$$T_a\left(t\right) = \frac{e_a\left(t\right)}{c_a} \tag{1}$$

c_a es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]; $e_a(t)$ es la energía específica del agua dentro del estanque, en [J kg^{-1}]:

$$e_a\left(t\right) = \frac{E_a\left(t\right)}{m_a\left(t\right)} \tag{2}$$

$$c_a = 4180 \tag{3}$$

CC BY NC ND

$E_a(t)$ es la energía en el agua dentro del estanque, en [J]; $m_a(t)$ es la masa en esa agua, en [kg]:

$$E_a(t) = E_a(0) + \int_0^t \left(w_{ia}(\tau) + w_{ga}(\tau) - w_{ao}(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (4)$$

$$m_a(t) = m_a(0) + \int_0^t \left(q_{ia}(\tau) - q_{ao}(\tau) \right) \cdot d\tau \quad (5)$$

$E_a(0)$ es la energía en el agua inicialmente, en [J]; $w_{ia}(t)$ es la potencia del ambiente al estanque, con el agua, en [W]; $w_{ga}(t)$ es la potencia del hogar al estanque, por las paredes de éste, en [W]; $w_{ao}(t)$ es la potencia del estanque al ambiente, con el agua, en [W]; $m_a(0)$ es la masa en el agua inicialmente, en [kg]; $q_{ia}(t)$ es el caudal de agua que viaja del ambiente al estanque, en [kg s^{-1}]; $q_{ao}(t)$ es el caudal de agua que viaja del estanque al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$E_a(0) = 1204000000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$w_{ia}(t) = q_{ia}(t) \cdot e_{ia}(t) \quad (7)$$

$$w_{ga}(t) = \left(\kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_e \cdot h_a(t) + \pi \cdot R_e^2}{\varepsilon_e} + \kappa_2 \cdot \pi \cdot R_e^2 \right) \cdot \left(T_g(t) - T_a(t) \right) \quad (8)$$

$$w_{ao}(t) = q_{ao}(t) \cdot e_a(t) \quad (9)$$

$$m_a(0) = 1000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (10)$$

$$q_{ia}(t) = \begin{cases} 1.12 & \text{si} \quad 0 \le t < 1800 \\ 0.84 & \text{si} \quad 1800 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (11)$$

$$q_{ao}(t) = K_a \cdot \sqrt{P_g(t) + \rho_a \cdot g \cdot h_a(t) - P_{atm}} \quad (12)$$

$e_{ia}(t)$ es la energía específica del agua entrante, en [J kg^{-1}]; κ_1 es la conductividad térmica de las paredes del estanque, en [W m^{-1} K^{-1}]; R_e es el radio transversal del estanque, en [m]; $h_a(t)$ es el nivel del agua del estanque, en [m]; ε_e es el espesor de las paredes del estanque, en [m]; κ_2 es un coeficiente relativo a la conducción térmica entre los gases y el agua, en [W m^{-2} K^{-1}]; $T_g(t)$ es la temperatura de los gases del hogar, en [K]; K_a es un coeficiente de salida del agua, en [$kg^{1/2}$ $m^{1/2}$]; $P_g(t)$ es la presión de los gases, en [N m^{-2}]; ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]:

$$e_{ia}(t) = 1204000$$
(por ejemplo, si se trata de agua con temperatura cercana a T_{atm}) (13)

$$\kappa_1 = 35 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$R_e = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$h_a(t) = \frac{V_a(t)}{\pi \cdot R_e^2} \quad (16)$$

CC BY NC ND

$$\varepsilon_e = 0.003 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$\kappa_2 = 50 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$T_g(t) = \frac{e_g(t)}{c_g} \tag{19}$$

$$K_a = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$P_g(t) = \frac{k_B}{c_g \cdot \mu_g} \cdot \frac{e_g(t)}{v_g(t)} \tag{21}$$

$$\rho_a = 1000 \tag{22}$$

$$g = 9.81 \tag{23}$$

$$P_{atm} = 101300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$V_a(t)$ es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]; c_g es el calor específico de los gases del hogar, en [J kg^{-1} K^{-1}]; $e_g(t)$ es la energía específica de esos gases, en [J kg^{-1}]; k_B es la constante de Boltzmann, en [J K^{-1}]; μ_g es la masa molecular media de los gases, en [kg]; $v_g(t)$ es el volumen específico de los gases, en [m^3 kg^{-1}]:

$$V_a(t) = \frac{m_a(t)}{\rho_a} \tag{25}$$

$$e_g(t) = \frac{E_g(t)}{m_g(t)} \tag{26}$$

$$c_g = 2090 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \tag{28}$$

$$\mu_g = 7.31 \cdot 10^{-26} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$v_g(t) = \frac{\pi \cdot R_h^2 \cdot H_T - V_a(t)}{m_g(t)} \tag{30}$$

$E_g(t)$ es la energía en los gases del hogar, en [J]; $m_g(t)$ es la masa en esos gases, en [kg]; R_h es el radio transversal del hogar, en [m]; H_T es la altura total de la caldera, en [m]:

$$E_g(t) = E_g(0) + \int_0^t \left(w_{1ig}(\tau) + w_{2ig}(\tau) + w_{3ig}(\tau) - w_{ga}(\tau) - w_{gatm}(\tau) - w_{go}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{31}$$

$$m_g(t) = m_g(0) + \int_0^t \left(q_{1ig}(\tau) + q_{2ig}(\tau) - q_{go}(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{32}$$

$$R_h = 0.6 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$H_T = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

BY NC ND

$E_g(0)$ es la energía en los gases inicialmente, en [J]; $w_{1ig}(t)$ es la potencia del ambiente al hogar, con el caudal de petróleo, en [W]; $w_{2ig}(t)$ es la potencia del ambiente al hogar, con el caudal de aire, en [W]; $w_{3ig}(t)$ es la potencia de las configuraciones moleculares del petróleo y el aire a la cinética de los gases del hogar, por reacción, en [W]; $w_{gatm}(t)$ es la potencia del hogar a la atmósfera, por las paredes del hogar, en [W]; $w_{go}(t)$ es la potencia del hogar al ambiente, con los gases, en [W]; $m_g(0)$ es la masa en los gases inicialmente, en [kg]; $q_{1ig}(t)$ es el caudal de petróleo del ambiente al hogar, en [kg s^{-1}]; $q_{2ig}(t)$ es el caudal de aire del ambiente al hogar, en [kg s^{-1}]; $q_{go}(t)$ es el caudal de gases del hogar al ambiente, en [kg s^{-1}]:

$$E_g(0) = 1416000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

$$w_{1ig}(t) = q_{1ig}(t) \cdot e_{1ig}(t) \tag{36}$$

$$w_{2ig}(t) = q_{2ig}(t) \cdot e_{2ig}(t) \tag{37}$$

$$w_{3ig}(t) = \lambda \cdot q_{1ig}(t) \tag{38}$$

$$w_{gatm}(t) = \kappa_3 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_h \cdot H_T + 2 \cdot \pi \cdot R_h^2}{\varepsilon_h} \cdot \left(T_g(t) - T_{atm}\right) \tag{39}$$

$$w_{go}(t) = q_{go}(t) \cdot e_g(t) \tag{40}$$

$$m_g(0) = 2.35 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{41}$$

$$q_{1ig}(t) = 0.005 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{42}$$

$$q_{2ig}(t) = \alpha \cdot q_{1ig}(t) \tag{43}$$

$$q_{go}(t) = K_g \cdot \sqrt{P_g(t) - P_{atm}} \tag{44}$$

$e_{1ig}(t)$ es la energía específica del petróleo entrante, en [J kg^{-1}]; $e_{2ig}(t)$ es la energía específica del aire entrante, en [J kg^{-1}]; λ es el poder calorífico del petróleo y el aire, en [J kg^{-1}]; κ^3 es la conductividad térmica de las paredes del hogar, en [W m^{-1} K^{-1}]; ε_h es el espesor de las paredes del hogar, en [m]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]; α es el coeficiente de proporción estequiométrica del aire respecto al petróleo, en [kg (de aire) kg^{-1} (de petróleo)]; K_g es un coeficiente de salida de los gases, en [$kg^{1/2}$ $m^{1/2}$]:

$$e_{1ig}(t) = 533000 \quad \text{(por ejemplo, si se trata de petróleo Diesel con temperatura cercana a } T_{atm}\text{)} \tag{45}$$

$$e_{2ig}(t) = 290000 \quad \text{(por ejemplo, si se trata de aire con temperatura cercana a } T_{atm}\text{)} \tag{46}$$

$$\lambda = 44000000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{47}$$

$$\kappa_3 = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{48}$$

$$\varepsilon_h = 0.01 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{49}$$

$$T_{atm} = 288 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{50}$$

CC BY NC ND

$\alpha = 14.5$ (por ejemplo, si se trata de petróleo Diesel) (51)

$K_g = 0.01$ (por ejemplo) (52)

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo también.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (3), (6), (10), (14), (15), (17), (18), (20), (22), (23), (24), (27), (28), (29), (33), (34), (35), (41), (47), (48), (49), (50), (51) y (52) no contienen ninguna variable que evoluciona: (11), (13), (42), (45) y (46) contienen 1 cada una; (1), (16), (19), (25), (39), (43) y (44), 2; (2), (5), (7), (9), (12), (21), (26), (30), (36), (37), (38) y (40), 3; (4), (8) y (32), 4; (31), 7; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 28 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^5 \cdot 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 4^3 \cdot 7^1$ (=30474952704) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(52).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o de las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o la energía en el recinto, sino que la masa o la energía depende por integración de todos los caudales o de todas las potencias.

(4), (5), (31) y (32) tienen masas o energías despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 30474952704 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(52), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^9 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 4^1$ (=90699264).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 90699264 sistemas de ecuaciones restantes, 90699263 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(52).

Si nos interesan las evoluciones de T_a; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (4), (5), (31) y (32); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_s inicial, E_a inicial, m_a inicial, E_g inicial, m_m inicial, q_{ia}, q_{ig}, e_{ia}, e_{1ig}, e_{2ig}, κ_1, R_e, ε_e, K_a, κ_2, P_{atm}, c_g, μ_g, R_h, H_t, λ, κ_3, ε_h, T_{atm}, α, K_g, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(52) como:

$\kappa_1 = \ldots$ (14')

$R_e = \ldots$ (15')

$\varepsilon_e = \ldots$ (17')

$K_a = \ldots$ (20')

$\kappa_2 = \ldots$ (18')

$P_{atm} = \ldots$ (24')

$c_g = \ldots$ (27')

$\mu_g = \ldots$ (29')

CC BY NC ND

$$R_h = \ldots \tag{33'}$$

$$H_T = \ldots \tag{34'}$$

$$\lambda = \ldots \tag{47'}$$

$$\kappa_3 = \ldots \tag{48'}$$

$$\varepsilon_h = \ldots \tag{49'}$$

$$T_{atm} = \ldots \tag{50'}$$

$$\alpha = \ldots \tag{51'}$$

$$K_g = \ldots \tag{52'}$$

$$m_{a,0} = \ldots \tag{10'}$$

$$m_{g,0} = \ldots \tag{41'}$$

$$E_{a,0} = \ldots \tag{6'}$$

$$E_{g,0} = \ldots \tag{35'}$$

$$c_a = 4180 \tag{3'}$$

$$\rho_a = 1000 \tag{22'}$$

$$g = 9.81 \tag{23'}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \tag{28'}$$

$$q_{ia,k} = \ldots \tag{11'}$$

$$q_{1ig,k} = \ldots \tag{42'}$$

$$e_{ia,k} = \ldots \tag{13'}$$

$$e_{1ig,k} = \ldots \tag{45'}$$

$$e_{2ig,k} = \ldots \tag{46'}$$

$$V_{a,k} = \frac{m_{a,k}}{\rho_a} \tag{25'}$$

$$h_{a,k} = \frac{V_{a,k}}{\pi \cdot R_e^2} \tag{16'}$$

$$v_{g,k} = \frac{\pi \cdot R_h^2 \cdot H_T - V_{a,k}}{m_{g,k}} \tag{30'}$$

$$e_{a,k} = \frac{E_{a,k}}{m_{a,k}} \tag{2'}$$

$$e_{g,k} = \frac{E_{g,k}}{m_{g,k}} \tag{26'}$$

$$T_{a,k} = \frac{e_{a,k}}{c_a} \tag{1'}$$

CC BY NC ND

$$T_{g,k} = \frac{e_{g,k}}{c_g} \tag{19'}$$

$$P_{g,k} = \frac{k_B}{c_g \cdot \mu_g} \cdot \frac{e_{g,k}}{v_{g,k}} \tag{21'}$$

$$q_{2ig,k} = \alpha \cdot q_{1ig,k} \tag{43'}$$

$$q_{ao,k} = K_a \cdot \sqrt{P_{g,k} + \rho_a \cdot g \cdot h_{a,k} - P_{atm}} \tag{12'}$$

$$q_{go,k} = K_g \cdot \sqrt{P_{g,k} - P_{atm}} \tag{44'}$$

$$w_{ia,k} = q_{ia,k} \cdot e_{ia,k} \tag{7'}$$

$$w_{1ig,k} = q_{1ig,k} \cdot e_{1ig,k} \tag{36'}$$

$$w_{2ig,k} = q_{2ig,k} \cdot e_{2ig,k} \tag{37'}$$

$$w_{3ig,k} = \lambda \cdot \left(q_{1ig,k} + q_{2ig,k} \right) \tag{38'}$$

$$w_{ga,k} = \left(\kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_e \cdot h_{a,k} + \pi \cdot R_e^2}{\varepsilon_e} + \kappa_2 \cdot \pi \cdot R_e^2 \right) \cdot \left(T_{g,k} - T_{a,k} \right) \tag{8'}$$

$$w_{gatm,k} = \kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_h \cdot H_T + 2 \cdot \pi \cdot R_h^2}{\varepsilon_h} \cdot \left(T_{g,k} - T_{atm} \right) \tag{39'}$$

$$w_{ao,k} = q_{ao,k} \cdot e_{a,k} \tag{9'}$$

$$w_{go,k} = q_{go,k} \cdot e_{g,k} \tag{40'}$$

$$m_{a,k+1} = m_{a,k} + \left(q_{ia,k} - q_{ao,k} \right) \cdot dt \tag{5'}$$

$$m_{g,k+1} = m_{g,k} + \left(q_{1ig,k} + q_{2ig,k} - q_{go,k} \right) \cdot dt \tag{32'}$$

$$E_{g,k+1} = E_{g,k} + \left(w_{1ig,k} + w_{2ig,} + w_{3ig,k} - w_{ga,k} - w_{gatm,k} - w_{go,k} \right) \cdot dt \tag{31'}$$

$$E_{a,k+1} = E_{a,k} + \left(w_{ia,k} + w_{ga,k} - w_{ao,k} \right) \cdot dt \tag{4'}$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación, es enredado. Saltémoslo también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.05 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

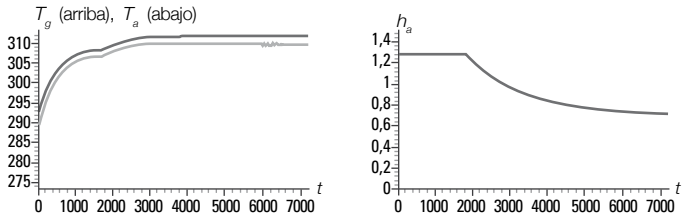


Fig. 2: Predicciones

BY NC ND

Aprovechando el carácter de (4), (5), (31) y (32) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las energías y las masas con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (7), (8), (9), (19), (1), (12), (16), (21), (26), (2), (30) y (25); derivando (5) e insertando (12), (21), (16), (26), (30) y (25); derivando (31) e insertando (36), (37), (38), (8), (39), (40), (43), (16), (19), (1), (44), (25), (21), (26), (2), (39) y (25); y derivando (32) e insertando (43), (44), (21), (26), (30) y (25):

$$\begin{aligned}\frac{dE_a(t)}{dt} &= q_{ia}(t)\cdot e_{ia}(t) \\ &+\left(\frac{\kappa_1}{\varepsilon_e}\cdot\left(\frac{2\cdot m_a(t)}{R_e\cdot\rho_a}+\pi\cdot R_e^2\right)+\kappa_2\cdot\pi\cdot R_e^2\right)\cdot\left(\frac{1}{c_g}\cdot\frac{E_g(t)}{m_g(t)}-\frac{1}{c_a}\cdot\frac{E_a(t)}{m_a(t)}\right) \\ &-K_a\cdot\sqrt{\frac{k_B}{c_g\cdot\mu_g}\cdot\frac{\rho_a\cdot E_g(t)}{\rho_a\cdot\pi\cdot R_h^2\cdot H_T-m_a(t)}+\frac{g}{\pi\cdot R_e^2}\cdot m_a(t)-P_{atm}}\cdot\frac{E_a(t)}{m_a(t)}\end{aligned} \tag{a1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dm_a(t)}{dt} &= q_{ia}(t) \\ &-K_a\cdot\sqrt{\frac{k_B}{c_g\cdot\mu_g}\cdot\frac{\rho_a\cdot E_g(t)}{\rho_a\cdot\pi\cdot R_h^2\cdot H_T-m_a(t)}+\frac{g}{\pi\cdot R_e^2}\cdot m_a(t)-P_{atm}}\end{aligned} \tag{a2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_g(t)}{dt} &= q_{1ig}(t)\cdot e_{1ig}(t) \\ &+\alpha\cdot q_{1ig}(t)\cdot e_{2ig}(t) \\ &+\lambda\cdot(1+\alpha)\cdot q_{1ig}(t) \\ &-\left(\frac{\kappa_1}{\varepsilon_e}\cdot\left(\frac{2\cdot m_a(t)}{R_e\cdot\rho_a}+\pi\cdot R_e^2\right)+\kappa_2\cdot\pi\cdot R_e^2\right)\cdot\left(\frac{1}{c_g}\cdot\frac{E_g(t)}{m_g(t)}-\frac{1}{c_a}\cdot\frac{E_a(t)}{m_a(t)}\right) \\ &-\frac{\kappa_1\cdot 2\cdot\pi\cdot R_h\cdot(H_T+R_h)}{\varepsilon_h}\cdot\left(\frac{1}{c_g}\cdot\frac{E_g(t)}{m_g(t)}-T_{atm}\right) \\ &-K_g\cdot\sqrt{\frac{\rho_a\cdot E_g(t)}{\rho_a\cdot\pi\cdot R_h^2\cdot H_T-m_a(t)}-P_{atm}}\cdot\frac{E_g(t)}{m_g(t)}\end{aligned} \tag{a3}$$

$$\begin{aligned}\frac{dm_g(t)}{dt} &= (1+\alpha)\cdot q_{1ig}(t) \\ &-K_g\cdot\sqrt{\frac{\rho_a\cdot E_g(t)}{\rho_a\cdot\pi\cdot R_h^2\cdot H_T-m_a(t)}-P_{atm}}\end{aligned} \tag{a4}$$

Si nos interesa la evolución de la temperatura del agua que sale, aceptando (a1)-(a4), considerando (1) e insertando (2):

$$T_a(t)=\frac{1}{c_a}\cdot\frac{E_a(t)}{m_a(t)} \tag{a5}$$

CC BY NC ND

64.0 [64]

UN SECADOR DE FRUTAS (MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Consideremos un secador de frutas pequeño, de funcionamiento por tandas, hecho de acrílico, con un difusor de aire en la entrada, cuatro bandejas para colocar un par de kilogramos de fruta en el interior, y un colector de aire en la salida.

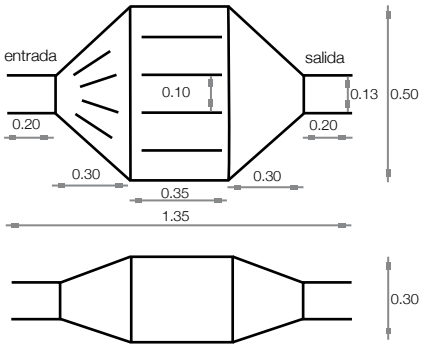


Fig. 1: Un secador de frutas (visto de perfil y de arriba; longitudes en [m])

Interesa predecir la evolución de la humedad de la fruta en el interior del secador.

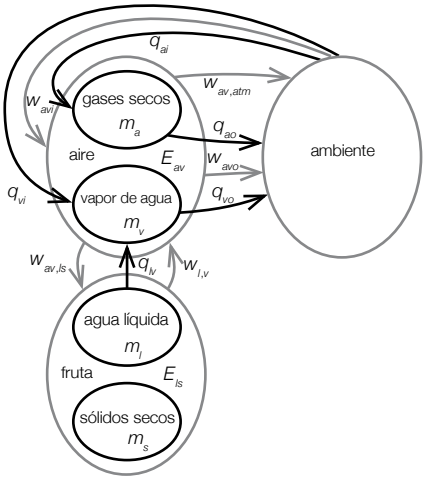


Fig. 2: Estructura espacial

[64] Reformulación de: M. Alcayaga, J. Glaría y J. Larraín, 1996, Fruit drying: a case of modeling and simulation, *CD proc. lasted international conference on modeling, simulation and optimization, Gold Coast, Australia*.

BY NC ND

t es el tiempo, en [s].

$H_{ls}(t)$ es la humedad de la fruta, en [kg (de agua líquida) kg^{-1} (de fruta)]:

$$H_{ls}\left(t\right) = \frac{m_l\left(t\right)}{m_l\left(t\right) + m_s} \tag{1}$$

$m_l(t)$ es la masa en el agua líquida de la fruta, en [kg]; m_s es la masa en los sólidos secos de la fruta, en [kg]:

$$m_l\left(t\right) = m_l\left(0\right) - \int_0^t q_{lv}\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{2}$$

$m_s = 0.045$ (por ejemplo, en un experimento con 36 rodajas finas de manzanas Granny Smith) (3)

$m_l(0)$ es la masa en el agua de la fruta inicialmente, en [kg]; $q_{lv}(t)$ es el caudal de agua de la fruta al aire, por evaporación, en [kg s^{-1}]:

$m_l\left(0\right) = 0.274$ (por ejemplo, en el experimento) (4)

$$q_{lv}\left(t\right) = k_{lv}\left(t\right)\cdot A\left(0\right)\cdot\frac{m_a\left(t\right)+m_v\left(t\right)}{V}\cdot\left(\left(\frac{m_v}{m_a}\right)_{sat}\left(t\right) - \frac{m_v\left(t\right)}{m_a\left(t\right)}\right) \tag{5}$$ [65]

$k_{lv}(t)$ es un coeficiente de paso de masa por la superficie que la fruta tiene expuesta al aire, en [m s^{-1}]; $A(0)$ es el área de esa superficie inicialmente, en [m^2]; $m_a(t)$ es la masa en los gases secos del aire dentro del secador, en [kg]; $m_v(t)$ es la masa en el vapor de agua del mismo aire, en [kg]; V es el volumen del interior del secador, en [m^3]; $(m_v/m_a)_{sat}(t)$ es el cuociente entre la masa de gases secos y la de vapor de agua que presentaría el aire si estuviese saturado de vapor:

$$k_{lv}\left(t\right) = \frac{K_{1lv}}{m_s/m_a\left(t\right) + K_{2lv}} \tag{6}$$ [66]

$A\left(0\right) = 0.310$ (por ejemplo, en el experimento) (7)

$$m_a\left(t\right) = m_a\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{ai}\left(\tau\right) - q_{ao}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{8}$$

$$m_v\left(t\right) = m_v\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{vi}\left(\tau\right) + q_{lv}\left(\tau\right) - q_{vo}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{9}$$

$V = 0.1$ (10)

$$\left(\frac{m_v}{m_a}\right)_{sat}\left(t\right) \approx \frac{0.6221}{2.039\cdot 10^{-5}\cdot e^{+\frac{3333}{T_{av}\left(t\right)-64{,}6}} - 1} \tag{11}$$

[65] Aproximación adaptada de: J. Coulson y J. Richardson, 1956, *Chemical engineering*, Pergamon, Nueva York.

[66] Aproximación considerando que la evaporación del agua de la fruta es fácil para las partes del agua que están bastante libres, pero se torna más difícil a medida que se trata de partes que reciben fuerzas físico-químicas de almidones, pectinas y sustancias coloidales, y a medida que la fruta misma se encoge.

CC BY NC ND

K_{1lv} es un coeficiente más detallado, en [m s^{-1}]; K_{2lv} es otro coeficiente, en [kg kg^{-1}]; $m_a(0)$ es la masa en los gases secos del aire dentro del secador inicialmente, en [kg]; $q_{ai}(t)$ es el caudal de gases secos del ambiente al secador, con el aire entrante, en [kg s^{-1}]; $q_{ao}(t)$ es el de gases secos del secador al ambiente, con el aire saliente, en [kg s^{-1}]; $m_v(0)$ es la masa en el vapor de agua del aire dentro del secador inicialmente, en [kg]; $q_{vi}(t)$ es el caudal de vapor de agua del ambiente al secador, con el aire entrante, en [kg s^{-1}]; $q_{vo}(t)$ es el de vapor de agua del secador al ambiente, con el aire saliente, en [kg s^{-1}]; $T_{av}(t)$ es la temperatura del aire completo dentro del secador, en [K]:

$$K_{1lv} = 0.0012 \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{12}$$

$$K_{2lv} = 0.14 \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{13}$$

$$m_a\left(0\right) = 0.121 \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{14}$$

$$q_{ai}\left(t\right) = 0.076 \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{15}$$

$$q_{ao}\left(t\right) = \frac{m_a\left(t\right)}{m_a\left(t\right) + m_v\left(t\right)} \cdot q_{avo}\left(t\right) \tag{16}$$

$$m_v\left(0\right) = 3.83 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{17}$$

$$q_{vi} = 2.4 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \tag{18}$$

$$q_{vo}\left(t\right) = \frac{m_v\left(t\right)}{m_a\left(t\right) + m_v\left(t\right)} \cdot q_{avo}\left(t\right) \tag{19}$$

$$T_{av}\left(t\right) = \frac{E_{av}\left(t\right) - \left(e_{0a} \cdot m_a\left(t\right) + e_{0v} \cdot m_v\left(t\right)\right)}{c_{Ta} \cdot m_a\left(t\right) + c_{Tv} \cdot m_v\left(t\right)} \tag{20}$$

$q_{avo}(t)$ es el caudal de aire del secador al ambiente, en [kg s^{-1}]; $E_{av}(t)$ es la energía en el aire dentro del secador, en [J]; e_{0a} es la energía específica de referencia de los gases secos del aire, en [J kg^{-1}]; e_{0v} es la del vapor de agua del aire, en [J kg^{-1}]; c_{Ta} es el calor específico de los gases secos del aire, en [J kg^{-1} K^{-1}]; c_{Tv} es el del vapor de agua del aire, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$q_{avo}\left(t\right) = K \cdot \sqrt{\left|P_{av}\left(t\right) - P_{atm}\left(t\right)\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_{av}\left(t\right) - P_{atm}\left(t\right)\right) \tag{21}$$

$$E_{av}\left(t\right) = E_{av}\left(0\right) + \int_0^t \left(\begin{array}{l} w_{avi}\left(\tau\right) + w_{l,v}\left(\tau\right) \\ -w_{avo}\left(\tau\right) - w_{av,ls}\left(\tau\right) - w_{av,atm}\left(\tau\right) \end{array} \right) \cdot d\tau \tag{22}$$

$$e_{0a} = 0 \tag{23}$$

$$e_{0v} = 0 \tag{24}$$

$$c_{Ta} = 720 \tag{25}$$

$$c_{Tv} = 1560 \tag{26}$$

CC BY NC ND

K es un coeficiente de salida del aire, en [kg$^{1/2}$ m$^{1/2}$]; $P_{av}(t)$ es la presión del aire dentro del secador, en [N m^{-2}]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; $E_{av}(0)$ es la energía en el aire dentro del secador inicialmente, en [J]; $w_{avi}(t)$ es la potencia del ambiente al aire dentro del secador, con el aire entrante, en [W]; $w_{l,v}(t)$ es la potencia de la fruta al aire dentro del secador, con el agua evaporada, en [W]; $w_{avo}(t)$ es la potencia del aire dentro del secador al ambiente, con el aire, en [W]; $w_{av,ls}(t)$ es la potencia del aire dentro del secador a la fruta, por la superficie que ésta tiene expuesta, en [W]; $w_{av,atm}(t)$ es la potencia del aire dentro del secador al ambiente, por las paredes de secador, en [W]:

$$K = 6.3 \cdot 10^{-3} \qquad (27)\ ^{67}$$

$$P_{av}\left(t\right) = \left(\frac{m_a\left(t\right)}{4.81 \cdot 10^{-26}} + \frac{m_v\left(t\right)}{2.99 \cdot 10^{-26}} \right) \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}\left(t\right)}{V} \qquad (28)$$

$$P_{atm}\left(t\right) = 101300 \qquad (29)$$

$$E_{av}\left(0\right) = 25530 \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \qquad (30)$$

$$w_{avi}\left(t\right) = e_{avi}\left(t\right) \cdot \left(q_{ai}\left(t\right) + q_{vi}\left(t\right)\right) \qquad (31)$$

$$w_{l,v}\left(t\right) = \frac{E_{av}\left(t\right) \cdot c_{Tv} + \left(e_{0v} \cdot c_{Ta} - e_{0a} \cdot c_{Tv}\right) \cdot m_a\left(t\right)}{c_{Ta} \cdot m_a\left(t\right) + c_{Tv} \cdot m_v\left(t\right)} \cdot q_{lv}\left(t\right) \qquad (32)\ ^{68}$$

$$w_{avo}\left(t\right) = \frac{E_{av}\left(t\right)}{m_a\left(t\right) + m_v\left(t\right)} \cdot q_{avo}\left(t\right) \qquad (33)$$

$$w_{av,ls}\left(t\right) = g_{av,ls}\left(t\right) \cdot A\left(0\right) \cdot \left(T_{av}\left(t\right) - T_{ls}\left(t\right)\right) \qquad (34)$$

$$w_{av,atm}\left(t\right) = \frac{g_p \cdot A_p}{\varepsilon_p} \cdot \left(T_{av}\left(t\right) - T_{atm}\left(t\right)\right) \qquad (35)$$

$e_{avi}(t)$ es la energía específica del aire completo que viaja del ambiente al secador (a través de un calefactor), en [J kg^{-1}]; $g_{av,ls}(t)$ es un coeficiente de paso de energía por la superficie que la fruta tiene expuesta al aire, en [W m^{-2} K^{-1}]; $T_{ls}(t)$ es la temperatura de la fruta completa dentro del secador, en [K]; g_p es la conductividad térmica de las paredes del secador, en [W m^{-1} K^{-1}]; A_p es el área de esas paredes, en [m^2]; ε_p es el espesor de las paredes, en [m]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$e_{avi}\left(t\right) = 250000 + 0.766 \cdot t \quad \text{(por ejemplo, en el experimento)} \qquad (36)\ ^{69}$$

---

67 Dato impreciso; se trata de un valor que predice $q_{avo}=q_{ai}+q_{vi}=0.07624$ con sólo $P_{av}-P_{atm}=144$.

68 Suponiendo que el agua evaporada viaja de la fruta al aire con las características del vapor en este último.

69 Diagnóstico hecho midiendo T_{avi} y suponiendo

$$e_{avi}\left(t\right) = \left(c_{Ta} \cdot T_{avi}\left(t\right) + e_{0a}\right) \cdot \frac{q_{ai}\left(t\right)}{q_{ai}\left(t\right) + q_{vi}\left(t\right)} + \left(c_{Tv} \cdot T_{avi}\left(t\right) + e_{0v}\right) \cdot \frac{q_{vi}\left(t\right)}{q_{ai}\left(t\right) + q_{vi}\left(t\right)}$$

CC BY NC ND

$$g_{av,ls}\left(t\right)=\frac{K_{1av,ls}\cdot m_l\left(t\right)+K_{2av,ls}\cdot m_s}{K_{3av,ls}\cdot m_l\left(t\right)+m_s} \quad (37)\ ^{70}$$

$$T_{ls}\left(t\right)=\frac{E_{ls}\left(t\right)-\left(e_{0l}\cdot m_l\left(t\right)+e_{0s}\cdot m_s\right)}{c_{Tl}\cdot m_l\left(t\right)+c_{Ts}\cdot m_s} \quad (38)$$

$g_p = 0.21$ (por ejemplo, en el secador del experimento) (39)

$A_p = 1.25$ (por ejemplo, en el secador del experimento) (40)

$\varepsilon_p = 0.004$ (por ejemplo, en el secador del experimento) (41)

$T_{atm} = 291$ (por ejemplo, en el experimento) (42)

$K_{1av,ls}$ es un coeficiente más detallado, en [W m^{-2} K^{-1}]; $K_{2av,ls}$ es otro coeficiente, en [W m^{-2} K^{-1}]; $K_{3av,ls}$ es otro, en [kg kg^{-1}]; $E_{ls}(t)$ es la energía de la fruta dentro del secador, en [J]; e_{0l} es la energía específica de referencia del agua líquida de la fruta, en [J kg^{-1}]; e_{0s} es la de los sólidos de la fruta, en [J kg^{-1}]; c_{Tl} es el calor específico del agua, en [J kg^{-1} K^{-1}]; c_{Ts} es el de los sólidos, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$K_{1av,ls} = 26$ (por ejemplo, en el experimento) (43)

$K_{2av,ls} = 5.6$ (por ejemplo, en el experimento) (44)

$K_{3av,ls} = 0.44$ (por ejemplo, en el experimento) (45)

$$E_{ls}\left(t\right)=E_{ls}\left(0\right)+\int_0^t\left(w_{av,ls}\left(\tau\right)-w_{l,v}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \quad (46)$$

$$e_{0l}=e_{0v}-2.256\cdot10^6-\left(c_{Tl}-c_{Tv}\right)\cdot373.2 \quad (47)\ ^{71}$$

$e_{0s} = 0$ (48)

$c_{Tl} = 4186$ (49)

$c_{Ts} = 2660$ (50) [72]

$E_{ls}(0)$ es la energía de la fruta inicialmente, en [J]:

$E_{ls}\left(0\right) = -516500$ (por ejemplo, en el experimento) (51)

El dibujo de la estructura causal es muy enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (3), (4), (7), (10), (12), (13), (14), (17), (23), (24), (25), (26), (27), (30), (39), (40), (41), (43), (44), (45), (47), (48), (49), (50) y (51) no contienen ninguna variable que evoluciona: (15), (18), (29), (36) y (42) contienen 1 cada una; (1), (2), (6), (11) y (37), 2; (8), (21), (31), (35), (38) y (46), 3; (9), (16), (19), (20), (28), (32) y (34), 4; (5) y (33), 5; (22), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 26 ecuaciones donde apare-

[70] Aproximación con consideraciones parecidas a las usadas para (6).

[71] $-2.256\cdot10^6$ es el "calor de condensación" del agua, en [J kg^{-1}]; 373.2 es la temperatura de condensación del agua, en [K]; ambos, medidos a presión atmosférica estándar.

[72] Diagnóstico hecho en un calorímetro.

CC BY NC ND

cen, se puede plantear $1^5 \cdot 2^5 \cdot 3^6 \cdot 4^7 \cdot 5^2 \cdot 6^1$ (=57330892800) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(51).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa o la energía en el recinto, sino que la masa o la energía depende por integración de todos los caudales o todas las potencias.

(2), (8) y (9) tienen masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; (22) y (46) tienen energías; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 57330892800 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(51), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^6 \cdot 5^2$ (=132710400).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 132710400 sistemas de ecuaciones restantes, 132710399 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (con retardos en todas las dependencias mutuas, y pese a la compactación de la causalidad hecha tras (20), (32) y (38)): (1)-(51).

Si nos interesa la evolución de la humedad H_{ls}; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (8), (9), (22) y (46); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_l inicial, m_a inicial, m_v inicial, E_{av} inicial, E_{ls} inicial, q_{ai}, q_{vi}, P_{atm}, e_{avi}, T_{atm}, m_s, $A(0)$, V, K_{1lv}, K_{2lv}, e_{0a}, e_{0v}, c_{Ta}, c_{Tv}, K, g_p, A_p, ε_p, $K_{1av,ls}$, $K_{2av,ls}$, $K_{3av,ls}$, e_{0s}, c_{Tl}, c_{Ts}, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(51) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son bastante largos. Saltémoslos.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3 agregando la evolución de la humedad relativa del aire dentro del secador.

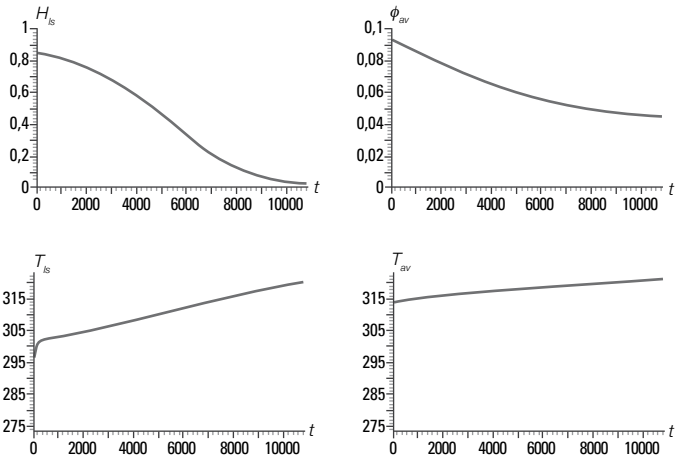


Fig. 3: Predicciones

BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), (8), (9), (22) y (46) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las masas y energías correspondientes, con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos.

Pero el aburrimiento es mucho. Dejemos el asunto.

Apéndice acerca de algunas mediciones

La figura A1 ilustra algunas mediciones hechas en el experimento descrito por (3).

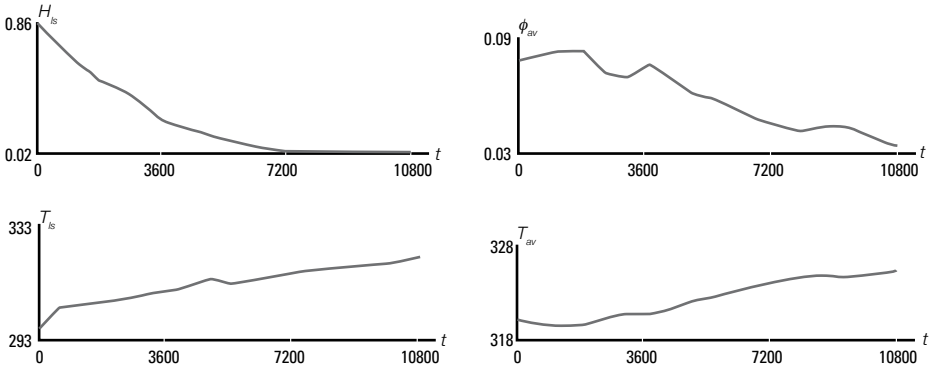


Fig. A1: Mediciones

Apéndice acerca de la Termodinámica para (11), (20) y (28) (mientras la presión del aire resulte cercana a 101300, en [N m^{-2}], y su temperatura resulte entre 233.2 y 373.2, en [K])

Cuando se intenta representar matemática o computacionalmente al aire, los libros tradicionales de Termodinámica aportan varias tablas cuyo uso demanda su conocimiento completo, un conocimiento parcial complementado con programas de interpolación, o una programación de ecuaciones "fundamentales" bastante difíciles [73] . Veamos aquí una alternativa más barata, de acceso fácil aunque de calidad mediana.

Para aire compuesto por una parte de vapor de agua y otra parte compuesta, a su vez, por 78.1% de nitrógeno, 42.0% de oxígeno y 0.9% de argón (gases "secos", en tantos por cientos de masas):

$$\mu_v = \mu_{H2O} = 2 \cdot \mu_H + \mu_O = 2.991 \cdot 10^{-26}$$

$$\mu_a = 0.781 \cdot \mu_{N2} + 0.210 \cdot \mu_{O2} + 0.009 \cdot \mu_{Ar}$$
$$= 1.562 \cdot \mu_N + 0.420 \cdot \mu_O + 0.009 \cdot \mu_{Ar} = 4.808 \cdot 10^{-26}$$

donde μ_v es la masa media de las moléculas del vapor de agua del aire, en [kg]; μ_a es la masa media de las moléculas de los gases secos, en [kg]; μ_{H2O}, μ_{N2}, μ_{O2} y μ_{Ar} son

[73] Por ejemplo: J. Van Wylen, 1959, *Thermodynamics*, Wiley, Nueva York; J. Keenan, F. Keyes, P. Hill y J. Moore, 1969, *Steam tables* (International edition - metric units), Wiley, Nueva York; R. Boltz y G. Tuve, ed., 1976, CRC *handbook of tables for applied engineering science*, CRC Press, Cleveland.

BY NC ND

las masas medias de las moléculas de agua, nitrógeno, oxígeno y argón, respectivamente, en [kg]; μ_H, μ_O, μ_N y μ_{Ar} son las masas medias de los átomos de hidrógeno, oxígeno, nitrógeno y argón, respectivamente, en [kg].

Según la aproximación de Ch. Antoine (1888):

$$\left(P_v\right)_{sat} \approx \alpha \cdot e^{\frac{-\beta}{T_{av}+\gamma}}$$

donde $(P_v)_{sat}$ es la parte de la presión del aire debida al vapor de agua cuando está a punto de precipitarse por saturación, en [N m^{-2}]; T_{av} es la temperatura del aire (supuestamente, ya igualada en el vapor de agua y los gases secos), en [K]; y α, β y γ son coeficientes ajustables.

Eligiendo tres valores de T_{av}, esto es T_{av1} (en el comienzo del intervalo de interés), T_{av2} (cerca del centro del intervalo) y T_{av3} (al final), determinando los valores correspondientes de $(P_v)_{sat}$, esto es $(P_v)_{sat,1}$, $(P_v)_{sat,2}$ y $(P_v)_{sat,3}$, y despejando adecuadamente:

$$\gamma \approx \frac{T_{av3}\cdot\left(T_{av2}-T_{av1}\right)\cdot\ln\left\{\frac{\left(P_v\right)_{sat,3}}{\left(P_v\right)_{sat,2}}\right\} - T_{av1}\cdot\left(T_{av3}-T_{av2}\right)\cdot\ln\left\{\frac{\left(P_v\right)_{sat,2}}{\left(P_v\right)_{sat,1}}\right\}}{\left(T_{av3}-T_{av2}\right)\cdot\ln\left\{\frac{\left(P_v\right)_{sat,2}}{\left(P_v\right)_{sat,1}}\right\} - \left(T_{av2}-T_{av1}\right)\cdot\ln\left\{\frac{\left(P_v\right)_{sat,3}}{\left(P_v\right)_{sat,2}}\right\}}$$

$$\beta \approx \frac{\left(T_{av1}+\gamma\right)\cdot\left(T_{av3}+\gamma\right)}{T_{av3}-T_{av1}}\cdot\ln\left\{\frac{\left(P_v\right)_{sat,3}}{\left(P_v\right)_{sat,1}}\right\}$$

$$\alpha \approx \left(P_v\right)_{sat,2}\cdot e^{\frac{\beta}{T_{av}+\gamma}}$$

Según Boltz y Tuve, P_{av}=1.013·10^5, T_{av1}=233.2, T_{av2}=303.2 y T_{av3}=373.2 implican $(P_v)_{sat,1}$=1.2838·101, $(P_v)_{sat,2}$=4.2428·103 y $(P_v)_{sat,3}\rightarrow\infty$, con lo cual $\gamma\approx$-64.6, $\beta\approx$3333, $\alpha\approx$4.969·109 y:

$$P_{av} = 1.013\cdot10^5 \quad\rightarrow\quad \left(P_v\right)_{sat} \approx 4.969\cdot10^9\cdot e^{-\frac{3333}{T_{av}-64.6}} \qquad \text{(a1)}$$

donde P_{av} es la presión total del aire, en [N m^{-2}].

La tabla de la figura A2 ilustra la calidad de la aproximación (a1).

BY NC ND

T_{av}	$(P_v)_{sat}$ (Boltz y Tuve)	$(P_v)_{sat}$ aprox.(a1)
233.2	$1.284 \cdot 10^{1}$	$1.291 \cdot 10^{1}$
243.2	$3.799 \cdot 10^{1}$	$3.904 \cdot 10^{1}$
253.2	$1.032 \cdot 10^{2}$	$1.050 \cdot 10^{2}$
263.2	$2.597 \cdot 10^{2}$	$2.557 \cdot 10^{2}$
273.2	$6.108 \cdot 10^{2}$	$5.717 \cdot 10^{2}$
283.2	$1.227 \cdot 10^{3}$	$1.187 \cdot 10^{3}$
293.2	$2.337 \cdot 10^{3}$	$2.313 \cdot 10^{3}$
303.2	$4.243 \cdot 10^{3}$	$4.262 \cdot 10^{3}$
313.2	$7.378 \cdot 10^{3}$	$7.476 \cdot 10^{3}$
323.2	$1.233 \cdot 10^{4}$	$1.255 \cdot 10^{4}$
333.2	$1.992 \cdot 10^{4}$	$2.029 \cdot 10^{4}$
343.2	$3.117 \cdot 10^{4}$	$3.167 \cdot 10^{4}$
353.2	$4.736 \cdot 10^{4}$	$4.794 \cdot 10^{4}$
363.2	$7.011 \cdot 10^{4}$	$7.057 \cdot 10^{4}$

Fig. A2: Parte del vapor en la saturación

Por definición:

$$\left(P_v\right)_{sat} = P_{av} \cdot \frac{\left(m_v\right)_{sat} / \mu_v}{\left(m_v\right)_{sat} / \mu_v + m_a / \mu_a}$$

donde $(m_v)_{sat}$ es la masa en el vapor de agua a punto de precipitarse por saturación del aire, en [kg]; m_a es la masa en los gases secos, en [kg].

Insertando (a1), introduciendo los valores de μ_v y μ_a, y despejando:

$$P_{av} = 1.013 \cdot 10^{5} \rightarrow \frac{\left(m_v\right)_{sat}}{m_a} \approx \frac{0.6221}{2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{+\frac{3333}{T_{av} - 64,6}} - 1} \qquad \text{(a2)}$$

La tabla de la figura A3 ilustra la calidad de la aproximación (a2).

T_{av}	$(m_v)_{sat}/m_a$ (Boltz y Tuve)	$(m_v)_{sat}/m_a$ aprox.(a2)
233.2	$7.924 \cdot 10^{-5}$	$7.926 \cdot 10^{-5}$
243.2	$2.344 \cdot 10^{-4}$	$2.298 \cdot 10^{-4}$
253.2	$6.371 \cdot 10^{-4}$	$6.455 \cdot 10^{-4}$
263.2	$1.606 \cdot 10^{-3}$	$1.574 \cdot 10^{-3}$
273.2	$3.788 \cdot 10^{-3}$	$3.530 \cdot 10^{-3}$
283.2	$7.658 \cdot 10^{-3}$	$7.377 \cdot 10^{-3}$
293.2	$1.475 \cdot 10^{-2}$	$1.454 \cdot 10^{-2}$
303.2	$2.731 \cdot 10^{-2}$	$2.732 \cdot 10^{-2}$
313.2	$4.911 \cdot 10^{-2}$	$4.956 \cdot 10^{-2}$
323.2	$8.678 \cdot 10^{-2}$	$8.799 \cdot 10^{-2}$
333.2	$1.534 \cdot 10^{-1}$	$1.557 \cdot 10^{-1}$
343.2	$2.788 \cdot 10^{-1}$	$2.829 \cdot 10^{-1}$
353.2	$5.519 \cdot 10^{-1}$	$5.586 \cdot 10^{-1}$
363.2	1.416	1.428

Fig. A3: Humedad en la saturación

BY NC ND

Por definición:

$$\varphi_{av} = \frac{P_v}{\left(P_v\right)_{sat}} = \frac{P_{av} \cdot \dfrac{m_v / \mu_v}{m_v / \mu_v + m_a / \mu_a}}{P_{av} \cdot \dfrac{\left(m_v\right)_{sat} / \mu_v}{\left(m_v\right)_{sat} / \mu_v + m_a / \mu_a}}$$

donde φ_{av} es la humedad relativa del aire, en tanto por uno; P_v es la parte de la presión debida al vapor de agua, en [N m^{-2}]; m_v es la masa en el vapor de agua, en [kg].

Introduciendo los valores de μ_v y μ_a, insertando (a1) y arreglando:

$$P_{av} = 1.013 \cdot 10^5 \rightarrow \varphi_{av} \approx 2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{+\frac{3333}{T_{av} - 64{,}6}} \cdot \frac{m_v / m_a}{0.6221 + m_v / m_a} \qquad \text{(a3)}$$

Según la representación ideal de los gases:

$$P_{av} \cdot V \approx \left(\frac{m_v}{\mu_v} + \frac{m_a}{\mu_a} \right) \cdot 1.3803 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}$$

donde V es el volumen del recipiente, en [m^3].

Introduciendo los valores de μ_v y μ_a, y arreglando:

$$P_{av} = 1.013 \cdot 10^5 \rightarrow \frac{V}{m_v + m_a} \approx 4.553 \cdot 10^{-3} \cdot T_{av} \cdot \frac{0.6221 + m_v / m_a}{1 + m_v / m_a} \qquad \text{(a4)}$$

Las tablas de las figuras A4 y A5 ilustran la calidad de la aproximación (a4).

T_{av}	$V/(m_v+m_a)$ (Boltz y Tuve)	$V/(m_v+m_a)$ aprox.(a4)
233.2	0.6596	0.6587
243.2	0.6881	0.6869
253.2	0.7165	0.7152
263.2	0.7450	0.7435
273.2	0.7734	0.7717
283.2	0.8018	0.7994
293.2	0.8302	0.8282
303.2	0.8585	0.8564
313.2	0.8869	0.8847
323.2	0.9153	0.9129
333.2	0.9437	0.9412
343.2	0.9721	0.9694
353.2	1.000	0.9978
363.2	1.029	1.026

Fig. A4: Volumen cuando m_v=0

T_{av}	$V/(m_v+m_a)$ *(Boltz y Tuve) **	$V/(m_v+m_a)$ *aprox.(a4) ***
233.2	0.6596	0.6587
243.2	0.6881	0.6875
253.2	0.7167	0.7159
263.2	0.7456	0.7446
273.2	0.7751	0.7738
283.2	0.8054	0.8040
293.2	0.8374	0.8359
303.2	0.8723	0.8708
313.2	0.9118	0.9106
323.2	0.9588	0.9584
333.2	1.019	1.019
343.2	1.098	1.100
353.2	1.211	1.216
363.2	1.383	1.394

Fig. A5: Volumen cuando $m_v=(m_v)$sat
(* considerando $V/(m_v+m_a)=(V/m_a)/(1+m_v/m_a)$; ** incluyendo la aproximación (a2))

BY NC ND

Es habitual suponer:

$$E_v \approx \left(c_{v0} + c_{v1}\cdot T_{av} + c_{v2}\cdot T_{av}^2 + c_{v3}\cdot T_{av}^3 + ...\right)\cdot m_v$$

$$E_a \approx \left(c_{a0} + c_{a1}\cdot T_{av} + c_{a2}\cdot T_{av}^2 + c_{a3}\cdot T_{av}^3 + ...\right)\cdot m_a$$

donde E_v es la energía en el vapor de agua, en [J]; E_a es la energía en los gases secos, en [J]; y c_{v0},... c_{v3},..., c_{a0},... c_{a3},... son coeficientes ajustables.

Eligiendo suficientes valores de T_{av} en el intervalo de interés, esto es T_{av1}, T_{av2}, T_{av3}, T_{av4}..., determinando los valores correspondientes de E_v, esto es E_{v1}, E_{v2}, E_{v3}, E_{v4},..., y despejando adecuadamente:

$$c_{v0} = \frac{1}{m_v}\cdot\left(E_{v1} - c_{v1}\cdot T_{av1} - c_{v2}\cdot T_{av1}^2 - c_{v3}\cdot T_{av1}^3 - ...\right)$$

$$c_{v1} = \frac{1}{m_v}\cdot\left(\frac{E_{v2}-E_{v1}}{T_{av2}-T_{av1}} - c_{v2}\cdot\frac{T_{av2}^2-T_{av1}^2}{T_{av2}-T_{av1}} - c_{v3}\cdot\frac{T_{av2}^3-T_{av1}^3}{T_{av2}-T_{av1}} - ...\right)$$

$$c_{v2} = \frac{1}{m_v}\cdot\left(\frac{\frac{E_{v3}-E_{v2}}{T_{av3}-T_{av2}} - \frac{E_{v2}-E_{v1}}{T_{av2}-T_{av1}}}{T_{av3}-T_{av1}} - c_{v3}\cdot\frac{\frac{T_{av3}^3-T_{av2}^3}{T_{av3}-T_{av2}} - \frac{T_{av2}^3-T_{av1}^3}{T_{av2}-T_{av1}}}{T_{av3}-T_{av1}} - ...\right)$$

$$c_{v3} = \frac{1}{m_v}\cdot\left(\frac{\frac{\frac{E_{v4}-E_{v3}}{T_{av4}-T_{av3}} - \frac{E_{v3}-E_{v2}}{T_{av3}-T_{av2}}}{T_{av4}-T_{av2}} - \frac{\frac{E_{v3}-E_{v2}}{T_{av3}-T_{av2}} - \frac{E_{v2}-E_{v1}}{T_{av2}-T_{av1}}}{T_{av3}-T_{av1}}}{T_{av4}-T_{av1}} - ...\right)$$

etcétera.

El caso de c_{a0}, c_{a1}, c_{a2}, c_{a3}, ... es análogo.

Para el vapor de agua, suponiendo primero $c_{v2}=c_{v3}=...=0$: según Boltz y Tuve (indirectamente, refiriéndose a la saturación), $P_{av}=1.013\cdot10^5$, $T_{av1}=233.2$ y $T_{av2}=363.2$ implican $E_{v1}=2.290\cdot10^6\cdot m_v$ y $E_{v2}= 2.493\cdot10^6\cdot m_v$; eso da $c_{v1}\approx1561$, $c_{v0}\approx1.926\cdot10^6$ y:

$$P_{av} = 1.013\cdot10^5 \quad\rightarrow\quad \frac{E_v}{m_v} \approx 1.926\cdot10^6 + 1561\cdot T_{av} \qquad \text{(a5')}$$

La tabla de la figura A6 ilustra la calidad de la aproximación (a5').

Podemos mejorar la aproximación suponiendo sólo $c_{a3}=...=0$, lo que pide usar otro valor de T_{av} y, consecuentemente, otro de E_v/m_v. Como los errores son algo mayores cuando T_{av} se halla a la izquierda de su valor central, conviene que el valor elegido de T_{av} esté en esa zona. Según la tabla de la figura A6, $T_{av1}=233.2$, $T_{av2}=283.2$ y $T_{av3}=363.2$ implican $E_{v1}=2.290\cdot10^6\cdot m_v$, $E_{v2}=2.374\cdot10^6\cdot m_v$ y $E_{v3}=2.493\cdot10^6\cdot m_v$; eso da $c_{v2}\approx-4.981$, $c_{v1}\approx4532$, $c_{v0}\approx1.504\cdot106$ y:

CC BY NC ND

$$P_{av} = 1.013 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \frac{E_v}{m_v} \approx 1{,}504 \cdot 10^6 + 4532 \cdot 10^3 \cdot T_{av} - 4.981 \cdot T_{av}^2 \qquad \text{(a5'')}$$

La tabla de la figura A7 ilustra la calidad de la aproximación (a5'').

T_{av}	E_v/m_v (Boltz y Tuve) *	E_v/m_v aprox.(a5')
233.2	$2.290 \cdot 10^6$	$2.290 \cdot 10^6$
243.2	$2.320 \cdot 10^6$	$2.306 \cdot 10^6$
253.2	$2.348 \cdot 10^6$	$2.321 \cdot 10^6$
263.2	$2.362 \cdot 10^6$	$2.337 \cdot 10^6$
273.2	$2.374 \cdot 10^6$	$2.352 \cdot 10^6$
283.2	$2.388 \cdot 10^6$	$2.368 \cdot 10^6$
293.2	$2.402 \cdot 10^6$	$2.384 \cdot 10^6$
303.2	$2.413 \cdot 10^6$	$2.399 \cdot 10^6$
313.2	$2.428 \cdot 10^6$	$2.415 \cdot 10^6$
323.2	$2.442 \cdot 10^6$	$2.431 \cdot 10^6$
333.2	$2.455 \cdot 10^6$	$2.446 \cdot 10^6$
343.2	$2.468 \cdot 10^6$	$2.462 \cdot 10^6$
353.2	$2.481 \cdot 10^6$	$2.477 \cdot 10^6$
363.2	$2.493 \cdot 10^6$	$2.493 \cdot 10^6$

Fig. A6: Energía del vapor cuando $m_v=(m_v)_{sat}$; primera aproximación (* considerando $E_v/m_v = H_v/m_v - P_v \cdot V/m_v \approx H_v/m_v - 1.3803 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}/\mu_v$ y $H_v/m_v = (H_{av}/m_a - H_a/m_a)/(m_v/m_a)$, donde H indica la entalpía)

T	E_v/m_v (Boltz y Tuve) *	E_v/m_v aprox.(a5'')
233.2	$2.290 \cdot 10^6$	$2.293 \cdot 10^6$
243.2	$2.320 \cdot 10^6$	$2.315 \cdot 10^6$
253.2	$2.348 \cdot 10^6$	$2.335 \cdot 10^6$
263.2	$2.362 \cdot 10^6$	$2.355 \cdot 10^6$
273.2	$2.374 \cdot 10^6$	$2.373 \cdot 10^6$
2 83.2	$2.388 \cdot 10^6$	$2.391 \cdot 10^6$
293.2	$2.402 \cdot 10^6$	$2.408 \cdot 10^6$
303.2	$2.413 \cdot 10^6$	$2.423 \cdot 10^6$
313.2	$2.428 \cdot 10^6$	$2.438 \cdot 10^6$
323.2	$2.442 \cdot 10^6$	$2.451 \cdot 10^6$
333.2	$2.455 \cdot 10^6$	$2.464 \cdot 10^6$
343.2	$2.468 \cdot 10^6$	$2.476 \cdot 10^6$
353.2	$2.481 \cdot 10^6$	$2.486 \cdot 10^6$
363.2	$2.493 \cdot 10^6$	$2.496 \cdot 10^6$

Fig. A7: Energía del vapor cuando $m_v=(m_v)_{sat}$; segunda aproximación (* considerando $E_v/m_v = H_v/m_v - P_v \cdot V/m_v \approx H_v/m_v - 1.3803 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}/\mu_v$ y $H_v/m_v = (H_{av}/m_a - H_a/m_a)/(m_v/m_a)$, donde H indica la entalpía)

Para los gases secos, suponiendo $c_{a2}=c_{a3}...=0$: según Boltz y Tuve, $P_{av}=1.013 \cdot 10^5$, $T_{av1}=233.2$ y $T_{av2}=363.2$ implican $E_{a1}=-8.927 \cdot 10^4 \cdot m_a$ y $E_{a2}=4.337 \cdot 10^3 \cdot m_a$; eso da $c_{a1} \approx 720$, $c_{a0} \approx -2.572 \cdot 10^5$ y:

$$P_{av} = 1.013 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \frac{E_a}{m_a} \approx -2.572 \cdot 10^5 + 720 \cdot T_{av} \qquad \text{(a6)}$$

La tabla de la figura A8 ilustra la calidad de la aproximación (a6).

CC BY NC ND

Tav	*Ea/ma* (Boltz y Tuve)	*Ea/ma* aprox.(a6)
233.2	$-8.930\cdot10^4$	$-8.930\cdot10^4$
243.2	$-8.211\cdot10^4$	$-8.210\cdot10^4$
253.2	$-7.492\cdot10^4$	$-7.490\cdot10^4$
263.2	$-6.774\cdot10^4$	$-6.770\cdot10^4$
273.2	$-6.055\cdot10^4$	$-6.050\cdot10^4$
283.2	$-5.336\cdot10^4$	$-5.330\cdot10^4$
293.2	$-4.617\cdot10^4$	$-4.610\cdot10^4$
303.2	$-3.897\cdot10^4$	$-3.890\cdot10^4$
313.2	$-3.177\cdot10^4$	$-3.170\cdot10^4$
323.2	$-2.457\cdot10^4$	$-2.450\cdot10^4$
333.2	$-1.737\cdot10^4$	$-1.730\cdot10^4$
343.2	$-1.015\cdot10^4$	$-1.010\cdot10^4$
353.2	$-2.927\cdot10^3$	$-2.896\cdot10^3$
363.2	$4.333\cdot10^3$	$4.304\cdot10^3$

Fig. A8: Energía de los gases secos (* considerando $E_a/m_a=H_a/m_a-P_a\cdot V/m_a\approx H_a/m_a-1.3803\cdot10^{-23}\cdot T_{av}/\mu_a$)

Según (a5'') y (a6):

$$P_{av}=1.013\cdot10^5$$

$$\rightarrow \quad \frac{E_{av}}{m_v+m_a}\approx\left(-2.572\cdot10^5+720\cdot T_{av}\right)\cdot\frac{m_a}{m_v+m_a}+\left(1.504\cdot10^6+4532\cdot T_{av}-4.981\cdot T_{av}^2\right)\cdot\frac{m_v}{m_v+m_a} \qquad \text{(a7'')}$$

donde E_{av} ($=E_v+E_a$) es la energía total en el aire, en [J].

Pero, para respetar la causalidad, a lo menos deberíamos despejar (a7'') así:

$$P_{av}=1.013\cdot10^5$$

$$\rightarrow T_{av}=72.27\cdot\left(6.292\cdot m_v+m_a\right)-\sqrt{\begin{matrix}72.27^2\cdot\left(6.292\cdot m_v+m_a\right)^2\\-0.2007\cdot\left(1.504\cdot10^6\cdot\left(m_v+m_a\right)-E_{av}\right)\end{matrix}} \qquad \text{(a8'')}$$

Como (a8'') es bastante difícil, volvamos a (a6) y (a5´) argumentando que las imprecisiones mayores de (a5') ocurren cuando la temperatura es baja y el vapor es poco, y, por consiguiente, quizás perturben poco al cómputo de la energía total.

Según (a5´) y (a6):

$$P_{av}=1.013\cdot10^5$$

$$\rightarrow \quad \frac{E_{av}}{m_v+m_a}\approx\left(-2.572\cdot10^5+720\cdot T_{av}\right)\cdot\frac{m_a}{m_v+m_a}+\left(1.926\cdot10^6+1561\cdot T_{av}\right)\cdot\frac{m_v}{m_v+m_a} \qquad \text{(a7')}$$

Las tablas de las figuras A9 y A10, anexas al final de este apéndice, ilustran la calidad de la aproximación (a7').

De (a7'):

$$P_{av}=1.013\cdot10^5$$

$$\rightarrow T_{av}\approx\frac{E_{av}-\left(-2.572\cdot10^5\cdot m_a+1.926\cdot10^6\cdot m_v\right)}{720\cdot m_a+1561\cdot m_v} \qquad \text{(a8')}$$

BY NC ND

Así, podemos acercarnos a la causalidad con (a8'), otro despeje de la representación ideal de los gases con que obtuvimos (a4), otro despeje de (a2), y otro de (a3):

$$T_{av} \approx \frac{E_{av} - \left(-2.572 \cdot 10^{5} \cdot m_a + 1.926 \cdot 10^{6} \cdot m_v\right)}{720 \cdot m_a + 1561 \cdot m_v} \qquad \text{(a9)}$$

$$P_{av} \approx \left(\frac{m_a}{4.808 \cdot 10^{-26}} + \frac{m_v}{2.991 \cdot 10^{-26}} \right) \cdot \frac{1.3803 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}}{V} \qquad \text{(a10)}$$

$$\left(m_v\right)_{sat} \approx \frac{0.6221 \cdot m_a}{2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{\frac{3333}{T_{av} - 64,6}} - 1} \qquad \text{(a11)}$$

$$\varphi_{av} \approx 2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{\frac{3333}{T_{av} - 64,6}} \cdot \frac{m_v}{0.6221 \cdot m_a + m_v} \qquad \text{(a12)}$$

En (a9), $-2.572 \cdot 10^5$ y $1.926 \cdot 10^6$ son energías específicas de referencia y pueden cambiarse.

Por otro lado, (a12) o (a11) puede declararse redundante advirtiendo que $m_v = (m_v)_{sat}$ implica $\varphi_{av} = 1$ y $\varphi_{av} = 1$ implica $m_v = (m_v)_{sat}$. Lo que falta claramente, es una ecuación tajante para la precipitación cuando $1 < \varphi_{av}$ o, equivalentemente, $(m_v)_{sat} < m_v$.

CC BY NC ND

T_{av}	0	$2.334 \cdot 10^{-4}$	$1.606 \cdot 10^{-3}$	$7.658 \cdot 10^{-3}$	$2.731 \cdot 10^{-2}$	$8.678 \cdot 10^{-2}$	$2.788 \cdot 10^{-1}$	1.416	m_v/m_a
233.2	$-8.930 \cdot 10^{4}$								
243.2	$-8.211 \cdot 10^{4}$	$-8.152 \cdot 10^{4}$							
253.2	$-7.492 \cdot 10^{4}$	$-7.433 \cdot 10^{4}$							
263.2	$-6.774 \cdot 10^{4}$	$-6.714 \cdot 10^{4}$	$-6.382 \cdot 10^{4}$						
273.2	$-6.055 \cdot 10^{4}$	$-5.996 \cdot 10^{4}$	$-5.663 \cdot 10^{4}$						
283.2	$-5.336 \cdot 10^{4}$	$-5.276 \cdot 10^{4}$	$-4.942 \cdot 10^{4}$	$-3.478 \cdot 10^{4}$					
293.2	$-4.617 \cdot 10^{4}$	$-4.558 \cdot 10^{4}$	$-4.223 \cdot 10^{4}$	$-2.754 \cdot 10^{4}$					
303.2	$-3.897 \cdot 10^{4}$	$-3.838 \cdot 10^{4}$	$-3.502 \cdot 10^{4}$	$-2.032 \cdot 10^{4}$	$2.622 \cdot 10^{4}$				
313.2	$-3.177 \cdot 10^{4}$	$-3.117 \cdot 10^{4}$	$-2.781 \cdot 10^{4}$	$-1.306 \cdot 10^{4}$	$3.363 \cdot 10^{4}$				
323.2	$-2.457 \cdot 10^{4}$	$-2.395 \cdot 10^{4}$	$-2.058 \cdot 10^{4}$	$-5.784 \cdot 10^{3}$	$4.103 \cdot 10^{4}$	$1.724 \cdot 10^{5}$			
333.2	$-1.737 \cdot 10^{4}$	$-1.676 \cdot 10^{4}$	$-1.338 \cdot 10^{4}$	$1.450 \cdot 10^{3}$	$4.837 \cdot 10^{4}$	$1.801 \cdot 10^{5}$			
343.2	$-1.015 \cdot 10^{4}$	$-9.539 \cdot 10^{4}$	$-6.148 \cdot 10^{3}$	$8.714 \cdot 10^{3}$	$5.575 \cdot 10^{4}$	$1.878 \cdot 10^{5}$	$5.301 \cdot 10^{5}$		
353.2	$-2.927 \cdot 10^{3}$	$-2.273 \cdot 10^{3}$	$1.127 \cdot 10^{3}$	$1.602 \cdot 10^{4}$	$6.317 \cdot 10^{4}$	$1.955 \cdot 10^{5}$	$5.386 \cdot 10^{5}$		
363.2	$4.333 \cdot 10^{3}$	$4.920 \cdot 10^{3}$	$8.326 \cdot 10^{3}$	$2.325 \cdot 10^{4}$	$7.049 \cdot 10^{4}$	$2.031 \cdot 10^{5}$	$5.469 \cdot 10^{5}$	$1.463 \cdot 10^{6}$	

$E_{av}/(m_v+m_a)$
(Boltz y Tuve)

Fig. A9: Temperatura, humedad y energía del aire, según Boltz y Tuve (considerando E_v/m_v según las tablas de las figuras A6 y A7, en la saturación y aún fuera de ella)

BY NC ND

T_{av}	0	$2.334 \cdot 10^{-4}$	$1.606 \cdot 10^{-3}$	$7.658 \cdot 10^{-3}$	$2.731 \cdot 10^{-2}$	$8.678 \cdot 10^{-2}$	$2.788 \cdot 10^{-1}$	1.416	m_v/m_a
233.2	$-8.930 \cdot 10^{4}$								
243.2	$-8.210 \cdot 10^{4}$	$-8.154 \cdot 10^{4}$							
253.2	$-7.490 \cdot 10^{4}$	$-7.433 \cdot 10^{4}$							
263.2	$-6.770 \cdot 10^{4}$	$-6.713 \cdot 10^{4}$	$-6.384 \cdot 10^{4}$						
273.2	$-6.050 \cdot 10^{4}$	$-5.993 \cdot 10^{4}$	$-5.663 \cdot 10^{4}$						
283.2	$-5.330 \cdot 10^{4}$	$-5.273 \cdot 10^{4}$	$-4.941 \cdot 10^{4}$	$-3.489 \cdot 10^{4}$					
293.2	$-4.610 \cdot 10^{4}$	$-4.553 \cdot 10^{4}$	$-4.220 \cdot 10^{4}$	$-2.763 \cdot 10^{4}$					
303.2	$-3.890 \cdot 10^{4}$	$-3.832 \cdot 10^{4}$	$-3.499 \cdot 10^{4}$	$-2.037 \cdot 10^{4}$	$2.591 \cdot 10^{4}$				
313.2	$-3.170 \cdot 10^{4}$	$-3.112 \cdot 10^{4}$	$-2.777 \cdot 10^{4}$	$-1.310 \cdot 10^{4}$	$3.333 \cdot 10^{4}$				
323.2	$-2.450 \cdot 10^{4}$	$-2.392 \cdot 10^{4}$	$-2.056 \cdot 10^{4}$	$-5.838 \cdot 10^{3}$	$4.076 \cdot 10^{4}$	$1.715 \cdot 10^{5}$			
333.2	$-1.730 \cdot 10^{4}$	$-1.672 \cdot 10^{4}$	$-1.335 \cdot 10^{4}$	$1.426 \cdot 10^{3}$	$4.818 \cdot 10^{4}$	$1.794 \cdot 10^{5}$			
343.2	$-1.010 \cdot 10^{4}$	$-9.517 \cdot 10^{3}$	$-6.134 \cdot 10^{3}$	$8.690 \cdot 10^{3}$	$5.561 \cdot 10^{4}$	$1.873 \cdot 10^{5}$	$5.288 \cdot 10^{5}$		
353.2	$-2.896 \cdot 10^{3}$	$-2.315 \cdot 10^{3}$	$1.080 \cdot 10^{3}$	$1.595 \cdot 10^{4}$	$6.303 \cdot 10^{4}$	$1.952 \cdot 10^{5}$	$5.378 \cdot 10^{5}$		
363.2	$4.304 \cdot 10^{3}$	$4.887 \cdot 10^{3}$	$8.293 \cdot 10^{3}$	$2.322 \cdot 10^{4}$	$7.045 \cdot 10^{4}$	$2.030 \cdot 10^{5}$	$5.468 \cdot 10^{5}$	$1.463 \cdot 10^{6}$	

$E_{av}/(m_v+m_a)$ aprox.(a7')

Fig. A10: Temperatura, humedad y energía del aire, según la aproximación (a7')

BY NC ND

65.0

UNA PISCINA [74]
(MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Desde mediados del siglo 20, la Universidad Técnica Federico Santa María tiene una piscina institucional que está sujeta a normas legales. Diariamente, por ejemplo, se le debe filtrar y reciclar el equivalente al doble de su volumen de agua (2·750=1500 metros cúbicos), y se le debe reemplazar un trigésimo de ese volumen por agua fresca (750/30=25 metros cúbicos); si su horario de funcionamiento es completo se le debe poner (1500·1000/(24·3600)=17 kilogramos de agua reciclada y 25·1000/(24·3600)=0.29 de agua fresca, por segundo; si su horario es parcial, entre las 7 y las 23 horas, se le debe poner 1500·1000/(16·3600)=26 kilogramos de agua reciclada y 25·1000/(16·3600)=0.43 de agua fresca, por segundo. Tales caudales de agua reciclada y fresca se deben repartir por varias pasadas (12, con diámetros cercanos a 5 centímetros), de manera que la velocidad del agua no supere 1 metro por segundo.

Para ser una piscina pública, la temperatura del agua en su interior debería mantenerse entre 25 y 26 grados Celsius. Se piensa que esto podría cumplirse poniendo un calefactor entre los filtros y las pasadas descritas recién, de manera que los caudales repartidos colaboren en homogeneizar la temperatura.

Además, para ser una piscina pública, la temperatura del aire que la cubre debería mantenerse entre 24 y 27 grados, con humedad baja. Esto podría cumplirse construyendo un techo sobre la piscina [75] e instalando un secador de aire bajo ese techo. Para que la fracción del CO_2 producido por los ocupantes en el aire que cubre a la piscina sea baja (menor que $1 \cdot 10^{-4}$ kilogramos por kilogramo), debería instalarse también un ventilador que asegure un caudal de aire fresco adecuado (cercano a 1.2 kilogramos por segundo, considerando el número de ocupantes de la piscina).

Para disminuir costos, se piensa que el calefactor podría ser complementado por colectores solares, que suministren potencia térmica adicional [76] , y por un cobertor flotante retráctil, que evite perder potencia por evaporación mientras la piscina está en desuso (si el horario de funcionamiento es parcial).

Fig. 1: La piscina

[74] Adaptación de: J. Álvarez, 2000, Estudios preliminares para calentar una piscina, *Memoria, Dep. Electrónica, Univ. Santa María*, Valparaíso.

[75] De: O. Jalil, 1998, Evaluación de alternativas de techado para la piscina U.S.M., *Memoria, Dep. Obras Civiles, Univ. Santa María*, Valparaíso

[76] De: L. Rivera, 1997, Determinación de la rentabilidad de instalaciones solares para temperado de piscinas para condiciones nacionales, *Memoria, Dep. Mecánica, Univ. Santa María*, Valparaíso

CC BY NC ND

Interesa predecir las evoluciones de la temperatura del agua de la piscina, y de la temperatura y la humedad relativa del aire que la cubre, en varias condiciones: con calefactor o sin él, con cobertor o sin él, con techo o sin él, con secador o sin él, con colectores solares o sin ellos.

Como el dibujo de la estructura espacial es bastante enredado, saltémoslo.

t es el tiempo, en [s].

$T_p(t)$ es la temperatura del agua de la piscina, en [K]; $T_{av}(t)$ es la temperatura del aire húmedo que cubre a la piscina, en [K]; $\phi_{av}(t)$ es la humedad relativa del aire húmedo que cubre a la piscina, en tanto por uno:

$$T_p(t) \approx \frac{\frac{E_p(t)}{m_p} + 1.143 \cdot 10^6}{4.186 \cdot 10^3} \tag{1}$$

$$T_{av}(t) \approx \begin{cases} T_{atm}(t) & \text{si no hay techo} \\ \dfrac{E_{av}(t) - \left(-2.572 \cdot 10^5 \cdot m_a(t) + 1.926 \cdot 10^6 \cdot m_v(t)\right)}{720 \cdot m_a(t) + 1561 \cdot m_v(t)} & \text{si hay techo} \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_{av}(t) \approx \begin{cases} 2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{\frac{3333}{T_{atm}(t) - 64{,}6}} \cdot \dfrac{H_{atm}(t)}{0.6221 + H_{atm}(t)} & \text{si no hay techo} \\ 2.039 \cdot 10^{-5} \cdot e^{\frac{3333}{T_{av}(t) - 64{,}6}} \cdot \dfrac{H_{av}(t)}{0.6221 + H_{av}(t)} & \text{si hay techo} \end{cases} \tag{3}$$

$E_p(t)$ es la energía (térmica) en el agua de la piscina, en [J]; m_p es la masa en el agua de la piscina (bastante constante porque hay un caudal de rebase que casi compensa a los otros), en [kg]; $T_{atm}(t)$ es la temperatura atmosférica, en [K]; $E_{av}(t)$ es la energía en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [J]; $m_a(t)$ es la masa de aire seco en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [kg]; $m_v(t)$ es la masa de vapor de agua en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [kg]; $H_{atm}(t)$ es la humedad absoluta atmosférica, en [kg (de vapor) kg^{-1} (de aire húmedo)]; $H_{av}(t)$ es la humedad absoluta del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [kg (de vapor) kg^{-1} (de aire seco)]:

$$E_p(t) \approx E_p(0) + \int_0^t \left\{ \begin{matrix} w_f(\tau) + w_{re}(\tau) + w_{col}(\tau) + w_{calef}(\tau) + w_b(\tau) \\ -w_r(\tau) - w_{ev}(\tau) - w_{cs}(\tau) - w_{rs}(\tau) - w_c(\tau) \end{matrix} \right\} \cdot d\tau \tag{4}$$

$$m_p \approx 7.5 \cdot 10^5 \tag{5}$$

$$T_{atm}(t) \approx 286 + 1.5 \cdot \sin\left(4.848 \cdot 10^{-6} \cdot t\right) \tag{6}$$ [77]

[77] Según datos invernales de temperatura (simplificados) del laboratorio de energía solar de la Universidad Técnica Federico Santa María, en Valparaíso, y de la base Torquemada de la Armada de Chile, en Concón.

CC BY NC ND

$$E_{av}(t) \approx E_{av}(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} w_{ae}(\tau) + w_{ve}(\tau) + w_{ev}(\tau) + w_{\sec}(\tau) \\ -w_{as}(\tau) - w_{vs}(\tau) - w_{techo}(\tau) \end{pmatrix} \cdot d\tau \quad (7)$$

$$m_a(t) \approx m_a(0) + \int_0^t \left(q_{ae}(\tau) - q_{as}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (8)$$

$$m_v(t) \approx m_v(0) + \int_0^t \left(q_{ve}(\tau) + q_{ev}(\tau) - q_{vs}(\tau) - q_{\sec}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (9)$$

$$H_{atm}(t) \approx 6.1 \cdot 10^{-3} + 1.7 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(1.212 \cdot 10^{-6} \cdot \left(t - 1.0 \cdot 10^{6}\right)\right) + 1.1 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(4.848 \cdot 10^{-6} \cdot \left(t - 1.5 \cdot 10^{5}\right)\right) \quad (10)$$

$$H_{av}(t) \approx \frac{m_v(t)}{m_a(t)} \quad (11)$$

$E_p(0)$ es la energía en el agua de la piscina inicialmente, en [J]; $w_f(t)$ es la potencia del ambiente a la piscina, con el agua fresca, en [W]; $w_{re}(t)$ es la potencia del ambiente a la piscina, por las radiaciones del cielo y del Sol (si no hay techo) o del techo (si hay techo), en [W]; $w_{col}(t)$ es la potencia del ambiente a la piscina, por los colectores solares (si hay colectores), en [W]; $w_{calef}(t)$ es la potencia del ambiente a la piscina, por el calefactor (si hay calefactor), en [W]; $w_b(t)$ es la potencia del ambiente a la piscina, por el funcionamiento de la bomba para el agua reciclada y la fresca, en [W]; $w_r(t)$ es la potencia de la piscina al ambiente, con el agua rebasada, en [W]; $w_{ev}(t)$ es la potencia de la piscina a la atmósfera (si no hay techo) o al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), con el agua evaporada, en [W]; $w_{cs}(t)$ es la potencia de la piscina a la atmósfera (si no hay techo) o al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), a través de la superficie del agua, en [W]; $w_{rs}(t)$ es la potencia de la piscina al ambiente, por la radiación del agua, en [W]; $w_c(t)$ es la potencia de la piscina al ambiente, a través de las paredes y el piso de la piscina, en [W]; $E_{av}(0)$ es la energía en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) inicialmente, en [J]; $w_{ae}(t)$ es la potencia de la atmósfera al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), con el aire seco ventilado, en [W]; $w_{ve}(t)$ es la potencia de la atmósfera al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), con el vapor ventilado, en [W]; $w_{sec}(t)$ es la potencia del ambiente al aire que cubre a la piscina (si hay techo), por el funcionamiento del secador de aire (si hay secador), en [W]; $w_{as}(t)$ es la potencia del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) a la atmósfera, con el aire seco ventilado, en [W]; $w_{vs}(t)$ es la potencia del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) a la atmósfera, con el vapor de agua ventilado, en [W]; $w_{techo}(t)$ es la potencia del aire que cubre a la piscina (si hay techo) a la atmósfera, por el techo, en [W]; $m_a(0)$ es la masa de aire seco en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) inicialmente, en [kg]; $q_{ae}(t)$ es el caudal de aire seco de la atmósfera al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), por ventilación, en [kg s^{-1}]; $q_{as}(t)$ es el caudal de aire seco del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) a la atmósfera, por ventilación, en [kg s^{-1}]; $m_v(0)$ es la masa de vapor de agua en el aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) inicialmente, en [kg]; $q_{ve}(t)$ es el caudal de vapor de agua de la atmósfera al aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), por ventilación, en [kg s^{-1}]; $q_{ev}(t)$ es el caudal de vapor de agua de la piscina a la atmósfera (si no hay techo) o al aire que cubre a la piscina (si hay techo), por evaporación, en [kg s^{-1}]; $q_{vs}(t)$ es el caudal de vapor de agua del aire húmedo que cubre a la piscina (si

BY NC ND

hay techo) a la atmósfera, por ventilación, en [kg s^{-1}]; $q_{sec}(t)$ es el caudal de vapor de agua del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo) al ambiente, por secado (si hay secador), en [kg s^{-1}]:

$$E_p(0) \approx 4.1 \cdot 10^{10} \tag{12}$$

$$w_f(t) \approx q_f(t) \cdot \left(-1.143 \cdot 10^6 + 4.186 \cdot 10^3 \cdot T_{atm}(t)\right) \tag{13}$$

$$w_{re}(t) \approx \begin{cases} \left(0.96 \cdot 5.669 \cdot 10^{-8} \cdot T_{cielo}{}^4(t) + \alpha \cdot i_S(t)\right) \cdot A & \text{si no hay techo} \\ 0.96 \cdot 5.669 \cdot 10^{-8} \cdot T_{techo}{}^4(t) \cdot A & \text{si hay techo} \end{cases} \tag{14}$$ [78]

$$w_{col}(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{si no hay colectores} \\ 0.744 \cdot \left(i_S(t) - 6.01 \cdot \left(T_p(t) - T_{atm}(t)\right)\right) & \\ \cdot A_{col} \cdot \begin{cases} 1 & \text{si } 6.01 \cdot \left(T_p(t) - T_{atm}(t)\right) < i_S(t) \\ 0 & \text{si } i_S(t) \le 6.01 \cdot \left(T_p(t) - T_{atm}(t)\right) \end{cases} & \text{si hay colectores} \end{cases} \tag{15}$$ [79]

$$w_{calef}(t+600) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } 299.7 < T_p(t) \\ w_{calef}(t) \cdot a & \text{si } 298.7 \le T_p(t) \le 299.7 \\ W_{calef} \cdot a & \text{si } T_p(t) \le 298.7 \end{cases} \tag{16}$$ [80]

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si el horario es completo} \\ \begin{cases} 1 \text{ de 7 a 23 hrs.} \\ 0 \text{ de 23 a 7 hrs.} \end{cases} & \text{si el horario es parcial} \end{cases}$$

$$w_b(t) \approx 0 \tag{17}$$ [81]

$$w_r(t) \approx q_r(t) \cdot \frac{E_p(t)}{m_p} \tag{18}$$

[78] 0.96 es el coeficiente de emisividad media del agua; $5.669 \cdot 10^{-8}$ es la constante de Stefan y Boltzmann en [W m^{-2} K^{-4}].

[79] De: A. Vargas, 1996, Modelación del comportamiento de una instalación solar para temperado de piscinas bajo distintas condiciones de uso y en distintas ciudades de Chile, *Memoria, Dep. Mecánica, Univ. Santa María*, Valparaíso; suponiendo que un control binario conecta o desconecta a los colectores solares si éstos pueden aportar potencia o no.

[80] Suponiendo que un control binario con histéresis activa o desactiva la potencia si la temperatura está demasiado baja o demasiado alta. Confiando en la homogenización de la temperatura del agua por la repartición de caudales repartidos, bastaría complementar el control con un termómetro puesto en la entrada de la bomba con que se recicla el agua.

[81] De: C. Smith, G. Löf y R. Jones, 1993, Energy requirements and potential savings for heated indoor swimming pools, *Ashrae Trans.* **99(2)**, p.864: w_b siempre es menor que 2% de $w_i + w_{re} + w_{col} + w_{calef} + w_b$.

CC BY NC ND

$$w_{ev}(t) \approx \begin{cases} \left(1 + 0.70 \cdot \dfrac{n(t)}{n_{max}}\right) \cdot (6.56 \cdot 10^{-2} + 5.79 \cdot 10^{-2} \cdot v_a(t)) \cdot \left(4.969 \cdot 10^{9} \cdot e^{-\frac{3333}{T_p(t) - 64.6}} - P_v(t)\right) \cdot A & \text{si no se usa cobertor flotante} \\ \left(1 + 0.70 \cdot \dfrac{n(t)}{n_{max}}\right) \cdot (6.56 \cdot 10^{-2} + 5.79 \cdot 10^{-2} \cdot v_a(t)) \cdot \left(4.969 \cdot 10^{9} \cdot e^{-\frac{3333}{T_p(t) - 64.6}} - P_v(t)\right) \cdot A \cdot \begin{cases} 1 \text{ de 7 a 23 hrs.} \\ 0 \text{ de 23 a 7 hrs.} \end{cases} & \text{si se usa cobertor flotante (y el horario es parcial)} \end{cases} \quad (19)$$ [82]

---

[82] De: J. Dalton, 1834, *Meteorological observations and essays*:

$q_{ev} \approx C \cdot (P_{v,sat,Tp} - P_v) \cdot A$,

donde C es un coeficiente dependiente de condiciones como la velocidad y la temperatura del aire, en [kg m^2 s^{-1} N^{-1}], $P_{v,sat,Tp}(t)$ es la presión parcial del vapor de agua que saturaría al aire si éste tuviese la temperatura del agua de la piscina, en [N m^{-2}], y $P_v(t)$ es la presión parcial del vapor de agua en la atmósfera (si no hay techo) o en el aire que cubre a la piscina (si hay techo), en [N m^{-2}].

De: L. Boelter, H. Gordon y J. Griffin, 1946, Free evaporation into air of water from a free horizontal quiet surface, *Ind. And Eng. Chem.*, 38(6), p.596: cuando la velocidad del aire es 0,

$q_{ev} \approx 1.06 \cdot 10^{-2} \cdot (\rho_{v,sat,Tp} - \rho_v)^{1.25} \cdot A$,

donde $\rho_{v,sat,Tp}$ es la concentración del vapor de agua que saturaría al aire si este tuviese la temperatura del agua de la piscina, en [kg m^{-3}]; y ρ_v es la concentración del vapor de agua en la atmósfera (si no hay techo) o en el aire que cubre a la piscina (si hay techo), en [kg m^{-3}].

De: B. Sill, 1983, Free and forced convective effects on evaporation, *J. Hydr. Eng. Asce*, **109(9)**, p.1216:

$q_{ev} \approx \left(1.7 \cdot 10^{-8} \cdot (T_p - T_a)^{0.333} + 1.5 \cdot 10^{-8} \cdot v_a\right) \cdot (P_{v,sat,Tp} - P_v) \cdot A$

De: M. Paulker, D. Tang, S. Meter y Abdel-Khalik, 1993, A novel method for measuring water evaporation into still air, *Ashrae Trans.*, **99(1)**, p.297: cuando la velocidad del aire es 0,

$q_{ev} \approx 9.72 \cdot 10^{-3} \cdot (\rho_{v,sat,Tp} - \rho_v)^{1.237} \cdot A$

De: W. Carrier, 1918, The temperature of evaporation, *Ashrae Trans.*, **24**, p.25:

$w_{ev} \approx (8.87 \cdot 10^{-2} + 7.82 \cdot 10^{-2} \cdot v_a) \cdot (P_{v,sat,Tp} - P_v) \cdot A$

De: P. Ryan, D. Harleman y K. Stolzenbach, 1983, Surface heat loss from cooling ponds, *Water resources research*, **10(5)**, p.930:

$w_{ev} \approx (2.65 \cdot 10^{-2} \cdot (T_1 - T_2)^{0.333} + 3.06 \cdot 10^{-2} v_a) \cdot (P_{v,sat,Tp} - P_v) \cdot A$

$T_1 = \dfrac{T_p}{1 - 0.378 \cdot P_{v,sat,Tp} / P_{atm}}$

$T_2 = \dfrac{T_a}{1 - 0.378 \cdot P_v / P_{atm}}$

De: C. Smith, G. Löf, R. Jones, 1998, Rates of evaporation from swimming pools in active use, *Ashrae Trans.* **104(1)**, p.514: la fórmula de Carrier, 1918, debe multiplicarse por un factor de agitación, que es 0.74 si la piscina no está ocupada y 1.26 si está llena de ocupantes.

cc BY NC ND

$$w_{cs}(t) \approx \left(3.1 + 4.1 \cdot v_a(t)\right) \cdot (T_p(t) - T_{av}(t)) \cdot A \quad (20)$$ [83]

$$w_{rs}(t) \approx 0.96 \cdot 5.669 \cdot 10^{-8} \cdot T_p^4(t) \cdot A \quad (21)$$

$$w_c(t) \approx 0 \quad (22)$$

$$E_{av}(0) \approx -7{,}1 \cdot 10^7 \quad (23)$$

$$w_{ae}(t) \approx q_{ae}(t) \cdot \left(-2.572 \cdot 10^5 + 720 \cdot T_{atm}(t)\right) \quad (24)$$

$$w_{ve}(t) \approx q_{ve}(t) \cdot \left(1.504 \cdot 10^6 + 4.532 \cdot 10^3 \cdot T_{atm}(t) - 4.981 \cdot T_{atm}^2(t)\right) \quad (25)$$

$$w_{\text{sec}}(t+600) \approx \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varphi_a(t) < 0.45 \\ w_{\text{sec}}(t) \cdot a & \text{si} \ 0.45 \le \varphi_a(t) \le 0.65 \\ W_{\text{sec}} \cdot a & \text{si} \quad 0.65 < \varphi_a(t) \end{cases} \quad (26)$$ [84]

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si el horario es completo} \\ \begin{cases} \text{1 de 7 a 23 hrs.} \\ \text{0 de 23 a 7 hrs.} \end{cases} & \text{si el horario es parcial} \end{cases}$$

$$w_{as}(t) \approx q_{as}(t) \cdot \left(-2.572 \cdot 10^5 + 7.200 \cdot 10^2 \cdot T_{av}(t)\right) \quad (27)$$

$$w_{vs}(t) \approx q_{vs}(t) \cdot \left(1.504 \cdot 10^6 + 4.532 \cdot 10^3 \cdot T_{av}(t) - 4.981 \cdot T_{av}^2(t)\right) \quad (28)$$

$$w_{techo}(t) = h_{techo} \cdot (T_{av}(t) - T_{atm}(t)) \cdot A_{techo} \quad (29)$$

$$m_a(0) \approx 2.3 \cdot 10^3 \quad (30)$$

$$q_{ae}(t) \approx q_{ave}(t) \cdot \frac{1}{1 + H_{atm}(t)} \quad (31)$$

De: P. Yilmaz y H. Aybar, 1999, Evaluation of the correlations for predicting evaporative loss from a water body, *Ashrae Annual Meeting*, Seattle: la fórmula de Ryan, Harleman y Stolzenbach, 1983, da un valor máximo y la de Carrier, 1918, un valor medio.
Aquí elegimos la fórmula de Carrier, 1918, acogiendo el factor de Smith, Löf y Jones, 1998, para justificar lo de los valores máximo, medio y mínimo de Yilmaz y Aybar. Además, calculamos $P_{v,sat,Tp} \approx 4.969 \cdot 10^9 / e^{3333/(Tp-64.6)}$ y reemplazamos esto en la fórmula de Carrier, 1918. Y, como ésta define la potencia w_{ev}, decidimos el caudal q_{ev} partir de ella.

[83] De: Australian Standards, As, 1989, Solar heating systems for swimming pools, *Standard 3634*, North Sydney, Australia.
De: American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Ashrae, 1990, Ventilation for acceptable indoor air quality, *Ashrae standards*, Atlanta: $w_{cs} \approx (5+3.8 \cdot v_a) \cdot (T_p - T_a) \cdot A$. Pero de: B. Molinaux, B. Lachal y O. Guisan, 1993, Thermal analysis of five outdoor swimming pools heated by unglazed solar collectors, *Solar Energy*, **53-1**, p.21; y de: E. Hahne y R. Kübler, 1994, Monitoring and simulation of the thermal performance of solar heated outdoor swimming pools. *Solar Energy* **53(1)**, p.9: Ashrae, 1990, incluyó los efectos de las radiaciones y, si se los excluye, los coeficientes son casi los de As, 1989; según Watmuff, $w_{cs} \approx (2.8+3.0 \cdot v_a) \cdot (T_p - T_a) \cdot A$.

[84] Suponiendo que un control binario con histéresis activa o desactiva la potencia si la humedad está demasiado alta o demasiado alta.

CC BY NC ND

$$q_{as}\left(t\right) \approx q_{avs}\left(t\right) \cdot \frac{1}{1+H_{av}\left(t\right)} \tag{32}$$

$$m_v\left(0\right) \approx 1.9 \cdot 10^1 \tag{33}$$

$$q_{ve}\left(t\right) \approx q_{ave}\left(t\right) \cdot \frac{H_{atm}\left(t\right)}{1+H_{atm}\left(t\right)} \tag{34}$$

$$q_{ev}\left(t\right) \approx \frac{w_{ev}\left(t\right)}{1.507 \cdot 10^6 + 4.532 \cdot 10^3 \cdot T_p\left(t\right) - 4.981 \cdot T_p^2\left(t\right)} \tag{35}$$

$$q_{vs}\left(t\right) \approx q_{avs}\left(t\right) \cdot \frac{H_{av}\left(t\right)}{1+H_{av}\left(t\right)} \tag{36}$$

$$q_{sec}\left(t\right) \approx \begin{cases} 0 & \text{si no hay secador} \\ \dfrac{1.5 \cdot w_{sec}\left(t\right)}{2.647 \cdot 10^6 + 3.46 \cdot 10^2 \cdot T_{av}\left(t\right) - 4.981 \cdot T_{av}^2\left(t\right)} & \text{si hay secador} \end{cases} \tag{37}$$ [85]

$q_f(t)$ es el caudal de agua fresca del ambiente a la piscina, en [kg s^{-1}]; $T_{cielo}(t)$ es la temperatura equivalente del cielo (sin el Sol) a través de la atmósfera, en [K]; α es un coeficiente de ajuste; $i_S(t)$ es la concentración de potencia por la radiación solar, en [W m^{-2}]; A es el área de la superficie del agua de la piscina, en [m^2]; $T_{techo}(t)$ es la temperatura del techo (si hay), en [K]; A_{col} es el área de los colectores solares, en [m^2]; W_{calef} es la potencia máxima del calefactor, en [W]; $q_r(t)$ es el caudal de agua de la piscina al ambiente, por rebase, en [kg s^{-1}]; $n(t)$ es el número de ocupantes, en [persona]; n_{max} es el número máximo de ocupantes, en [persona]; $v_a(t)$ es la velocidad del aire rasante por la superficie del agua de la piscina, en [m s^{-1}]; $P_v(t)$ es la presión parcial del vapor de agua en la atmósfera (si no hay techo) o en el aire que cubre a la piscina (si hay techo), en [N m^{-2}]; W_{sec} es la potencia máxima consumida por el secador, en [W]; h_{techo} es un coeficiente relativo a la conducción térmica por el techo, en [W m^{-2} K^{-1}]; A_{techo} es el área del techo, en [m^2]; $q_{ave}(t)$ es el caudal de aire húmedo de la atmósfera al aire que cubre a la piscina (si hay techo), por ventilación, en [kg s^{-1}]; $q_{avs}(t)$ es el caudal de aire húmedo del aire que cubre a la piscina (si hay techo) a la atmósfera, por ventilación, en [kg s^{-1}]:

$$q_f\left(t\right) \approx \begin{cases} 0.29 & \text{si el horario es completo} \\ 0.43 \cdot \begin{cases} 1 \text{ de 7 a 23 hrs.} \\ 0 \text{ de 23 a 7 hrs.} \end{cases} & \text{si el horario es parcial} \end{cases} \tag{38}$$

$$T_{cielo}\left(t\right) \approx 0.252 \cdot T_{atm}\left(t\right) \cdot \left(\frac{3333}{12.7 + \ln\left(1.607 + 1/H_{atm}\left(t\right)\right)} - 8.4 \right)^{1/4} \tag{39}$$ [86]

[85] Suponiendo que la potencia extraída del vapor es una vez y media la consumida por el motor del secador, y que la temperatura del vapor no cambia significativamente con la extracción.

[86] De: M. Martin y P. Berdhal, 1984, Characteristics of infrared sky radiation in the United States, *Solar Energy* **33**, p.321: $10 \leq T_{atm} - T_{cielo} \leq 14$ en las zonas costeras con climas moderados. De:

CC BY NC ND

$$\alpha \approx 0.75 \quad (40)\ ^{87}$$

$$i_S(t) \approx 66 + 52 \cdot \cos\left(4.848 \cdot 10^{-6} \cdot t\right) \quad (41)\ ^{88}$$

$$A \approx 312 \quad (42)$$

$$T_{techo}(t) \approx \frac{T_{av}(t) + T_{atm}(t)}{2} \quad (43)$$

$$A_{col} \approx 312 \quad (44)$$

$$W_{calef} \approx 2.6 \cdot 10^5 \quad (45)$$

$$q_r(t) \approx q_f(t) - q_{ev}(t) \quad (46)$$

$$n(t) \approx \begin{cases} 20 & \text{de 8 a 22 hrs.} \\ 0 & \text{de 22 a 8 hrs.} \end{cases} \quad (47)$$

$$n_{\max} \approx 72 \quad (48)$$

$$v_a(t) \approx \begin{cases} 0.40 \cdot v_{atm}(t) & \text{si no hay techo} \\ 0 & \text{si hay techo} \end{cases} \quad (49)\ ^{89}$$

$$P_v(t) \approx \begin{cases} P_{atm} \cdot \dfrac{0.8035 \cdot H_{atm}(t)}{1 + 1.304 \cdot H_{atm}(t)} & \text{si no hay techo} \\ P_{av}(t) \cdot \dfrac{0.8035 \cdot H_{av}(t)}{1 + 1.304 \cdot H_{av}(t)} & \text{si hay techo} \end{cases} \quad (50)$$

$$W_{\text{sec}} \approx 1.0 \cdot 10^4 \quad (51)$$

$$h_{techo} \approx 1.65 \quad (52)\ ^{90}$$

$$A_{techo} \approx 860 \quad (53)$$

Jones, R., C. Smith, G. Löf, 1994, Measurement and analysis of evaporation from an inactive outdoor swimming pool, *Solar Energy*, **53(1)**, p.3: $T_{cielo} \approx T_{atm} \cdot (0.8 + (T_{satm} - 273)/250))^{0.25}$, donde T_{satm} es la temperatura con que la humedad atmosférica existente saturaría a la atmósfera, en [K]. Calculamos $T_{satm} \approx 64.6 + 3333/(12.7 + \ln(1.607 + 1/H_{atm}))$ y reemplazamos esto en la fórmula anterior. La fórmula resultante, que está arriba, tiene problemas cuando H_{atm} tiende a 0, igual que la anterior (donde T_{satm} tiende a ∞). Si $0.001 < H_{atm} < 0.010$ y $T_{atm} \approx 286$, lo que es verosímil en las zonas costeras con climas moderados, la fórmula resultante da $20 < T_{atm} - T_{cielo} < 36$. Se ajustaría mejor al dictamen inicial si, en vez de un factor 0.252, tuviera una factor 0.268.

87 De Vargas, 1996, considerando las sombras de los edificios circundantes. De Molinaux, Lachal y Guisan, 1993: $0.75 \leq \alpha \leq 0.90$; de Hahne y Kübler, 1994: $0.80 \leq \alpha \leq 0.95$.

88 Según datos invernales (simplificados) del laboratorio de energía solar de la Universidad Técnica Federico Santa María, en Valparaíso, y de la base Torquemada de la Armada de Chile, en Concón.

89 De Hahne y Kübler, 1994: hay que considerar un coeficiente de atenuación de la velocidad del aire atmosférico para dar cuenta de obstáculos como edificios y otros; así, propusieron 0.40 como coeficiente para una piscina urbana en Stuttgart.

90 Suponiendo que el techo es de policarbonato de 2 centímetros de espesor.

CC BY NC ND

$$q_{ave}(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{si no hay techo} \\ 1.2 & \text{si hay techo} \end{cases} \tag{54}$$

$$q_{avs}(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{si no hay techo} \\ K \cdot \sqrt{\left|P_{av}(t) - P_{atm}\right|} \cdot \text{signo}\left(P_{av}(t) - P_{atm}\right) & \text{si hay techo} \end{cases} \tag{55}$$

$v_{atm}(t)$ es la velocidad del aire atmosférico, en [m s^{-1}]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; $P_{av}(t)$ es la presión del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [N m^{-2}]; K es un coeficiente de paso del aire húmedo, en [kg$^{1/2}$ m$^{1/2}$]:

$$v_{atm}(t) \approx 4 - 2 \cdot \sin\left(2.424 \cdot 10^{-6} \cdot t\right) \tag{56}$$ [91]

$$P_{atm} \approx 101300 \tag{57}$$ [92]

$$P_{av}(t) \approx \left(\frac{m_a(t)}{4.808 \cdot 10^{-26}} + \frac{m_v(t)}{2.991 \cdot 10^{-26}}\right) \cdot \frac{1.3803 \cdot 10^{-23} \cdot T_{av}(t)}{V_{av}} \tag{58}$$

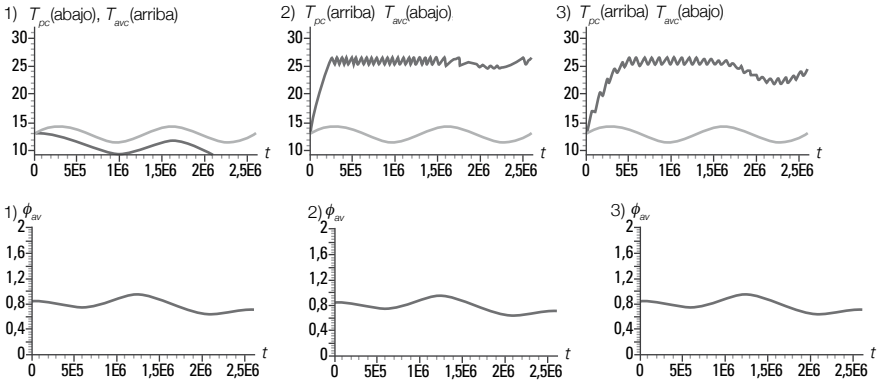
$$K \approx 0.1 \tag{59}$$ [93]

V_{av} es el volumen del aire húmedo que cubre a la piscina (si hay techo), en [m^3]:

$$V_{av} \approx 3000 \tag{60}$$

Los dibujos de la estructura causal y de la estructura temporal para un método de computación son bastante enredados, como el de la estructura espacial. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente graficó la figura 2.



[91] Según datos invernales de velocidad (simplificados) del laboratorio de energía solar de la Universidad Técnica Federico Santa María, en Valparaíso, y de la base Torquemada de la Armada de Chile, en Concón.

[92] Dato impreciso por extravío de otros mejores; se trata de un valor medio verosímil.

[93] Dato impreciso por inexistencia del techo real; se trata de un valor que predice q_{avs}=1.2 con sólo P_{av}-P_{atm}=144.

BY NC ND

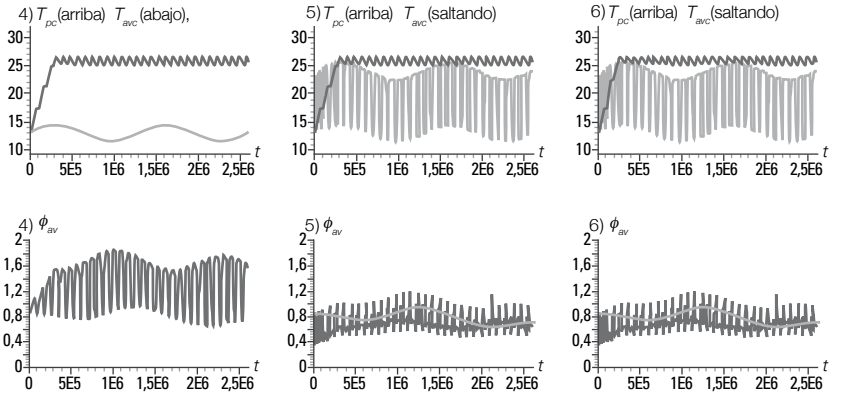


Fig. 2: Predicciones

En la figura, $T_{pc}(t)$ y $T_{avc}(t)$ son las temperaturas del agua de la piscina y del aire que cubre a la piscina, respectivamente, en [°C]; es decir, $T_{pc}(t)=T_p(t)$-273.2 y $T_{avc}(t)=T_{av}(t)$ -273.2.

El caso 1) supone que no hay calefactor, que se usa cobertor flotante, que no hay techo, que no hay secador y que no hay colectores solares. El agua de la piscina y el aire que cubre a la piscina aparecen fríos.

El caso 2) supone que hay calefactor funcionando en horario completo, que no se usa cobertor flotante, que no hay techo, que no hay secador y que no hay colectores solares. El agua de la piscina aparece tibia, el aire que cubre a la piscina aparece frío, y el gasto en calefacción aparece alto.

El caso 3) supone que hay calefactor funcionando en horario parcial, que se usa cobertor flotante, que no hay techo, que no hay secador y que no hay colectores solares. El agua de la piscina aparece tibia, el aire que cubre a la piscina aparece frío, y el gasto en calefacción aparece disminuido.

El caso 4) supone que hay calefactor funcionando en horario parcial, que se usa cobertor flotante, que hay techo, que no hay secador y que no hay colectores solares. El agua de la piscina aparece tibia, el aire que cubre a la piscina aparece frío y con humedad alta, y el gasto en calefacción aparece más disminuido; de hecho, debiera haber condensación del vapor de agua a menudo, porque la humedad relativa no puede ser mayor que 1 (y la simulación es inexacta en esto).

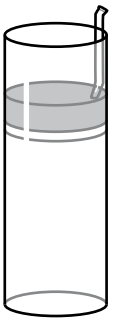
El caso 5) supone que hay calefactor funcionando en horario parcial, que se usa cobertor flotante, que hay techo, que hay secador y que no hay colectores solares. El agua de la piscina aparece tibia, el aire que cubre a la piscina aparece con temperatura y humedad oscilantes, y el gasto en calefacción aparece más disminuido; debiera haber condensación del vapor de agua en las mañanas, temprano.

El caso 6) supone que hay calefactor funcionando en horario parcial, que se usa cobertor flotante, que hay techo, que hay secador y que hay colectores solares; sólo aparecen mejoras pequeñas.

CC BY NC ND

66.0

AIRE EN UN CILINDRO CON UN PISTÓN MÓVIL (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS; ENERGÍAS Y POTENCIAS)



Imaginemos que hay aire seco encerrado en un cilindro vertical con un pistón móvil en la parte superior; que el pistón es hueco y con paredes de poca masa y poca conductividad térmica; y que sobre el pistón se agrega o quita suavemente mercurio con dos propósitos: para sellar el cilindro con poco roce, y para manejar el peso.

Fig. 1: Aire en un cilindro con un pistón móvil

Interesa predecir la evolución de la distancia descendida por el pistón.

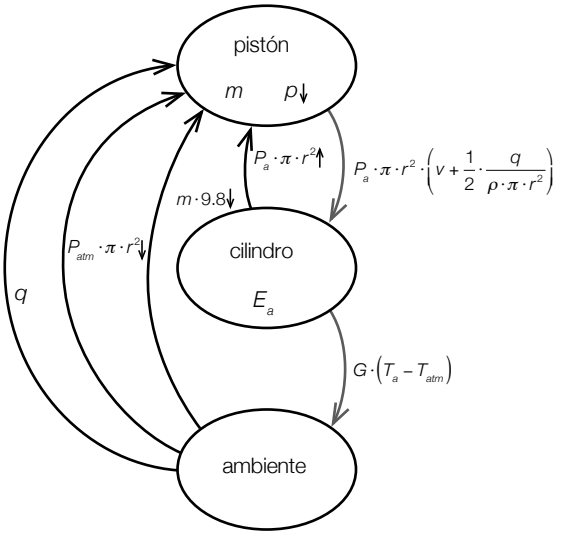


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x(t)$ es la distancia descendida por el centro de masa del pistón y el mercurio desde la boca del cilindro, en [m]:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau \qquad (1)$$

BY NC ND

x(0) es la distancia descendida inicialmente, en [m]; $v(t)$ es la velocidad de descenso del centro de masa del pistón y el mercurio, en [m s^{-1}]:

$$x\left(0\right) = 0.00720 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$v\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{m\left(t\right)} \tag{3}$$

$p(t)$ es el momentum de descenso en el pistón y el mercurio, en [N s]; $m(t)$ es la masa en el pistón y el mercurio, en [kg]:

$$p\left(t\right) = p\left(0\right) + \int_0^t \left(m\left(\tau\right)\cdot 9.8 + P_{atm}\cdot\pi\cdot r^2 - P_a\left(\tau\right)\cdot\pi\cdot r^2\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$$m\left(t\right) = m\left(0\right) + \int_0^t q\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{5}$$

$p(0)$ es el momentum de descenso en el pistón inicialmente, en [N s]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; r es el radio del pistón, en [m]; $P_a(t)$ es la presión del aire dentro del cilindro, en [N m^{-2}]; $m(0)$ es la masa en el pistón y el mercurio inicialmente, en [kg]; $q(t)$ es el caudal (suave) de mercurio del ambiente al pistón, en [kg s^{-1}]:

$$p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$P_{atm} = 101300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$r = 0.1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$P_a\left(t\right) = \frac{v_{0a}}{c_{Pa}}\cdot\frac{E_a\left(t\right)/m_a - e_{0a}}{V_a\left(t\right)/m_a - v_{0a}} \tag{9}$$ [94]

$$m\left(0\right) = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$q\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \forall t < 10 \\ 3 & \forall 10 \le t < 20 \\ 0 & \forall 20 \le t < 30 \\ -3 & \forall 30 \le t < 40 \\ 0 & \forall 40 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

v_{0a} es un remanente de volumen específico del aire, en [m^3 kg^{-1}]; $E_a(t)$ es la energía en el aire dentro del cilindro, en [J]; m_a es la masa en el aire dentro del cilindro, en [kg]; e_{0a} es la energía específica de referencia del aire, en [J kg^{-1}]; c_{Pa} es un coeficiente del aire, en [J kg^{-1} N^{-1} m^2]; $V_a(t)$ es el volumen del aire dentro del cilindro, en [m^3]:

---

[94] Considerando la energía cinética involucrada en la velocidad media del aire mismo, podríamos suponer

$$P_a\left(t\right) = \frac{v_{0a}}{c_{Pa}}\cdot\frac{\left(E_a\left(t\right) - \frac{m_a\cdot\left(v/2\right)^2}{2}\right)/m_a - e_{0a}}{V_a\left(t\right)/m_a - v_{0a}}$$

CC BY NC ND

$$v_{0a} = \frac{c_{Pa}}{c_{Ta}} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{\mu_a} \tag{12}$$

$$E_a(t) = E_a(0) + \int_0^t \left(P_a(\tau) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(v(\tau) + \frac{1}{2} \cdot \frac{q(\tau)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2} \right) - G(\tau) \cdot \left(T_a(\tau) - T_{atm} \right) \right) \cdot d\tau \tag{13}$$

$$m_a = 0.0376 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$e_{0a} = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$c_{pa} = 4.10 \cdot 10^{-4} \tag{16}$$

$$V_a(t) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(X - h - \left(x(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2} \right) \right) \tag{17}$$

c_{Ta} es el calor específico del aire (a volumen constante), en [J kg^{-1} K^{-1}]; μ_a es el promedio de las masas moleculares del aire, en [kg]; $E_a(0)$ es la energía en el aire dentro del cilindro inicialmente, en [J]; ρ es la densidad del pistón y el mercurio, en [kg m^{-3}]; $G(t)$ es la conductancia térmica entre el aire dentro del cilindro y el atmosférico, a través de la pared del cilindro, en [W K^{-1}]; $T_a(t)$ es la temperatura del aire dentro del cilindro, en [K]; T_{atm} es la temperatura del aire atmosférico, en [K]; h es la altura del pistón, en [m]:

$$c_{Ta} = 720 \tag{18}$$

$$\mu_a = 4.81 \cdot 10^{-26} \tag{19}$$

$$E_a(0) = 7720 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$\rho = 13600 \tag{21}$$

$$G(t) = g \cdot \frac{\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(X - h - \left(x(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2} \right) \right)}{\varepsilon} \tag{22}$$

$$T_a(t) = \frac{V_a(t)/m_a}{c_{Ta}} \cdot \frac{E_a(t)/m_a - e_{0a}}{V_a(t)/m_a - v_{0a}} \tag{23}$$ [95]

$$T_{atm} = 293 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$h = 0.03 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

g es la conductividad térmica de la pared del cilindro, en [W m^{-1} K^{-1}]; X es la distancia entre la boca y el fondo del cilindro, en [m]; ε es el espesor de la pared del cilindro, en [m]:

[95] Descontando la energía cinética involucrada en la velocidad media del aire mismo, podríamos suponer

$$T_a(t) = \frac{V_a(t)/m_a}{c_{Ta}} \cdot \frac{\left(E_a(t) - \frac{m_a \cdot (v/2)^2}{2} \right)/m_a - e_{0a}}{V_a(t)/m_a - v_{0a}}$$

CC BY NC ND

$g = 0.2$ (por ejemplo) (26)

$X = 1$ (por ejemplo) (27)

$\varepsilon = 0.01$ (por ejemplo) (28)

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: *x* depende de *v*; *v*, de *p* y *m*; *p*, de *m* y P_a; *m*, de *q*; P_a, de E_a y V_a; E_a, de P_a, *v*, *G* y T_a; V_a, de *x* y *m*; *G*, de *x* y *m*; y T_a, de E_a y V_a (según (1), (3), (4), (5), (9), (13), (17), (22) y (23), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (6), (7), (8), (10), (12), (14), (15), (16), (18), (19), (20), (21), (24), (25), (26), (27) y (28) no contienen ninguna variable que evoluciona: (11) contiene 1; (1) y (5) contienen 2 cada una; (3), (4), (9), (17), (22) y (23), 3; (13), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^6 \cdot 6^1$ (=17496) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(28).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza, un caudal o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras o de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum, de la masa o de la energía en el recinto, sino que el momentum, la masa o la energía depende por integración de todas las fuerzas, de todos los caudales o de todas las potencias.

(4), (5) y (13) tiene momenta, masa o energía despejados en el lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en (4) se reducen al que está planteado, los 2 imaginables en (5) también, los 6 imaginables en (13) también, y, de los 17496 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(28), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^5$ (=486).

Pero tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

De los 486 sistemas de ecuaciones restantes, 485 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(28).

(Y si, en vez de (9) y (23), se insiste en ecuaciones como:

$$P_a(t) \cdot V_a(t) = \frac{m_a}{\mu_a} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T_a(t) \quad (9a)$$

$$E_a(t) = c_{Ta} \cdot m_a \cdot T_a(t) \quad (23a)$$

o:

$$P_a(t) \cdot V_a(t) = \frac{m_a}{\mu_a} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T_a(t) \quad (9b)$$

$$E_a(t) = c_{Ta} \cdot m_a \cdot T_a(t) - c_{Pa} \cdot m_a \cdot P_a(t) \quad (23b)$$

no hay ninguno).

Si nos interesa la evolución de *x*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integrales en (1),

CC BY NC ND

(4), (5) y (13); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *x* inicial, *p* inicial, *m* inicial, E_a inicial, *q*, P_{atm}, *r*, m_a, e_{oa}, ρ, T_{atm}, *h*, *g*, *x*, ε, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(28) como:

$$P_{atm} = \ldots \tag{7'}$$

$$r = \ldots \tag{8'}$$

$$m_a = \ldots \tag{14'}$$

$$e_{0a} = \ldots \tag{15'}$$

$$\rho = \ldots \tag{21'}$$

$$T_{atm} = \ldots \tag{24'}$$

$$h = \ldots \tag{25'}$$

$$g = \ldots \tag{26'}$$

$$X = \ldots \tag{27'}$$

$$\varepsilon = \ldots \tag{28'}$$

$$x_0 = \ldots \tag{2'}$$

$$p_0 = \ldots \tag{6'}$$

$$m_0 = \ldots \tag{10'}$$

$$E_{a,0} = \ldots \tag{20'}$$

$$c_{pa} = 4.10 \cdot 10^{-4} \tag{16'}$$

$$c_{Ta} = 720 \tag{18'}$$

$$\mu_a = 4.81 \cdot 10^{-26} \tag{19'}$$

$$v_{0a} = \frac{c_{Pa}}{c_{Ta}} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{\mu_a} \tag{12'}$$

$$q_k = \ldots \tag{11'}$$

$$V_{a,k} = \pi \cdot r^2 \cdot \left(X - h - \left(x_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_k}{\rho \cdot \pi \cdot r^2} \right) \right) \tag{17'}$$

$$v_k = \frac{p_k}{m_k} \tag{3'}$$

$$G_k = g \cdot \frac{\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(X - h - \left(x_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_k}{\rho \cdot \pi \cdot r^2} \right) \right)}{\varepsilon} \tag{22'}$$

$$P_{a,k} = \frac{v_{0a}}{c_{Pa}} \cdot \frac{E_{a,k} / m_a - e_{0a}}{V_{a,k} / m_a - v_{0a}} \tag{9'}$$

$$T_{a,k} = \frac{V_{a,k} / m_a}{c_{Ta}} \cdot \frac{E_{a,k} / m_a - e_{0a}}{V_{a,k} / m_a - v_{0a}} \tag{23'}$$

BY NC ND

$$x_{k+1} = x_k + v_k \cdot dt \tag{1'}$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(m_k \cdot 9.8 + P_{atm} \cdot \pi \cdot r^2 - P_{a,k} \cdot \pi \cdot r^2\right) \cdot dt \tag{4'}$$

$$m_{k+1} = m_k + q_k \cdot dt \tag{5'}$$

$$E_{a,k+1} = E_{a,k} + \left(P_{a,k} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(v_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{q_k}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}\right) - G_k \cdot \left(T_{a,k} - T_{atm}\right)\right) \cdot dt \tag{13'}$$

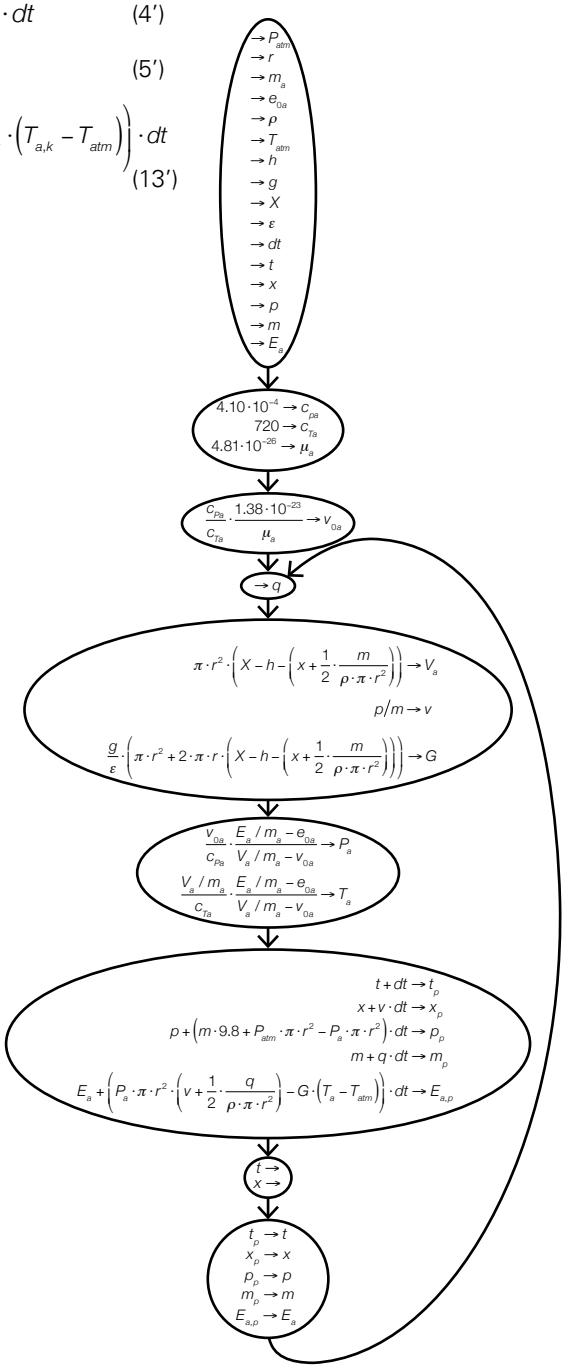


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

BY NC ND

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

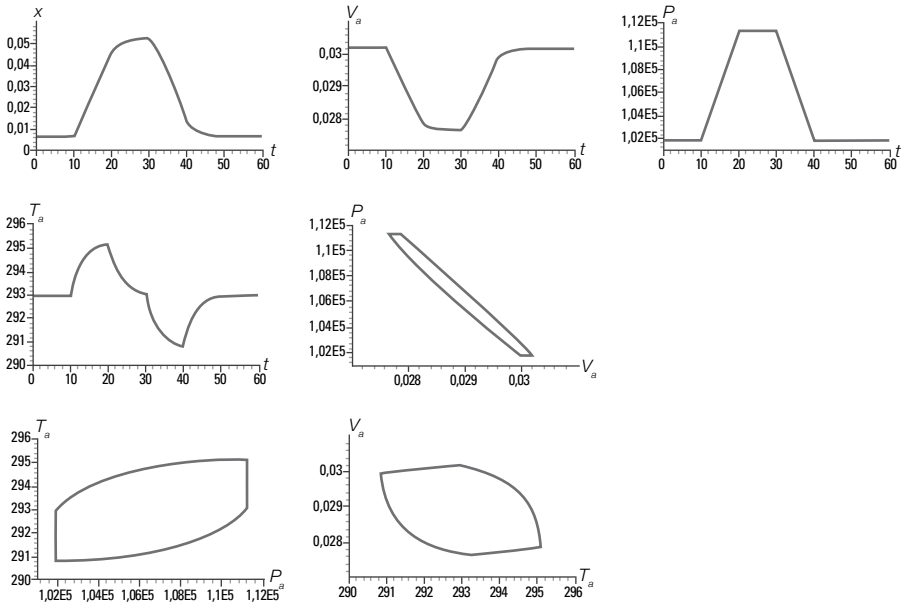


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (4), (5) y (13) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la distancia descendida por el pistón, el momentum en él, la masa en él y la energía en el aire dentro del cilindro con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (1) e insertando (3), derivando (4) e insertando (9) y (17), derivando (5), y derivando (13) e insertando (9), (3), (22), (23) y (17):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m(t)} \tag{a1}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = m(t)\cdot 9.8 + P_{atm}\cdot\pi\cdot r^2 - \frac{v_{0a}}{c_{Pa}}\cdot\frac{\pi\cdot r^2\cdot\left(E_a(t) - e_{0a}\cdot m_a\right)}{\pi\cdot r^2\cdot\left\{X - h - \left[x(t) + \frac{1}{2}\cdot\frac{m(t)}{\rho\cdot\pi\cdot r^2}\right]\right\} - v_{0a}\cdot m_a} \tag{a2}$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = q(t) \tag{a3}$$

BY NC ND

$$\frac{dE_a(t)}{dt} = \frac{v_{0a}}{c_{Pa}} \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \left(E_a(t) - e_{0a} \cdot m_a\right) \cdot \left[\frac{p(t)}{m(t)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}\right]}{\pi \cdot r^2 \cdot \left[X - h - \left[x(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}\right]\right] - v_{0a} \cdot m_a}$$

$$- \left(\left[g \cdot \frac{\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left[X - h - \left[x(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}\right]\right]}{\varepsilon} \right] \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{c_{Ta} \cdot m_a} \cdot \frac{E_a(t) - e_{0a} \cdot m_a}{\pi \cdot r^2 - \frac{v_{0a} \cdot m_a}{X - h - \left[x(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(t)}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}\right]}} - T_{atm} \right) \right) \tag{a4}$$

Apéndice acerca de la Termodinámica para (9) y (23)

Considerando el aire dentro del cilindro como un gas con poca probabilidad de condensación de sus componentes, sería habitual apelar a las contribuciones de Robert Boyle (1627 1691), Edme Mariotte (1620 1684), Joseph Black (1728 1799), Jacques Charles (1746 1822), Joseph Louis Gay Lussac (1778 1850), Lorenzo Amedeo Avogadro (1776-1856), Èmile Clapeyron (1799 1864) y Henri Regnault (1810-1878), e insistir en:

$$P_a \cdot V_a = \frac{m_a}{\mu_a} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T_a \tag{9a}$$

$$E_a = c_a \cdot m_a \cdot T_a \tag{23a}$$

En vez de insistir en (9a), se podría elegir una aproximación posterior y más precisa como la de van der Waals, la de Dieterici, la de Berthelot, la de Clausius, la de Redlich y Kwong, la de Soave, la de Peng y Robinson, o la de Benedict, Webb y Rubin. Y en vez de insistir en (23a) sencillamente, se podría elegir una aproximación habitual en que c_{Ta} se supone dependiente de T_a según una serie simple de Brook Taylor (1685-1731) y Colin MacLaurin (1698-1731), truncada, o, atendiendo a las tablas termodinámicas, otra aproximación habitual en que c_a se supone dependiente tanto de T_a como de P_a según una serie doble.

Acatando (9a) y la serie doble truncada tras los términos de primer orden (que incluye fácilmente a (23a)):

$$P_a \cdot V_a = \frac{m_a}{\mu_a} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T_a \tag{9b}$$

$$E_a = c_{Ta} \cdot m_a \cdot T_a - c_{Pa} \cdot m_a \cdot P_a \tag{23b}$$

Sin embargo, si al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el

CC BY NC ND

derecho, (9b) y (23b) no son cuerdas; y (9a) y (23a), tampoco. El problema principal está en que hacen aparecer la energía en el aire dentro del cilindro como dependiente por multiplicaciones y sumas de la masa, la temperatura y la presión; en que la energía en un recinto depende por integración de las potencias en la frontera del recinto; y en que no es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes. Tanto (9b) y (23b) como (9a) y (23a) necesitan replantearse (y, de rebote, la suposición de c_a como dependiente de T_a y P_a, también).

El replanteamiento puede hacerse mediante maniobras algebraicas bastante fáciles que, partiendo de (9b) y (23b), dan:

$$P_a = \frac{v_{0a}}{c_{Pa}} \cdot \frac{E_a / m_a - e_{0a}}{V_a / m_a - v_{0a}}$$

$$T_a = \frac{V_a / m_a}{c_{Ta}} \cdot \frac{E_a / m_a - e_{0a}}{V_a / m_a - v_{0a}}$$

donde:

$$v_{0a} = \frac{c_{Pa}}{c_{Ta}} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{\mu_a}$$

Al respecto cabe mencionar que este v_{0a} es un remanente parecido al volumen específico si se compactara el aire hasta que sus moléculas casi se tocaran (concordando gruesamente con la argumentación usada por Johannes van der Waals (1837-1923) para justificar su aproximación).

Por supuesto, partiendo de (9a) y (23a) las maniobras algebraicas dan:

$$P_a = \frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{c_{Ta} \cdot \mu_a} \cdot \frac{E_a - e_{0a} \cdot m_a}{V_a}$$

$$T_a = \frac{E_a - e_{0a} \cdot m_a}{c_{Ta} \cdot m_a}$$

BY NC ND

67.0

AIRE EN UN CILINDRO CON UN PISTÓN MÓVIL FORMANDO DOS CÁMARAS (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un cilindro ocluido en ambos extremos, con un pistón móvil puesto entre medio formando una cámara de tamaño variable en cada lado, y con aire seco en ambas cámaras. El cilindro intercambia con el ambiente momenta que lo mantienen (casi) inmóvil, pero no intercambia masas ni energías.

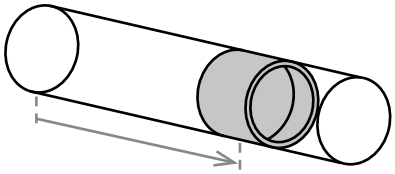


Fig. 1: Aire en un cilindro con un pistón móvil formando dos cámaras

Interesa predecir la evolución de la distancia recorrida por el pistón.

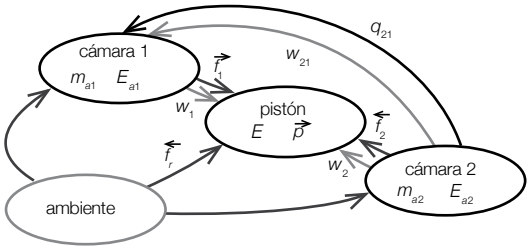


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$x(t)$ es la distancia axial recorrida por el centro del pistón, hacia la derecha desde el extremo izquierdo del cilindro, en [m]:

$$x\left(t\right) = x\left(0\right) + \int_0^t v\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{1}$$

$x(0)$ es la distancia recorrida por el centro del pistón inicialmente, en [m]; $v(t)$ es la velocidad del pistón, hacia la derecha, en [m s^{-1}]:

$$x\left(0\right) = 2.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$v\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{m} \tag{3}$$

CC BY NC ND

$p(t)$ es el momentum en el pistón, hacia la derecha, en [N s]; m es la masa en el pistón, en [kg]:

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \left(f_1(\tau) + \left(-f_2(\tau) \right) + \left(-f_r(\tau) \right) \right) \cdot d\tau \tag{4}$$

$$m = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$p(0)$ es el momentum en el pistón inicialmente, en [N s]; $f_1(t)$ es la fuerza de la cámara izquierda al pistón, hacia la derecha, en [N]; $f_2(t)$ es la fuerza de la cámara derecha al pistón, hacia la izquierda, en [N]; $f_r(t)$ es la fuerza del cilindro al pistón, hacia la izquierda, por roce, en [N]:

$$p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$f_1(t) = P_{a1}(t) \cdot A \tag{7}$$

$$f_2(t) = P_{a2}(t) \cdot A \tag{8}$$

$$f_r(t) = D \cdot v(t) \tag{9}$$

$P_{a1}(t)$ es la presión del aire dentro de la cámara izquierda, en [N m^{-2}]; A es el área de la sección transversal del pistón, en [m^2]; $P_{a2}(t)$ es la presión del aire dentro de la cámara derecha, en [N m^{-2}]; D es el coeficiente de roce entre el cilindro y el pistón, en [N m^{-1} s]:

$$P_{a1}(t) = \frac{v_{0,a}}{c_{p,a}} \cdot \frac{E_{a1}(t) / m_{a1}(t) - e_{a0}}{V_{a1}(t) / m_{a1}(t) - v_{0a}} \tag{10}$$

$$A = 0.031 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$P_{a2}(t) = \frac{v_{0,a}}{c_{p,a}} \cdot \frac{E_{a2}(t) / m_{a2}(t) - e_{a0}}{V_{a2}(t) / m_{a2}(t) - v_{0a}} \tag{12}$$

$$D = 0.1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

v_{0a} es un remanente de volumen específico del aire, en [m^3 kg^{-1}]; c_{Pa} es un coeficiente del aire, en [J kg^{-1} N^{-1} m^2]; $E_{a1}(t)$ es la energía en el aire dentro de la cámara izquierda, en [J]; $m_{a1}(t)$ es la masa en el aire dentro de la cámara izquierda, en [kg]; e_{0a} es la energía específica de referencia del aire, en [J kg^{-1}]; $V_{a1}(t)$ es el volumen de la cámara izquierda, en [m^3]; $E_{a2}(t)$ es la energía en el aire dentro de la cámara derecha, en [J]; $m_{a2}(t)$ es la masa en el aire dentro de la cámara derecha, en [kg]; $V_{a2}(t)$ es el volumen de la cámara derecha, en [m^3]:

$$v_{0a} = \frac{c_{Pa}}{c_{Ta}} \cdot \frac{k_B}{\mu_a} \tag{14}$$

$$c_{Pa} = 4.1 \cdot 10^{-4} \tag{15}$$

$$E_{a1}(t) = E_{a1}(0) + \int_0^t \left(w_{21}(\tau) - w_1(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{16}$$

CC BY NC ND

$$m_{a1}(t) = m_{a1}(0) + \int_0^t q_{21}(\tau)\cdot d\tau \tag{17}$$

$$e_{0a} = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$V_{a1}(t) = A\cdot x(t) - V/2 \tag{19}$$

$$E_{a2}(t) = E_{a2}(0) + \int_0^t \left(-w_{21}(\tau) - w_2(\tau)\right)\cdot d\tau \tag{20}$$

$$m_{a2}(t) = m_{a2}(0) - \int_0^t q_{21}(\tau)\cdot d\tau \tag{21}$$

$$V_{a2}(t) = A\cdot\left(X - x(t)\right) - V/2 \tag{22}$$

c_{Ta} es el calor específico del aire (a volumen constante), en [J kg^{-1} K^{-1}]; k_B es la constante de Boltzmann, en [J K^{-1} molécula^{-1}]; μ_a es la masa molecular media del aire, en [kg]; $E_{a1}(0)$ es la energía en el aire dentro de la cámara izquierda inicialmente, en [J]; $w_{21}(t)$ es la potencia neta de la cámara derecha a la izquierda, en [W]; $w_1(t)$ es la potencia neta de la cámara izquierda al pistón, en [W]; $m_{a1}(0)$ es la masa en el aire dentro de la cámara izquierda inicialmente, en [kg]; $q_{21}(t)$ es el caudal de masa de la cámara derecha a la izquierda, por los intersticios entre el pistón y el cilindro, en [kg s^{-1}]; V es el volumen del pistón, en [m^3]; $E_{a2}(0)$ es la energía en el aire dentro de la cámara derecha inicialmente, en [J]; $w_2(t)$ es la potencia neta de la cámara derecha al pistón, en [W]; $m_{a2}(0)$ es la masa en el aire dentro de la cámara derecha inicialmente, en [kg]; X es la longitud axial del cilindro completo, en [m]:

$$c_{Ta} = 720 \tag{23}$$

$$k_B = 1.38\cdot 10^{-23} \tag{24}$$

$$\mu_a = 4.81\cdot 10^{-26} \tag{25}$$

$$E_{a1}(0) = 4.65\cdot 10^4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$w_{21}(t) = q_{21}(t)\cdot\left(\frac{E_{a2}(t)}{m_{a2}(t)}\cdot\left(\frac{1+\operatorname{sgn}\left(q_{21}(t)\right)}{2}\right) + \frac{E_{a1}(t)}{m_{a1}(t)}\cdot\left(\frac{1-\operatorname{sgn}\left(q_{21}(t)\right)}{2}\right)\right) \tag{27}$$

$$w_1(t) = f_1(t)\cdot v(t) + G\cdot\left(T_{a1}(t) - T(t)\right) - D\cdot v^2(t)\cdot\left(\frac{1+\operatorname{sgn}\left(v(t)\right)}{2}\right) \tag{28}$$

$$m_{a1}(0) = 0.18 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$q_{21}(t) = K\cdot\sqrt{\left|P_{a2}(t) - P_{a1}(t)\right|}\cdot\operatorname{sgn}\left(P_{a2}(t) - P_{a1}(t)\right) \tag{30}$$

$$V = 1.25\cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo, si el pistón es de hierro)} \tag{31}$$

$$E_{a2}(0) = 3.15\cdot 10^4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

CC BY NC ND

$$w_2(t) = -f_2(t)\cdot v(t) + G\cdot\left(T_{a2}(t) - T(t)\right) - D\cdot v^2(t)\cdot\left(\frac{1-\operatorname{sgn}\left(v(t)\right)}{2}\right) \quad (33)$$

$$m_{a2}(0) = 0.18 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (34)$$

$$X = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (35)$$

G es la conductancia térmica entre cada cámara y el pistón, en [W K^{-1}]; $T_{a1}(t)$ es la temperatura del aire dentro de la cámara izquierda, en [K]; $T(t)$ es la temperatura del pistón, en [K]; K es el coeficiente de paso del aire entre el pistón y el cilindro, en [kg$^{1/2}$ m$^{1/2}$]; $T_{a2}(t)$ es la temperatura del aire dentro de la cámara derecha, en [K]:

$$G = 85 \quad \text{(por ejemplo, si el pistón es de hierro)} \quad (36)$$

$$T_{a1}(t) = \frac{V_{a1}(t)/m_{a1}(t)}{c_{T_a}}\cdot\frac{E_{a1}(t)/m_{a1}(t) - e_{0a}}{V_{a1}(t)/m_{a1}(t) - v_{0a}} \quad (37)$$

$$T(t) = \frac{\left(E(t) - \dfrac{m\cdot\left(v(t)\right)^2}{2}\right)/m}{c_T} \quad (38)$$

$$K = 0.001 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (39)$$

$$T_{a2}(t) = \frac{V_{a2}(t)/m_{a2}(t)}{c_{Ta}}\cdot\frac{E_{a2}(t)/m_{a2}(t) - e_{0a}}{V_{a2}(t)/m_{a2}(t) - v_{0a}} \quad (40)$$

$E(t)$ es la energía en el pistón, en [J]; c_T es el calor específico del pistón, en [J kg^{-1} K^{-1}]:

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left(w_1(\tau) + w_2(\tau)\right)\cdot d\tau \quad (41)$$

$$c_T = 460 \quad \text{(por ejemplo, si el pistón es de hierro)} \quad (42)$$

E(0) es la energía en el pistón inicialmente, en [J]:

$$E(0) = 1.348\cdot 10^6 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (43)$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: x depende de v; v, de p; p, de f_1, f_2 y f_r; f_1, de P_{a1}; f_2, de P_{a2}; f_r, de v; P_{a1}, de E_{a1}, m_{a1} y V_{a1}; P_{a2}, de E_{a2}, m_{a2} y V_{a2}; E_{a1}, de w_1; m_{a1}, de q_{21}; V_{a1}, de x; E_{a2}, de w_2; m_{a2}, de q_{21}; V_{a2}, de x; w_{21}, de q_{21}, E_{a2}, m_{a2}, E_{a1} y m_{a2}; w_1, de f_1, v, T_{a1} y T; q_{21}, de P_{a2} y P_{a1}; w_2, de f_2, v, T_{a2} y T; T_{a1}, de V_{a1}, m_{a1} y E_{a1}; T, de E y v; T_{a2}, de V_{a2}, m_{a2} y E_{a2}; y E, de w_1 y w_2 (según (1), (3), (4), (7), (8), (9), (10), (12), (16), (17), (19), (20), (21), (22), (27), (28), (30), (33), (37), (38), (40) y (41), respectivamente).

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (5), (6), (11), (13), (14), (15), (18), (23), (24), (25), (26), (29), (31), (32), (34), (35), (36), (39), (42) y (43) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (3), (7), (8), (9), (17), (19), (21) y (22)

CC BY NC ND

contienen 2 cada una; (16), (20), (30), (38) y (41), 3; (4), (10), (12), (37) y (40), 4; (28) y (33), 5; y (27), 6; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 22 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^9 \cdot 3^5 \cdot 4^5 \cdot 5^2 \cdot 6^1$ (=19110297600) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(43).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza, un caudal de masa o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de las otras o de los otros a través de la frontera y, por derivación, del momentum, de la masa o de la energía en el recinto, sino que el momentum, la masa o la energía depende por integración de todas las fuerzas, de todos los caudales de masa o de todas las potencias.

(4), (16), (17), (20), (21) y (41) tienen momenta, masa o energía despejados en el lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado, y, de los 19110297600 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(43), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 4^4 \cdot 5^2 \cdot 6^1$ (=44236800).

Pero tampoco es cuerdo suponer que una variable depende de otras según dos o más dependencias diferentes.

De los 44236800 sistemas de ecuaciones restantes, 44236799 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(43).

Si nos interesa la evolución de x; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integrales en (1), (4), (16), (17), (20), (21) y (41); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar x inicial, p inicial, m_{a1} inicial, m_{a2} inicial, E_{a1} inicial, E_{a2} inicial, E inicial, m, A, D, e_{0a}, V, X, G, K, c_T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(43) como:

$m = \ldots$ (5′)

$A = \ldots$ (11′)

$D = \ldots$ (13′)

$e_{0a} = \ldots$ (18′)

$V = \ldots$ (31′)

$X = \ldots$ (35′)

$G = \ldots$ (36′)

$K = \ldots$ (39′)

$c_T = \ldots$ (42′)

$x_0 = \ldots$ (2′)

$p_0 = \ldots$ (6′)

$E_0 = \ldots$ (43′)

$m_{a1,0} = \ldots$ (29′)

$m_{a2,0} = \ldots$ (34′)

$E_{a1,0} = \ldots$ (26′)

CC BY NC ND

$$E_{a2,0} = \ldots \tag{32'}$$

$$c_{Pa} = 4.1 \cdot 10^{-4} \tag{15'}$$

$$c_{Ta} = 720 \tag{23'}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \tag{24'}$$

$$\mu_a = 4.81 \cdot 10^{-26} \tag{25'}$$

$$v_{0a} = \frac{c_{Pa}}{c_{Ta}} \cdot \frac{k_B}{\mu_a} \tag{14'}$$

$$V_{a1,k} = A \cdot x_k - V/2 \tag{19'}$$

$$V_{a2,k} = A \cdot \left(X - x_k\right) - V/2 \tag{22'}$$

$$v_k = \frac{p_k}{m} \tag{3'}$$

$$P_{a1,k} = \frac{v_{0,a}}{c_{p,a}} \cdot \frac{E_{a1,k}/m_{a1,k} - e_{a0}}{V_{a1,k}/m_{a1,k} - v_{0a}} \tag{10'}$$

$$P_{a2,k} = \frac{v_{0,a}}{c_{p,a}} \cdot \frac{E_{a2,k}/m_{a2,k} - e_{a0}}{V_{a2,k}/m_{a2,k} - v_{0a}} \tag{12'}$$

$$T_{a1,k} = \frac{V_{a1,k}/m_{a1,k}}{c_{Ta}} \cdot \frac{E_{a1,k}/m_{a1,k} - e_{0a}}{V_{a1,k}/m_{a1,k} - v_{0a}} \tag{37'}$$

$$T_{a2,k} = \frac{V_{a2,k}/m_{a2,k}}{c_{Ta}} \cdot \frac{E_{a2,k}/m_{a2,k} - e_{0a}}{V_{a2,k}/m_{a2,k} - v_{0a}} \tag{40'}$$

$$T_k = \frac{\left(E_k - \frac{m \cdot v_k^2}{2}\right)/m}{c_T} \tag{38'}$$

$$f_{1,k} = P_{a1,k} \cdot A \tag{7'}$$

$$f_{2,k} = P_{a2,k} \cdot A \tag{8'}$$

$$f_{r,k} = D \cdot v_k \tag{9'}$$

$$q_{21,k} = K \cdot \sqrt{\left|P_{a2,k} - P_{a1,k}\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_{a2,k} - P_{a1,k}\right) \tag{30'}$$

$$w_{21,k} = q_{21,k} \cdot \left\lfloor \frac{E_{a2,k}}{m_{a2,k}} \cdot \left\lfloor \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(q_{21,k}\right)}{2} \right\rfloor + \frac{E_{a1,k}}{m_{a1,k}} \cdot \left\lfloor \frac{1 - \operatorname{sgn}\left(q_{21,k}\right)}{2} \right\rfloor \right\rfloor \tag{27'}$$

$$w_{1,k} = f_{1,k} \cdot v_k + G \cdot \left(T_{a1,k} - T_k\right) - D \cdot v_k^2 \cdot \left\lfloor \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(v_k\right)}{2} \right\rfloor \tag{28'}$$

CC BY NC ND

$$w_{2,k} = -f_{2,k} \cdot v_k + G \cdot \left(T_{a2,k} - T_k\right) - D \cdot v_k^2 \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{sgn}\left(v_k\right)}{2}\right) \qquad (33')$$

$$x_{k+1} = x_k + v_k \cdot dt \qquad (1')$$

$$m_{a1,k+1} = m_{a1,k} + q_{21,k} \cdot dt \qquad (17')$$

$$m_{a2,k+1} = m_{a2,k} - q_{21,k} \cdot dt \qquad (21')$$

$$p_{k+1} = p_k + \left(f_{1,k} - f_{2,k} - f_{r,k}\right) \cdot dt \qquad (4')$$

$$E_{a1,k+1} = E_{a1,k} + \left(w_{21,k} - w_{1,k}\right) \cdot dt \qquad (16')$$

$$E_{a2,k+1} = E_{a2,k} - \left(w_{21,k} + w_{2,k}\right) \cdot dt \qquad (20')$$

$$E_{k+1} = E_k + \left(w_{1,k} + w_{2,k}\right) \cdot dt \qquad (41')$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación es bastante largo. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.

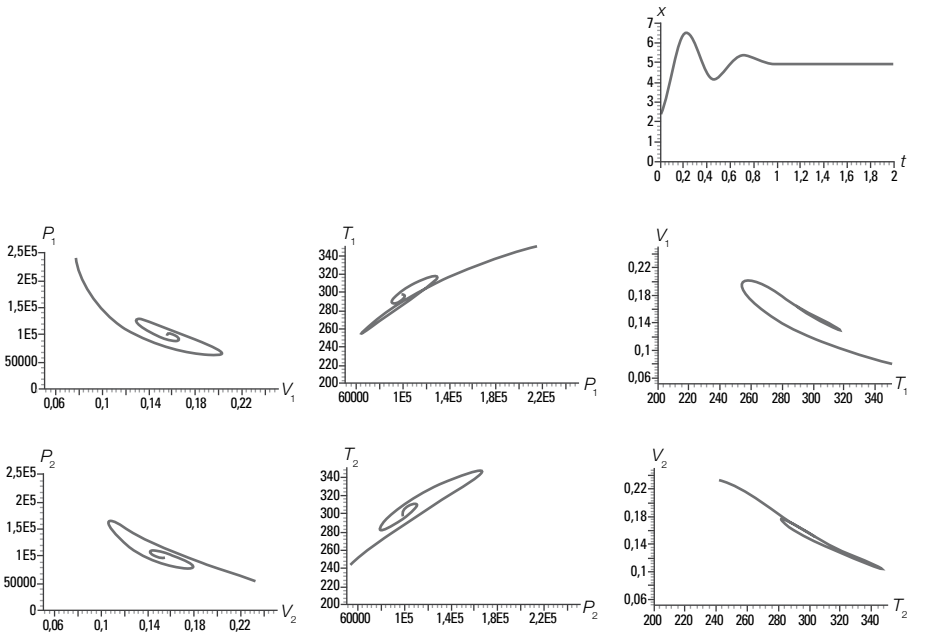


Fig. 3: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (4), (16), (17), (20), (21) y (41) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para la distancia recorrida por el pistón, el momentum y la energía en él, y la masa y la energía en el aire dentro de cada una de las dos cámaras, con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos.

Pero el aburrimiento es mucho. Dejemos el asunto.

CC BY NC ND

68.0

UNA CÁMARA CON UN SOPLADOR (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y TORQUES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos una cámara con un soplador centrífugo que le introduce aire proveniente de la atmósfera por una entrada, y con una válvula que le deja botar aire de vuelta a la atmósfera por la salida.

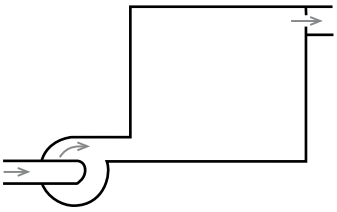


Fig. 1: Una cámara con soplador

Interesa predecir la evolución de la presión del aire en la cámara, suponiendo que su temperatura (casi) se mantiene constante y su composición, también (sin vapor de agua apreciable y con 78.1% de nitrógeno, 42.0% de oxígeno y 0.9% de argón, en porcentajes de masas).

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$P(t)$ es la presión del aire dentro de la cámara, en [N m^{-2}]:

$$P\left(t\right) = \frac{1.3803 \cdot 10^{-23}}{720 \cdot 4.808 \cdot 10^{-26}} \cdot \frac{E\left(t\right)}{V} \qquad (1)\ ^{96}$$

$E(t)$ es la energía en el aire dentro de la cámara, en [J]; V es el volumen de la cámara, en [m^3]:

$$E\left(t\right) = E\left(0\right) + \int_0^t \left(w_i\left(\tau\right) - w_o\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \qquad (2)$$

$$V = 8 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$E(0)$ es la energía en el aire dentro de la cámara inicialmente, en [J]; $w_i(t)$ es la potencia entrante a la cámara, en [W]; $w_o(t)$ es la potencia saliente de la cámara, en [W]:

$$E\left(0\right) = 2033000 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

[96] Suponemos e_0=v_0=0.

CC BY NC ND

$$w_i(t) = \begin{cases} q_i(t) \cdot e_{atm} + \left(P(t) - P_{atm}\right) \cdot \dfrac{q_i(t)}{m(t)/V} & \text{si } 0 \le q_i(t) \\ q_i(t) \cdot \dfrac{E(t)}{m(t)} & \text{si } q_i(t) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$w_o(t) = q_o(t) \cdot \frac{E(t)}{m(t)} + G \cdot \left(T(t) - T_{atm}\right) \quad (6)$$

$q_i(t)$ es el caudal de aire que viaja de la atmósfera a la cámara, por el soplador, en [kg s^{-1}]; e_{atm} es la energía específica atmosférica, en [J kg^{-1}]; P_{atm} es la presión atmosférica, en [N m^{-2}]; $m(t)$ es la masa en el aire dentro de la cámara, en [kg]; $q_o(t)$ es el caudal de aire que viaja de la cámara a la atmósfera, por la salida, en [kg s^{-1}]; G es la conductancia térmica por las paredes de la cámara, en [W K^{-1}]; $T(t)$ es la temperatura del aire dentro de la cámara, en [K]; T_{atm} es la temperatura atmosférica, en [K]:

$$q_i(t) = k_i \cdot \sqrt{\left|P_{atm} + \left(1 - r_i(t)\right) \cdot \Delta P_i(t) - P(t)\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_{atm} + \left(1 - r_i(t)\right) \cdot \Delta P_i(t) - P(t)\right) \quad (7)$$

$$e_{atm} = 211000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$P_{atm} = 101300 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(q_i(\tau) - q_o(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (10)$$

$$q_o(t) = k_o(t) \cdot \sqrt{\left|P(t) - P_{atm}\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P(t) - P_{atm}\right) \quad (11)$$

$$G = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (12)$$

$$T(t) = \frac{E(t)/m(t)}{720} \quad (13)$$

$$T_{atm} = \frac{e_{atm}}{720} \quad (14)$$

k_i es un coeficiente de paso por el soplador, en [kg$^{1/2}$ m$^{1/2}$]; $r_i(t)$ es un coeficiente de resbalamiento del aire en las aspas del soplador, en tanto por uno; $\Delta P_i(t)$ es la diferencia de presiones impuesta por el soplador como máximo, cuando el caudal entrante y el resbalamiento son nulos, en [N m^{-2}]; $m(0)$ es la masa en el aire dentro de la cámara inicialmente, en [kg]; $k_o(t)$ es el coeficiente de paso por la salida, en [kg$^{1/2}$ m$^{1/2}$]:

$$k_i = 2 \cdot 10^{-3} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$r_i(t + \Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{si } P(t) < P_{atm} + \delta(t) \\ r_i(t) & \text{si } P_{atm} + \delta(t) \le P(t) < P_{atm} + \Delta P_i(t) - \delta(t) \\ 1 & \text{si } P_{atm} + \Delta P_i(t) - \delta(t) \le P(t) \end{cases} \quad (16)$$

$$\Delta P_i(t) = c_i \cdot n^2(t) \quad (17)$$

CC BY NC ND

$$m(0) = 9.631 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$k_o(t) = \begin{cases} 0.5 \cdot 10^{-3} & \text{si } 360 < t \\ 0.5 \cdot 10^{-3} + 1.667 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 360) & \text{si } 360 \le t < 420 \\ 1.5 \cdot 10^{-3} & \text{si } 420 \le t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

Δt es un retardo del inicio o término del resbalamiento del aire en las aspas, en [s]; $\delta(t)$ es una holgura de la presión, que inicia o termina el resbalamiento del aire, en [N m^{-2}]; c_i es otro coeficiente del soplador, en [N m^{-2} rad^{-2} s^2]; $n(t)$ es la velocidad angular de sus aspas, en [rad s^{-1}]:

$$\Delta t = 0.10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$\delta(t) = d_i \cdot \Delta P_i(t) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$c_i = 500 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$n(t) = \frac{p^*(t)}{J} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

d_i es un tanto por uno, en [N m s N^{-1} m^{-1} s^{-1}]; $p^*(t)$ es el momentum angular en el soplador, en [N m s] con sentido horario; J es el momentum de inercia del soplador, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$d_i = 0.07 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$p^*(t) = p^*(0) + \int_0^t \left(T^*(\tau) - \frac{\left(P(\tau) - P_{atm}\right) \cdot A \cdot r}{k^*} \right) \cdot d\tau \tag{25}$$ [97]

$$J = 25 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$p^*(0)$ es el momentum angular en el soplador inicialmente, en [N m s] con sentido horario; $T^*(t)$ es el torque del ambiente al soplador mediante su motor, en [N m] con sentido horario; A es el área efectiva de enfrentamiento entre las aspas del soplador y la cámara, por un lado, y entre las aspas y el ambiente, por el otro, en [m^2]; r es el radio promedio de giro de las aspas, en [m]; k^* es la relación de transmisión de giro entre el motor y aspas:

$$p^*(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$T^*(t) = 0.36 \cdot V^*(t) - 1.6 \cdot k^* \cdot n(t) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$ [98]

$$A = 0.02 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$r = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$k^* = 5:1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$V^*(t)$ es el voltaje entre los bornes del motor, en [V]:

[97] Suponemos que los momenta en el aire son irrelevantes.

[98] Esta es una aproximación gruesa para un motor de corrientes continuas, con la corriente de campo separada y constante. Los coeficientes son de un motor cuya corriente de campo es 0.26, en [A], cuya inductancia mutua entre devanados es 2.8, en [Hy], y cuya resistencia de armadura es 2, en [Ω]. Estamos ignorando las exigencias de corriente de armadura.

CC BY NC ND

$$V^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 6.667 \cdot t & \text{si } 0 < t \le 30 \\ 200 & \text{si } 30 < t \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (32)$$

El dibujo de la estructura causal es un poco enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: *P* depende de *E*; *E*, de w_i y w_o; w_i, de q_i, *P*, *m* y *E*; w_o, de q_o, *E*, *m* y *T*; q_i, de r_i, ΔP_i y *P*; *m*, de q_i y q_o; q_o, de k_o y *P*; *T*, de *E* y *m*; r_i, de *P*, δ y ΔP_i; ΔP_i, de *n*; δ, de ΔP_i; *n*, de *p**; *p**, de *T** y *P*; y *T**, de *V** y *n*; mientras, *V** y k_o quedan independientes.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (3), (4), (8), (9), (12), (14), (15), (18), (20), (22), (24), (26), (27), (29), (30) y (31) no contienen ninguna variable que evoluciona: (19) y (32) contienen 1 cada una; (1), (17), (21) y (23), 2; (2), (10), (11), (13), (25) y (28), 3; (7) y (16), 3; (5) y (6), 5; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 16 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 4^2 \cdot 5^2$ (=4665600) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(32).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal, un torque o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa, el momentum o la energía en el recinto, sino que la masa, el momentum o la energía depende por integración de todos los caudales, todos los torques o todas las potencias.

(2), (10) y (25) tienen una energía, una masa o un momentum despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 4665600 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(32), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5^2$ (=172800).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 172800 sistemas de ecuaciones restantes, 172799 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (con retardos en todas las dependencias mutuas: (1)-(32).

Si nos interesa la evolución de la presión *P*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (10) y (25); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *E* inicial, *m* inicial, r_i inicial, *p** inicial, *V*, e_{atm}, P_{atm}, *G*, T_{atm}, k_i, c_i, *J*, *A*, *r*, *k**, k_o, *V**, *dt* (=Δt) y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(32) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son un poco largos. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, dt=Δt=0.1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

CC BY NC ND

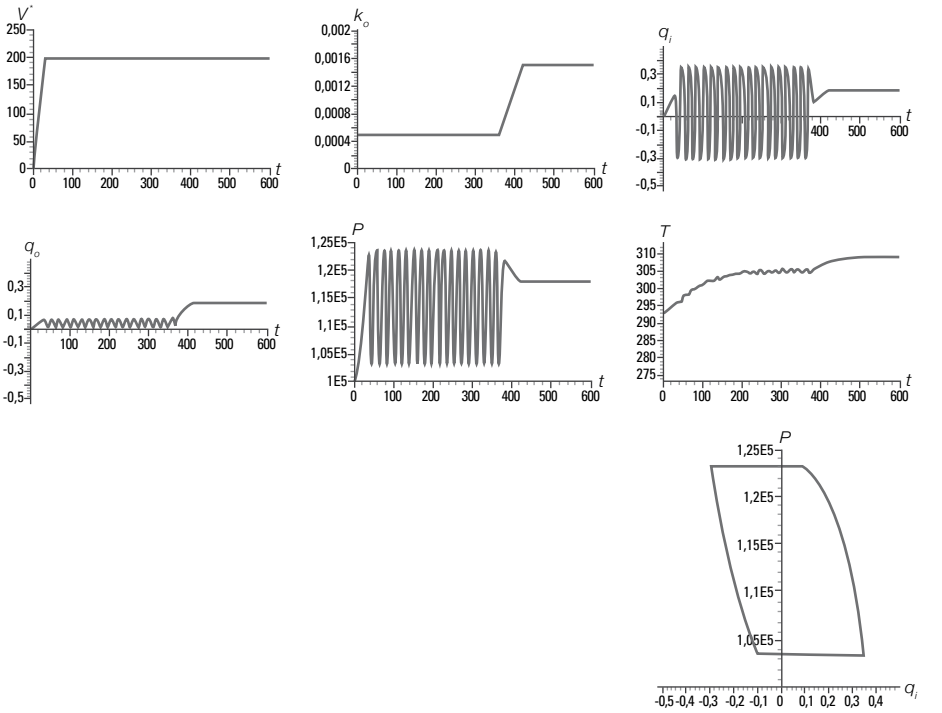


Fig. 2: Predicciones (abajo, para 100<*t*<300)

Apéndice acerca de la Mecánica para (7), (16), (17) y (21)

Figuras como la A1 se presentan habitualmente al describir las conductas de los sopladores, y se usan para justificar gráficos como el inferior de la figura 2.

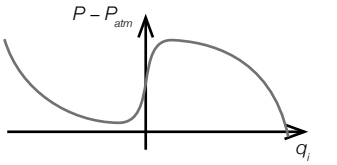


Fig. A1: Conducta de un soplador

Según la descripción, las curvas de la izquierda y la derecha se deben al roce interno; las variaciones de q_i son (casi) proporcionales a la raíz cuadrada de $P\text{-}P_{atm}$; y el desplazamiento mutuo de ambas curvas en la región central se debe a la acción de las aspas de los sopladores, la cual es afectada por el resbalamiento del aire en ellas: si $P\text{-}P_{atm}$ intenta ser menor que un límite inferior, el aire se agarra y avanza con $0<q_i$; si $P\text{-}P_{atm}$ intenta ser mayor que un límite superior, el aire se resbala y retrocede con $q_i<0$; y si $P\text{-}P_{atm}$ se mantiene entre ambos límites, el aire se mantiene con $0<q_i$ o con $q_i<0$.

Pero la figura A1 y la descripción se contradicen porque en la figura aparece $P\text{-}P_{atm}$ dependiendo de q_i y en la descripción, dominando a q_i. La figura A2 es mejor.

CC BY NC ND

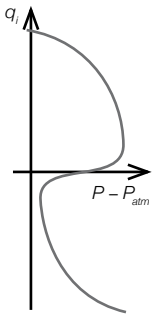


Fig. A2: Conducta de un soplador

De hecho, falta otra variable dominante: un índice r_i que se haga 0 con el agarre y 1 con el resbalamiento.

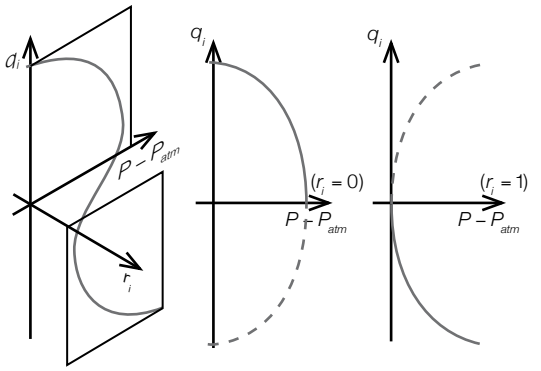


Fig. A3: Conducta de un soplador

Así es fácil suponer:

$$q_i = k_i \cdot \sqrt{\left|P_{atm} + \left(1 - r_i\right) \cdot \Delta P_i - P\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_{atm} + \left(1 - r_i\right) \cdot \Delta P_i - P\right)$$

$$r_i\left(t + \Delta t\right) = \begin{cases} 0 & \forall P < P_{atm} + \delta \\ r_i\left(t\right) & P_{atm} + \delta \le P < P_{atm} + \Delta P_i - \delta \\ 1 & P_{atm} + \Delta P_i - \delta \le P \end{cases}$$

$$\Delta P_i = c_i \cdot n^2$$

La holgura δ debe depender de ΔP_i para evitar algunas discordancias; específicamente, según:

$$\delta = d_i \cdot \Delta P_i$$

Esto merece algunas explicaciones.

La figura A1 se refiere a un soplador con velocidad angular n constante. Cuando esa velocidad es variable, la experiencia dice que, si el soplador opera con $n=n_A$, $q_i=q_{i,A}$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_A$ en una circunstancia, opera (casi) con $n=n_B$, $q_i=q_{i,B}=q_{i,A}\cdot(n_B/n_A)$

BY NC ND

y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_B=(P\text{-}P_{atm})_A\cdot(n_B/n_A)^2$ en alguna otra. Esa experiencia suele sugerir la ecuación bifurcada que sigue (u otra equivalente) en el estilo de la figura A1:

$$P-P_{atm}=\begin{cases}-\alpha\cdot\left(q_i-\beta\cdot n\right)^2+\gamma\cdot n^2 & \text{si}\quad r=0\\ \varepsilon\cdot\left(q_i+\phi\cdot n\right)^2+\varphi\cdot n^2 & \text{si}\quad r=1\end{cases}$$

donde α, β, γ, ε, ϕ y φ son coeficientes positivos, de modo que, si el soplador opera con $n=n_A$, $q_i=q_{i,A}$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_A$:

$$\left(P-P_{atm}\right)_A=\begin{cases}-\alpha\cdot\left(q_{i,A}-\beta\cdot n_A\right)^2+\gamma\cdot n_A^2 & \text{si}\quad r=0\\ \varepsilon\cdot\left(q_{i,A}+\phi\cdot n_A\right)^2+\varphi\cdot n_A^2 & \text{si}\quad r=1\end{cases}$$

y si la operación varía a $n=n_B$, $q_i=q_{i,B}=q_{i,A}\cdot(n_B/n_A)$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_B$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(P-P_{atm}\right)_B&=\begin{cases}-\alpha\cdot\left(q_{i,B}-\beta\cdot n_B\right)^2+\gamma\cdot n_B^2 & \text{si}\quad r=0\\ \varepsilon\cdot\left(q_{i,B}+\phi\cdot n_B\right)^2+\varphi\cdot n_B^2 & \text{si}\quad r=1\end{cases}\\ &=\begin{cases}-\alpha\cdot\left(q_{i,A}\cdot\left(n_B/n_A\right)-\beta\cdot n_A\cdot\left(n_B/n_A\right)\right)^2+\gamma\cdot n_A^2\cdot\left(n_B/n_A\right)^2 & \text{si}\quad r=0\\ \varepsilon\cdot\left(q_{i,B}\cdot\left(n_B/n_A\right)+\phi\cdot n_A\cdot\left(n_B/n_A\right)\right)^2+\varphi\cdot n_A^2\cdot\left(n_B/n_A\right)^2 & \text{si}\quad r=1\end{cases}\\ &=\begin{cases}\left(-\alpha\cdot\left(q_{i,A}-\beta\cdot n_A\right)^2+\gamma\cdot n_A^2\right)\cdot\left(n_B/n_A\right)^2 & \text{si}\quad r=0\\ \left(\varepsilon\cdot\left(q_{i,B}+\phi\cdot n_A\right)^2+\varphi\cdot n_A^2\right)\cdot\left(n_B/n_A\right)^2 & \text{si}\quad r=1\end{cases}\\ &=\left(P-P_{atm}\right)_A\cdot\left(n_B/n_A\right)^2\end{aligned}$$

lo cual concuerda con la experiencia.

El caso es que la ecuación sugerida pide conjugar un par de parábolas, una abierta hacia abajo (si r=0) y otra abierta hacia arriba (si r=1), con:

$$\begin{cases}\left(P-P_{atm}\right)_{\max}=\gamma\cdot n^2,\ \text{cuando}\ q_i=\beta\cdot n, & \text{si}\quad r=0\\ \left(P-P_{atm}\right)_{\min}=\varphi\cdot n^2,\ \text{cuando}\ q_i=-\phi\cdot n, & \text{si}\quad r=1\end{cases}$$

y se suele suponer que r varía de 0 a 1 cuando $P\text{-}P_{atm}$ alcanza el máximo señalado, y que r varía de 1 a 0 cuando $P\text{-}P_{atm}$ alcanza el mínimo también señalado. Además, se suele conjugar las dos parábolas suponiendo que coinciden con derivadas iguales en una misma circunstancia; digamos, cuando $q_i=q_i{}^*$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})^*$. Así, prontamente:

CC BY NC ND

$$\left.\frac{\partial\left(P-P_{atm}\right)}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_{i,*},r=0}=-2\cdot\alpha\cdot\left(q_{i,*}-\beta\cdot n\right)=\left.\frac{\partial\left(P-P_{atm}\right)}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_{i,*},r=1}=2\cdot\varepsilon\cdot\left(q_i+\phi\cdot n\right)$$

luego $q_{i,*}=\dfrac{\alpha\cdot\beta-\varepsilon\cdot\phi}{\alpha+\varepsilon}\cdot n$

luego $\left(P-P_{atm}\right)_*=\left(P-P_{atm}\right)\Big|_{q_i=q_{i,*},r=0}=-\alpha\cdot\left(q_{i,*}-\beta\cdot n\right)^2+\gamma\cdot n^2=\dfrac{\gamma\cdot\left(\alpha+\varepsilon\right)^2-\alpha\cdot\varepsilon^2\cdot\left(\beta+\phi\right)^2}{\left(\alpha+\varepsilon\right)^2}\cdot n^2$

$$=\left(P-P_{atm}\right)\Big|_{q_i=q_{i,*},r=1}=\varepsilon\cdot\left(q_{i,*}+\phi\cdot n\right)^2+\varphi\cdot n^2=\frac{\varphi\cdot\left(\alpha+\varepsilon\right)^2+\varepsilon\cdot\alpha^2\cdot\left(\beta+\phi\right)^2}{\left(\alpha+\varepsilon\right)^2}\cdot n^2$$

luego $\gamma\cdot\left(\alpha+\varepsilon\right)^2-\alpha\cdot\varepsilon^2\cdot\left(\beta+\phi\right)^2=\varphi\cdot\left(\alpha+\varepsilon\right)^2+\varepsilon\cdot\alpha^2\cdot\left(\beta+\phi\right)^2$

luego $\left(\alpha+\varepsilon\right)\cdot\left(\gamma-\varphi\right)=\alpha\cdot\varepsilon\cdot\left(\left(\beta+\phi\right)\right)^2$

La última condición, que obedece a la simetría de cada una de las dos parábolas involucradas, traba mutuamente la distancia $\gamma\cdot n\text{-}\varphi\cdot n=(\gamma-\varphi)\cdot n$ entre los extremos de $P\text{-}P_{atm}$ y la distancia $\beta\cdot n\text{-}(-\phi\cdot n)=(\beta+\phi)\cdot n$ entre los estados de q_i correspondientes a esos extremos.

Aquí hemos destrabado tales distancias ignorando las simetrías de la parábolas, suponiendo que r varía de 0 a 1 (de $0<q_i$ a $q_i<0$) cuando $P\text{-}P_{atm}$ intenta ser mayor que un límite superior bajo el máximo hipotético de una parábola (donde $P\text{-}P_{atm}$ sería ΔP_i y q_i sería 0), suponiendo que r varía de 1 a 0 (de $q_i<0$ a $0<q_i$) cuando $P\text{-}P_{atm}$ intenta ser menor que un límite inferior sobre el mínimo hipotético de otra parábola (donde $P\text{-}P_{atm}$ sería 0 y q_i también sería 0), y, seguramente, excediéndonos un poco en las simplificaciones. De todos modos, hemos decidido:

$$q_i=k_i\cdot\sqrt{\left|P_{atm}+\left(1-r_i\right)\cdot\Delta P_i-P\right|}\cdot\operatorname{sgn}\left(P_{atm}+\left(1-r_i\right)\cdot\Delta P_i-P\right)$$

$$r_i\left(t+\Delta t\right)=\begin{cases}0 & \forall P<P_{atm}+\delta\\ r_i\left(t\right) & P_{atm}+\delta\le P<P_{atm}+\Delta P_i-\delta\\ 1 & P_{atm}+\Delta P_i-\delta\le P\end{cases}$$

$$\Delta P_i=c_i\cdot n^2$$

$$\delta=d_i\cdot\Delta P_i$$

con lo cual:

$$r_i\left(t+\Delta t\right)=\begin{cases}0 & \forall P-P_{atm}<d_i\cdot c_i\cdot n^2\\ r_i\left(t\right) & d_i\cdot c_i\cdot n^2\le P-P_{atm}<\left(1-d_i\right)\cdot c_i\cdot n^2\\ 1 & \left(1-d_i\right)\cdot c_i\cdot n^2\le P-P_{atm}\end{cases}$$

$$q_i=k_i\cdot\sqrt{\left|\left(1-r_i\right)\cdot c_i\cdot n^2-\left(P-P_{atm}\right)\right|}\cdot\operatorname{sgn}\left(\left(1-r_i\right)\cdot c_i\cdot n^2-\left(P-P_{atm}\right)\right)$$

si el soplador opera con $n=n_A$, $q_i=q_{i,A}$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_A$:

BY NC ND

$$q_i = k_i \cdot \sqrt{\left|\left(1-r_i\right)\cdot c_i \cdot n^2 - \left(P-P_{atm}\right)\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\left(1-r_i\right)\cdot c_i \cdot n^2 - \left(P-P_{atm}\right)\right)$$

$$r_{i,A}\left(t+\Delta t\right) = \begin{cases} 0 & \forall \left(P-P_{atm}\right)_A < d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \\ r_{i,A}\left(t\right) & d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A < \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \\ 1 & \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A \end{cases}$$

si la operación varía a $n=n_B$, $q_i=q_{i,B}$ y $P\text{-}P_{atm}=(P\text{-}P_{atm})_B=(P\text{-}P_{atm})_A\cdot(n_B/n_A)^2$ (dando por asentado que $0<n_A$ y $0<n_B$), entonces:

$$\begin{aligned} r_{i,B}\left(t+\Delta t\right) &= \begin{cases} 0 & \forall \left(P-P_{atm}\right)_B < d_i \cdot c_i \cdot n_B^2 \\ r_{i,B}\left(t\right) & d_i \cdot c_i \cdot n_B^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_B < \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_B^2 \\ 1 & \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_B^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \forall \left(P-P_{atm}\right)_A \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 < d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 \\ r_{i,B}\left(t\right) & d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 < \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 \\ 1 & \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \forall \left(P-P_{atm}\right)_A < d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \\ r_{i,B}\left(t\right) & d_i \cdot c_i \cdot n_A^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A < \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \\ 1 & \left(1-d_i\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \le \left(P-P_{atm}\right)_A \end{cases} \\ &= r_{i,A}\left(t+\Delta t\right) \quad \text{si} \quad r_{i,B}\left(0\right) = r_{i,A}\left(0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{i,B} &= k_i \cdot \sqrt{\left|\left(1-r_{i,B}\right)\cdot c_i \cdot n_B^2 - \left(P-P_{atm}\right)_B\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\left(1-r_{i,B}\right)\cdot c_i \cdot n_B^2 - \left(P-P_{atm}\right)_B\right) \\ &= k_i \cdot \sqrt{\left|\left(1-r_{i,A}\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 - \left(P-P_{atm}\right)_A \cdot \left(n_B/n_A\right)^2\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\left(1-r_{i,A}\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 \cdot \left(n_B/n_A\right)^2 - \left(P-P_{atm}\right)_A \cdot \left(n_B/n_A\right)^2\right) \\ &= k_i \cdot \sqrt{\left|\left(1-r_{i,A}\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 - \left(P-P_{atm}\right)_A\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\left(1-r_{i,A}\right)\cdot c_i \cdot n_A^2 - \left(P-P_{atm}\right)_A\right) \cdot \left(n_B/n_A\right) \\ &= q_{i,A} \cdot \left(n_B/n_A\right) \end{aligned}$$

y esto concuerda con la experiencia antedicha.

CC BY NC ND

69.0

UN MOTOR A EXPLOSIÓN DE UN CILINDRO Y CUATRO TIEMPOS [99] (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Los motores a explosión han existido durante bastante tiempo. En 1807, François Isaac de Rivaz (1752-1828) construyó uno que funcionaba con una mezcla de hidrógeno y oxígeno, y lo instaló en un vehículo. Entre 1858 y 1863, Jean Joseph Etienne Lenoir (1822-1900) construyó y patentó otro capaz de funcionar con gases del carbón regulados por un carburador primitivo y detonados por chispas eléctricas, lo instaló en un vehículo de tres ruedas, y recorrió 80 kilómetros alimentando el motor con petróleo. En 1862, Alphonse Beau de Rochas (1815-1693) patentó el principio de los cuatro tiempos sin construir el motor correspondiente. En 1864, Siegfried Marcus (1831-1898) construyó un motor de un cilindro, con carburador, y lo instaló en un vehículo. En 1873, George Brayton (1830-1892) desarrolló un motor de dos tiempos confiable, que funcionaba con queroseno bombeado por cilindros externos. Entre 1861 y 1876, Ernst Rödl Nikolaus August Otto (1832-1891) y Eugen Langen (1833-1895) construyeron un motor de dos tiempos, mejoraron los diseños de Lenoir y de Rochas y construyeron un motor de cuatro tiempos muy exitoso, que fue adoptado masivamente en automóviles, aeroplanos y otros vehículos. En 1876, Dugald Clerk (1854-1932) construyó un motor de dos tiempos exitoso. En 1883, Edouard Delamare-Deboutteville (1855-1901) y Léon Malandin (1849-1912) construyeron un motor de un cilindro que funcionaba con gases de estufas.

Imaginemos un motor a explosión de un cilindro y cuatro tiempos.

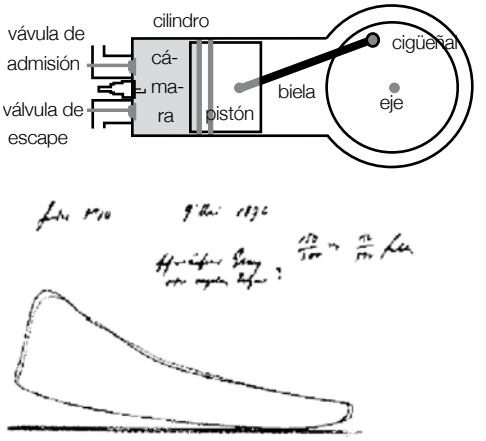


Fig. 1: Esquema de un motor a explosión de un cilindro y cuatro tiempos, y esbozo de evoluciones conjuntas del volumen de la cámara (horizontalmente) y la presión (verticalmente) según Otto (1876)

[99] Reformulación de: J. Glaría, T. Wendler y G. Goodwin, 2005, An introductory model of a one-piston engine, *Eur. J. of Phys.* 26, 1115-1125

CC BY NC ND

La parte superior de la figura 1 sirve para explicar el funcionamiento del motor: cuando el pistón está metido al máximo en el cilindro, una chispa eléctrica detona una mezcla (casi) gaseosa de combustible y aire que está comprimida en la cámara, e inicia una combustión que libera energía explosivamente; cuando el pistón se mueve hacia afuera, los gases se expanden entregando momentum al pistón, a la biela, al cigüeñal y, principalmente, al eje (cargado); cuando el pistón se devuelve hacia adentro por el momentum en el eje, habiéndose abierto la válvula de escape, los gases son expulsados de la cámara; cuando el pistón se devuelve hacia afuera otra vez, habiéndose cerrado la válvula de escape y abierto la de admisión, una mezcla fresca es introducida en la cámara; y cuando el pistón se devuelve hacia adentro una vez más, habiéndose cerrado la válvula de admisión, la mezcla es comprimida en la cámara. La parte inferior de la figura 1 muestra un esbozo hecho por Otto en 1876 para explicar las evoluciones conjuntas del volumen de la cámara (horizontalmente) y su presión (verticalmente), sin consideraciones respecto a la causalidad.

Pero interesa predecir la evolución de la potencia disponible en el eje (cargado). El dibujo de la estructura espacial es bastante enredado. Saltémoslo.

t es el tiempo, en [s].

$W(t)$ es la potencia disponible en el eje, en [W]:

$$W\left(t\right) = T\left(t\right) \cdot n\left(t\right) \tag{1}$$

$T(t)$ es el torque de la cámara al eje, a través del pistón, de la biela y del cigüeñal, en [N m] con sentido horario; $n(t)$ es la velocidad angular del eje, en [rad s^{-1}] con sentido horario:

$$T\left(t\right) = f\left(t\right) \cdot r \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\left(t\right)\right)}{2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\left(\theta\left(t\right)\right)}} + \sin\left(\theta\left(t\right)\right) \right) \tag{2}$$

$$n\left(t\right) = \frac{p\left(t\right)}{J} \tag{3}$$

$f(t)$ es la fuerza neta de la cámara al pistón, en [N]; r es el radio de la circunferencia descrita por el cigüeñal en torno al eje (es decir, la mitad del recorrido del pistón), en [m]; $\theta(t)$ es el ángulo de rotación del eje, en [rad] con sentido horario desde el ángulo que deja al pistón metido al máximo en el cilindro después de la compresión; l es la longitud de la biela, en [m]; $p(t)$ es el momentum angular en el eje, en [N m s] con sentido horario; J es el momentum de inercia del eje, en [N m rad^{-1} s^2]:

$$f\left(t\right) = \left(P_g\left(t\right) - P_{at}\right) \cdot A_p \tag{4}$$

$$r = 0.050 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$\theta\left(t\right) = \theta\left(0\right) + \int_0^t n\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{6}$$

$$l = 0.150 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$p\left(t\right) = p\left(0\right) + \int_0^t \left(T\left(\tau\right) - D \cdot n\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{8}$$ [100]

[100] Si hay torque de roce viscoso.

CC BY NC ND

$$J = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$ [101]

$P_g(t)$ es la presión (concentración de fuerza) de la cámara al pistón, en [N m^{-2}]; P_{at} es la atmosférica, en [N m^{-2}]); A_p es el área transversal del pistón, en [m^2]; $\theta(0)$ es el ángulo de rotación del cigüeñal inicialmente, en [rad] con sentido horario; $p(0)$ es el momentum angular en el eje inicialmente, en [N m s] con sentido horario; D es el coeficiente de roce angular del eje, en [N m rad^{-1} s]:

$$P_g\left(t\right) = \frac{v_{0g}}{c_{Pg}} \cdot \frac{\frac{E_g\left(t\right)}{m_g\left(t\right)} - e_{0g}}{\frac{V_g\left(t\right)}{m_g\left(t\right)} - v_{0g}} \tag{10}$$

$$P_{at} = 101300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$A_p = 0.0025 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$$\theta\left(0\right) = 5.24 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$p\left(0\right) = 30 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$D = 0.23 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

v_{0g} es un remanente de volumen específico de los gases dentro de la cámara, en [m^3 kg^{-1}]; c_{Pg} es un coeficiente de los gases, en [J kg^{-1} N^{-1} m^2]; $E_g(t)$ es la energía en los gases, en [J]; $m_g(t)$ es la masa en los gases, en [kg]; e_{0g} es la energía específica de referencia de los gases, en [J kg^{-1}]; $V_g(t)$ es el volumen de los gases, en [m^3]:

$$v_{0g} = \frac{c_{Pg} \cdot k_B}{c_{Tg} \cdot \mu_g} \tag{16}$$

$$c_{Pg} = 4.10 \cdot 10^{-4} \tag{17}$$ [102]

$$E_g\left(t\right) = E_g\left(0\right) + \int_0^t \left(w_{ig}\left(\tau\right) - w_{og}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{18}$$

$$m_g\left(t\right) = m_g\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{ig}\left(\tau\right) - q_{og}\tau\right) \cdot d\tau \tag{19}$$

$$e_{0g} = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$V_g\left(t\right) = A_p \cdot \left(y_0 - y\left(t\right)\right) \tag{21}$$

k_B es la constante de Boltzmann, en [J K^{-1}]; c_{Tg} es el calor específico de los gases, en [J kg^{-1} K^{-1}]; μ_g es el promedio de las masas moleculares del aire, en [kg]; $E_g(0)$ es la energía en los gases inicialmente, en [J]; $w_{ig}(t)$ es la potencia entrante a la cámara,

[101] Si el motor está instalado en una moto con 200 kilogramos de masa total, 1:4 de relación de transmisión y ruedas de 56 centímetros de diámetro.

[102] Si el carburador garantiza una proporción pequeña pero adecuada entre combustible y aire, de manera que los gases incluyen pocos residuos de la combustión y poco combustible, y son casi los gases del aire.

CC BY NC ND

en [W]; $w_{og}(t)$ es la potencia saliente de la cámara, en [W]; $m_g(0)$ es la masa en los gases inicialmente, en [kg]; $q_{ig}(t)$ es el caudal de masa (casi gaseosa) del ambiente a la cámara, en [kg s^{-1}]; $q_{og}(t)$ es el caudal de masa (gaseosa) de la cámara al ambiente, en [kg s^{-1}]; y_0 es la distancia desde el eje hasta el fondo del cilindro, en [m]; $y(t)$ es la distancia desde el eje hasta el extremo anterior del pistón, en [m]:

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \tag{22}$$

$$c_{Tg} = 720 \tag{23}$$ [103]

$$\mu_g = 4.81 \cdot 10^{-26} \tag{24}$$ [104]

$$E_g(0) = 27.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$w_{ig}(t) = e_{ig} \cdot q_{ig}(t) + w_{comb}(t) \tag{26}$$

$$w_{og}(t) = G \cdot \left(T_g(t) - T_{at}\right) + P_g(t) \cdot A_p \cdot u_p(t) + \frac{E_g(t)}{m_g(t)} \cdot q_{og}(t) \tag{27}$$

$$m_g(0) = 9.65 \cdot 10^{-5} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$$q_{ig}(t) = k_{qi}(t) \cdot \frac{P_{at} \cdot \sqrt{\left|P_{at} - P_g(t)\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_{at} - P_g(t)\right)}{\sqrt{T_{at} \cdot P_g(t)}} \tag{29}$$

$$q_{og}(t) = k_{qo}(t) \cdot \frac{P_g(t) \cdot \sqrt{\left|P_g(t) - P_{at}\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(P_g(t) - P_{at}\right)}{\sqrt{T_g(t) \cdot P_{at}}} \tag{30}$$

$$y_0 = 0.210 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$y(t) = r \cdot \cos\left(\theta(t)\right) + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\left(\theta(t)\right)} \tag{32}$$

e_{ig} es la energía específica de la mezcla entrante (casi gases del aire), en [J kg^{-1}]; $w_{comb}(t)$ es la potencia liberada por la combustión, de la constitución molecular a la cinética de los gases, en [W]; G es la conductancia térmica entre el cilindro y la atmósfera, en [W K^{-1}]; $T_g(t)$ es la temperatura de los gases, en [K]; T_{at} es la temperatura atmosférica, en [K]; $u_p(t)$ es la velocidad del pistón, en [m s^{-1}] hacia la derecha; $k_{qi}(t)$ es un coeficiente de paso a través de la válvula de admisión, según una leva, en [kgs^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$]; $k_{qo}(t)$ es el coeficiente de paso a través de la válvula de escape, según otra leva, en [kg s^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$]:

$$e_{ig} = 210930 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$w_{comb}(t) = k_{comb}(t) \cdot \lambda_f \cdot m_f(t) \tag{34}$$

$$G = 13 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

[103] Si son casi los gases del aire.
[104] Si son casi los gases del aire.

CC BY NC ND

$$T_g\left(t\right)=\frac{\dfrac{V_g\left(t\right)}{m_g\left(t\right)}}{c_{Tg}}\cdot\frac{\dfrac{E_g\left(t\right)}{m_g\left(t\right)}-e_{0g}}{\dfrac{V_g\left(t\right)}{m_g\left(t\right)}-v_{0g}} \tag{36}$$

$$T_{at}=293 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{37}$$

$$u_p\left(t\right)=n\left(t\right)\cdot r\cdot\left(\frac{r\cdot\sin\left(2\cdot\theta\left(t\right)\right)}{2\cdot\sqrt{l^2-r^2\cdot\sin^2\left(\theta\left(t\right)\right)}}+\sin\left(\theta\left(t\right)\right)\right) \tag{38}$$

$$k_{qi}\left(t\right)=\begin{cases}1\cdot10^{-5} & \text{si} \quad 6.4\le\theta_r\left(t\right)<9.4\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{39}$$

$$k_{qo}\left(t\right)=\begin{cases}1\cdot10^{-5} & \text{si} \quad 3.2\le\theta_r\left(t\right)<6.2\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{40}$$

$k_{comb}(t)$ es un coeficiente de combustión por ignición, según otra leva, en [s^{-1}]; λ_f es el poder calorífico del combustible, en [J kg^{-1}]; $m_f(t)$ es la masa de combustible dentro de la cámara, en [kg]; $\theta_r(t)$ es el ángulo de repetición de movimiento de las levas (cada dos vueltas del eje), en [rad]:

$$k_{comb}\left(t\right)=\begin{cases}500 & \text{si} \quad \theta_0<0, \quad \text{y} \quad \theta_r\left(t\right)<\theta_0+2 \quad \text{o} \quad \theta_0+4\cdot\pi\le\theta_r\\ 500 & \text{si} \quad 0\le\theta_0 \quad \text{y} \quad \theta_0\le\theta_r\le\theta_0+2\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{41}$$

$$\lambda_f=4.5\cdot10^7 \tag{42}$$ [105]

$$m_f\left(t\right)=m_f\left(0\right)+\int_0^t\left(r_f\cdot q_{ig}\left(\tau\right)-k_{comb}\left(\tau\right)\cdot m_f\left(\tau\right)-\frac{m_f\left(\tau\right)}{m_g\left(\tau\right)}\cdot q_{og}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{43}$$

$$\theta_r\left(t\right)=\theta\left(t\right)-4\cdot\pi\cdot\operatorname{int}\left(\frac{\theta\left(t\right)}{4\cdot\pi}\right) \tag{44}$$

θ_0 es el ángulo de inicio de la ignición incluido en el ángulo de repetición de movimiento de las levas, en [rad]; $m_f(0)$ es la masa de combustible dentro de la cámara inicialmente, en [kg]; r_f es el coeficiente de proporción estequiométrica entre el combustible y el aire de la mezcla, en [kg (de combustible) kg^{-1} (de aire)]:

$$\theta_0=-0.031 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{45}$$

$$m_f\left(0\right)=5.60\cdot10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{46}$$

[105] Si el combustible es octano.

CC BY NC ND

$r_f = 0.050$ (47) [106]

El dibujo de la estructura causal es bastante enredado, también, si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (5), (7), (9), (11), (12), (13), (14), (15) (16), (17), (20), (22), (23), (24), (25), (28), (31), (33), (35), (37), (42), (45), (46) y (47) no contienen ninguna variable que evoluciona: (3), (4), (6), (21), (32), (39), (40), (41) y (44) contienen 2 cada una; (1), (2), (8), (18), (19), (26), (29), (34) y (38), 3; (10), (30) y (36), 4; (43), 5; (27), 7; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 23 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^9 \cdot 3^9 \cdot 4^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ (=22574039040) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(47).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal, una fuerza o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o las otras a través de la frontera y, por derivación, de la masa, el momentum o la energía en el recinto, sino que la masa, el momentum o la energía depende por integración de todos los caudales, las fuerzas o las potencias.

(8), (18), (19) y (43) tienen momenta, energías o masas despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, de los 22574039040 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(47), los cuerdos causalmente son, a lo más $1^4 \cdot 2^9 \cdot 3^6 \cdot 4^3 \cdot 7^1$ (=167215104).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

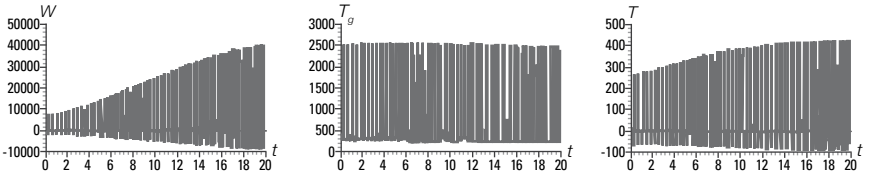
De los 167215104 sistemas de ecuaciones restantes, 167215103 tienen por lo menos una variable que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente

Sólo hay 1 que sí es (con retardos en todas las dependencias mutuas, y pese al empleo descarado de la Geometría en (2) y (37)).

Si nos interesa la evolución de la potencia W; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (6), (8), (18), (19) y (43); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar θ inicial, p inicial, E_g inicial, m_g inicial, m_f inicial, r, I, J, P_{at}, A_p, D, c_{Pg}, e_{0g}, c_{Tg}, μ_g, y_0, e_{ig}, G, T_{at}, λ_f, θ_0, r_f, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(47) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados, también. Saltémoslos.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=0.0001 y algunos detalles adicionales) graficó las figuras 2 y 3.



[106] Si el combustible es octano, y el carburador garantiza una relación adecuada entre combustible y aire.

CC BY NC ND

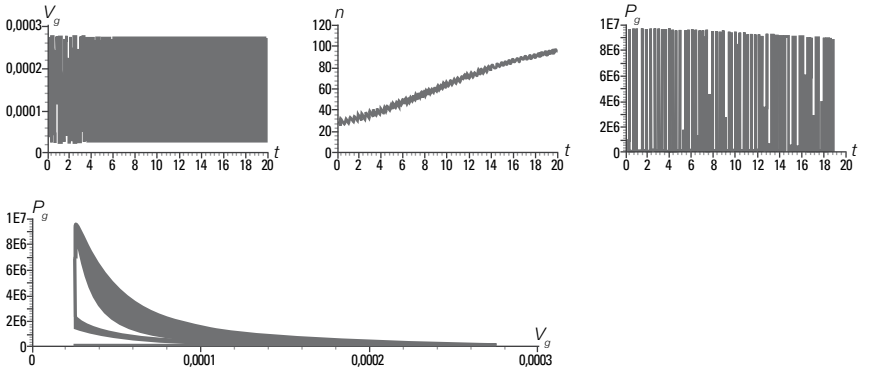


Fig. 2: Predicciones para $0<t<20$

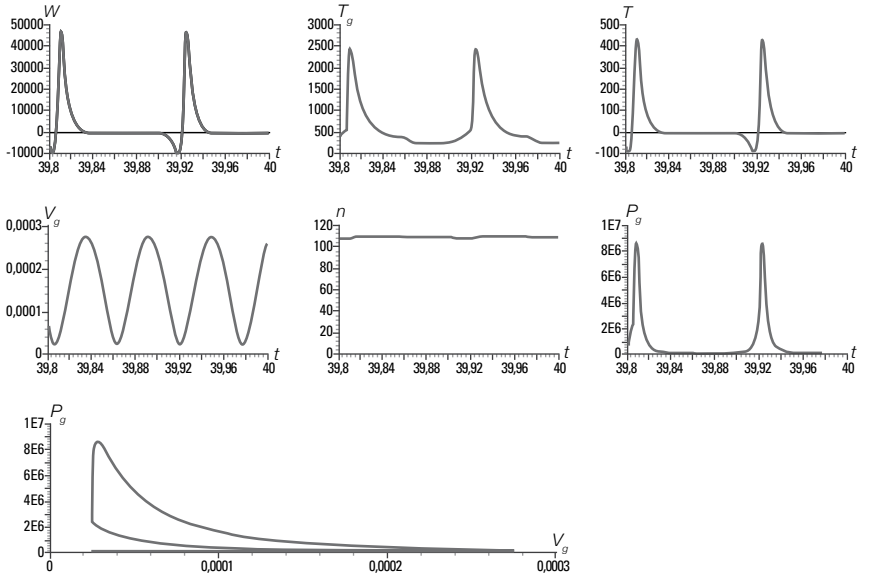


Fig. 3: Predicciones para $39.8<t<40$ (estacionarias)

Estacionariamente, la potencia media disponible en el eje sería de 2.8 kilovatios, la velocidad de rotación media sería de 110 radianes por segundo (1060 vueltas por minuto), el consumo de combustible promedio sería de 0.00015 kilogramos por segundo (0.55 kilogramos por hora), la potencia media liberada por el combustible sería de 6.9 kilovatios y, por consiguiente, la eficiencia sería 0.40. Así, si el motor está instalado en una moto de 200 kilogramos de masa total, 1:4 de relación de transmisión y ruedas de 56 centímetros de diámetro, y si el combustible es octano (con densidad de 740 kilogramos por metro cúbico), la velocidad de traslación media sería de 28 kilómetros por hora y el consumo promedio de combustible sería de 2.6 litros en 100 kilómetros, con un rendimiento de 38.5 kilómetros por litro.

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (6), (8), (18), (19) y (43), podemos plantear ecuaciones diferenciales para el ángulo de rotación del eje, el momentum angular en el eje (cargado), la energía en los gases, la masa en los gases y la masa en el combustible, con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos.

Pero el aburrimiento es mucho. Dejemos el asunto.

Apéndice acerca de la Geometría para (2) y (38)

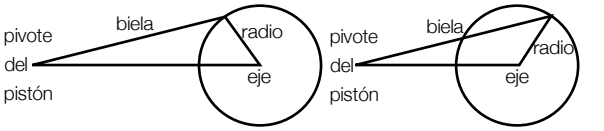


Fig. A1

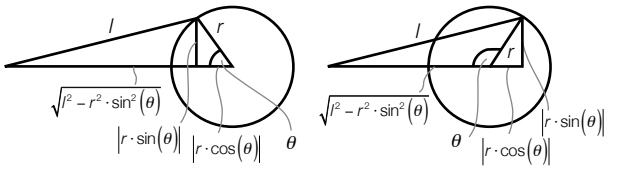


Fig. A2

En el dibujo izquierdo de la figura A2, la distancia desde el eje hasta el pivote del pistón, y el ángulo desde la horizontal hasta la biela, son:

$$|y| = |r \cdot \cos(\theta)| + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \quad \text{si } -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{r \cdot \sin(\theta)}{l}\right) \quad \text{si } -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

En el dibujo derecho de la figura A2, la distancia desde el eje hasta el pivote del pistón, y el ángulo desde la horizontal hasta la biela, son:

$$|y| = \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2(\theta)} - |r \cdot \cos(\theta)| \quad \text{si } \pi/2 \le \theta \le 3 \cdot \pi/2$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{r \cdot \sin(\theta)}{l}\right) \quad \text{si } \pi/2 \le \theta \le 3 \cdot \pi/2$$

Ya que 0≤cos(θ) en el primer caso y cos(θ)≤0 en el segundo, en cualquier caso:

$$y = r \cdot \cos(\theta) + l \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2 \cdot \sin^2(\theta)}{l^2}} \qquad \text{(a1)}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{r \cdot \sin(\theta)}{l}\right) \qquad \text{(a2)}$$

CC BY NC ND

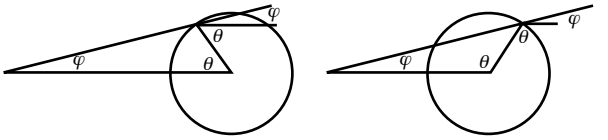


Fig. A3

Según la figura A3, el ángulo desde el radio hasta la biela es, en cualquier caso:

$$\phi = \theta + \varphi \qquad \text{(a3)}$$

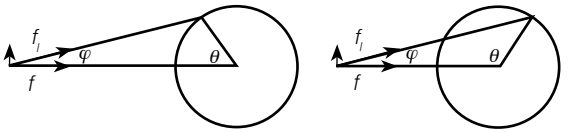


Fig. A4

Según la figura A4, la fuerza horizontal de la cámara al pistón debe ser complementada por una fuerza vertical del cilindro al pistón (sin componente horizontal si el roce es despreciable entremedio) para producir la fuerza inclinada del pistón al cigüeñal por la biela, f_l, de manera que, en cualquier caso:

$$f_l = f \Big/ \cos(\varphi) \qquad \text{(a4)}$$

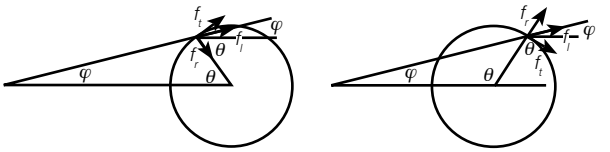


Fig. A5

En el dibujo izquierdo de la figura A5, el ángulo entre f_l y su componente radial en el círculo, f_r, es φ; así, su componente tangencial, f_t, es:

$$f_t = f_l \cdot \sin(\phi) \quad \text{si} \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

En el dibujo derecho de la figura A5, el ángulo entre f_l y su componente f_t, es φ-π/2; así, f_t es:

$$f_t = f_l \cdot \cos(\phi - \pi/2) = f_l \cdot \sin(\phi) \quad \text{si} \quad \pi/2 \le \theta \le 3 \cdot \pi/2$$

Por consiguiente, en cualquier caso:

BY NC ND

$$
\begin{aligned}
f_t &= f_l \cdot \sin\left(\phi\right) \\
&= f_l \cdot \sin\left(\varphi + \theta\right) \\
&= \frac{f}{\cos\left(\theta\right)} \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\right)}{2 \cdot l} + \sin\left(\theta\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot \sin\left(\theta\right)}{l} \right)^2} \right) \\
&= \frac{f}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot \sin\left(\theta\right)}{l} \right)^2}} \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\right)}{2 \cdot l} + \sin\left(\theta\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot \sin\left(\theta\right)}{l} \right)^2} \right) \\
&= f \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\right)}{2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\left(\theta\right)}} + \sin\left(\theta\right) \right)
\end{aligned}
\qquad \text{(a5)}
$$

Y, según (a5), el torque de la cámara al eje, a través del pistón, de la biela y del cigüeñal, es:

$$
T\left(t\right) = f\left(t\right) \cdot r \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\left(t\right)\right)}{2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\left(\theta\left(t\right)\right)}} + \sin\left(\theta\left(t\right)\right) \right) \qquad (2)
$$

Por otro lado, según (a1), la velocidad del pistón hacia la derecha, $u_p = -d_y/d_t$, es:

$$
u_p\left(t\right) = n\left(t\right) \cdot r \cdot \left(\frac{r \cdot \sin\left(2 \cdot \theta\left(t\right)\right)}{2 \cdot \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\left(\theta\left(t\right)\right)}} + \sin\left(\theta\left(t\right)\right) \right) \qquad (38)
$$

BY NC ND

70.0

CONVECCIÓN NATURAL DE AGUA POR UN TUBO CON CALEFACTOR (MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS; ENERGÍAS Y POTENCIAS)

Imaginemos un tubo cilíndrico con un calefactor en su eje, ambos lisos, largos, quietos [107] y sumergidos verticalmente en una piscina llena de agua. El calefactor es mucho más delgado que el tubo, de modo que (casi) no ocupa espacio; el tubo (casi) bloquea la conducción térmica y la convección horizontales, pero tiene sus dos extremos abiertos por completo y las encauza (casi) unidimensionalmente, en forma vertical; y la piscina es mucho más grande que el tubo, de manera que (casi) mantiene constantes las propiedades del agua en ella.

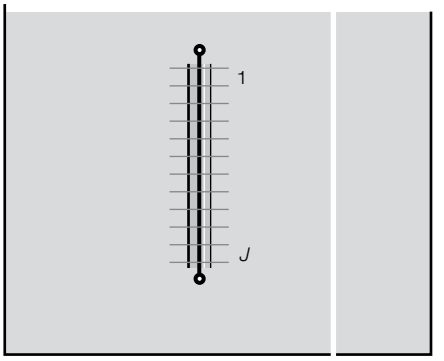


Fig. 1: Tubo con calefactor en una piscina

Interesa predecir las evoluciones de las velocidades del agua a lo largo del tubo, suponiéndola rebanada ficticiamente en forma de rodajas horizontales delgadas, presuntamente homogéneas por dentro [108], numeradas de arriba a abajo y (casi) sin roce por parte del calefactor y el tubo [109].

Como el dibujo de la estructura espacial es bastante enredado, saltémoslo.

t es el tiempo, en [s].

$v_j(t)$ es la velocidad vertical media de la masa de agua de la rodaja j, en [m s^{-1}] hacia arriba:

$$v_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j(t)} \qquad \text{si} \quad 1 \leq j \leq J \tag{1}$$

[107] La quietud es respecto a algún sistema de coordenadas (casi) inercial.

[108] Supongamos eso aunque –confesémoslo– para tal homogeneidad por lo menos el calefactor no debiera ser tan simple.

[109] Supongamos esto aunque –confesémoslo también– para ello no basta que el tubo sea liso.

CC BY NC ND

$p_j(t)$ es el momentum vertical en el agua de la rodaja j, en [N s] hacia arriba; $m_j(t)$ es la masa en la rodaja j, en [kg]; J es el número de rodajas:

$$p_j(t) = \begin{cases} p_1(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} -\left(P_{atm} + \rho_0 \cdot 9.8 \cdot h_{\sup}\right) \cdot A \\ -m_1(\tau) \cdot 9.8 + f_{2,1,e}(\tau) \\ +f_{2,1,r}(\tau) + f_{2,1,c}(\tau) \end{pmatrix} \cdot d\tau & \text{si } j = 1 \\ p_j(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} -m_j(\tau) \cdot 9.8 \\ +f_{j+1,j,e}(\tau) - f_{j,j-1,e}(\tau) \\ +f_{j+1,j,r}(\tau) - f_{j,j-1,r}(\tau) \\ +f_{j+1,j,c}(\tau) - f_{j,j-1,c}(\tau) \end{pmatrix} \cdot d\tau & \text{si } 1 < j < J \\ p_J(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} -m_J(\tau) \cdot 9.8 - f_{J,J-1,e}(\tau) \\ -f_{J,J-1,r}(\tau) - f_{J,J-1,c}(\tau) \\ +\left(P_{atm} + \rho_0 \cdot 9.8 \cdot h_{\inf}\right) \cdot A \end{pmatrix} \cdot d\tau & \text{si } j = J \end{cases} \quad (2)$$

$$m_j(t) = m_j(0) + \int_0^t \left(q_{j+1,j}(\tau) - q_{j,j-1}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad \text{si } 1 \le j \le J \quad (3)$$

$$J = 5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$p_j(0)$ es el momentum vertical en la rodaja j inicialmente, en [N s] hacia arriba; P_{atm} es la presión atmosférica sobre la piscina, en [N m^{-2}]; ρ_0 es la densidad del agua en la piscina, fuera del tubo, en [kg m^{-3}]; g es la aceleración gravitacional, en [m s^{-2}]; h_{sup} es la profundidad del extremo superior del tubo, bajo la superficie del agua de la piscina, en [m] hacia abajo; A es el área transversal del tubo, en [m^2]; $f_{j+1,j,e}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja $j+1$ a la j por elasticidad del agua, en [N] hacia arriba; $f_{j+1,j,r}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja $j+1$ a la j por roce interno, en [N] hacia arriba; $f_{j+1,j,c}(t)$ es la fuerza neta de la rodaja $j+1$ a la j con el caudal, en [N] hacia arriba; h_{inf} es la profundidad del extremo inferior del tubo, en [m]; $m_j(0)$ es la masa inicial en la rodaja j, en [kg]; $q_{j+1,j}(t)$ es el caudal neto de la rodaja $j+1$ a la j, en [kg s^{-1}]:

$$p_j(0) = 0 \quad \text{si } 1 \le j \le J \quad \text{(por ejemplo)} \quad (5)$$

$$P_{atm} = 101325 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$\rho_0 = 997.9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$h_{\sup} = 0.30 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$$A = 0.00785 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

CC BY NC ND

$$f_{j+1,j,e}\left(t\right) = 2.38 \cdot 10^{6} \cdot \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_{j+1}\left(t\right) + \rho_{j}\left(t\right)}{2} - 730.5 \\ -2.026 \cdot \dfrac{T_{j+1}\left(t\right) + T_{j}\left(t\right)}{2} \\ +3.8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\dfrac{T_{j+1}\left(t\right) + T_{j}\left(t\right)}{2} \right)^{2} \end{array} \right) \cdot A \qquad \text{si} \quad 1 \le j < J \qquad (10)$$ [110]

$$f_{j+1,j,r}\left(t\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta_{j+1,j}\left(t\right) \cdot A}{dh} \cdot \left(v_{j+1}\left(t\right) - v_{j}\left(t\right) \right) \qquad \text{si} \quad 1 \le j < J \qquad (11)$$

$$f_{j+1,j,c}\left(t\right) = q_{j+1,j}\left(t\right) \cdot \frac{v_{j+1}\left(t\right) + v_{j}\left(t\right)}{2} \qquad \text{si} \quad 1 \le j < J \qquad (12)$$ [111]

$$h_{\text{inf}} = 0.80 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (13)$$

$$m_{j}\left(0\right) = 0.7833515 \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (14)$$

$$q_{j+1,j}\left(t\right) = \begin{cases} \rho_{1}\left(t\right) \cdot A \cdot v_{1}\left(t\right) & \text{si} \quad 0 < v_{1}\left(t\right) \quad \text{y} \quad j = 0 \\ \rho_{0} \cdot A \cdot v_{1}\left(t\right) & \text{si} \quad v_{1}\left(t\right) \le 0 \quad \text{y} \quad j = 0 \\ \rho_{j+1}\left(t\right) \cdot A \cdot \dfrac{v_{j+1}\left(t\right) + v_{j}\left(t\right)}{2} & \text{si} \quad 0 < \dfrac{v_{j+1}\left(t\right) + v_{j}\left(t\right)}{2} \\ & \text{y} \quad 1 \le j < J \\ \rho_{j}\left(t\right) \cdot A \cdot \dfrac{v_{j+1}\left(t\right) + v_{j}\left(t\right)}{2} & \text{si} \quad \dfrac{v_{j+1}\left(t\right) + v_{j}\left(t\right)}{2} \le 0 \\ & \text{y} \quad 1 \le j < J \\ \rho_{0} \cdot A \cdot v_{J}\left(t\right) & \text{si} \quad 0 < v_{J}\left(t\right) \quad \text{y} \quad j = J \\ \rho_{J}\left(t\right) \cdot A \cdot v_{J}\left(t\right) & \text{si} \quad v_{J}\left(t\right) \le 0 \quad \text{y} \quad j = J \end{cases} \qquad (15)$$

$\rho_j(t)$ es la densidad de la rodaja *j*, en [kg m^{-3}]; $T_j(t)$ es la temperatura de la rodaja *j*, en [K]; $\eta_{j+1,j}(t)$ es la viscosidad dinámica entre la rodaja *j*+1 y la *j*, en [kg m^{-1} s^{-1}]; *dh* es la altura de cualquier rodaja, en [m]:

$$\rho_{j}\left(t\right) = \frac{m_{j}\left(t\right)}{A \cdot dh} \qquad \text{si} \quad 1 \le j \le J \qquad (16)$$

[110] Suponemos que la densidad y la temperatura en la frontera entre cualquier par de rodajas son los promedios de las densidades y temperaturas de ambas rodajas, y que dominan a la fuerza de una rodaja a la otra por elasticidad.

[111] Suponemos que la velocidad en la frontera entre cualquier par de rodajas es el promedio de las velocidades de las rodajas mismas, y que domina tanto a la fuerza que va con el caudal como al caudal mismo.

CC BY NC ND

$$T_j\left(t\right)=0.4767\cdot\sqrt{\frac{E_j\left(t\right)}{m_j\left(t\right)}-322000}-160.3 \qquad \text{si} \quad 1\le j\le J \tag{17}$$

$$\eta_{j+1,j}\left(t\right)=\frac{\left(\begin{array}{l}1780-90\cdot\left(\dfrac{T_{j+1}\left(t\right)+T_j\left(t\right)}{2}-273.2\right)^{1/2}\\ -26\cdot\left(\dfrac{T_{j+1}\left(t\right)+T_j\left(t\right)}{2}-273.2\right)+2\cdot\left(\dfrac{T_{j+1}\left(t\right)+T_j\left(t\right)}{2}-273.2\right)^{3/2}\end{array}\right)}{10^6} \tag{18}$$

$$\text{si} \quad 1\le j<J$$

$$dh=\frac{h_{\text{inf}}-h_{\text{sup}}}{J} \tag{19}$$

$E_j(t)$ es la energía (térmica) en la rodaja j, en [J]:

$$E_j\left(t\right)=E_j\left(0\right)+\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\left(\begin{array}{l}w_0\left(\tau\right)\cdot\dfrac{dh}{h_{\text{inf}}-h_{\text{sup}}}+g_{j+1,j}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_{j+1}\left(\tau\right)-T_j\left(\tau\right)\right)\\ -g_{j,j-1}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_j\left(\tau\right)-T_0\right)+w_{j+1,j,c}\left(\tau\right)-w_{j,j-1,c}\left(\tau\right)\end{array}\right)\cdot d\tau & \text{si} \quad j=1\\ \displaystyle\int_0^t\left(\begin{array}{l}w_0\left(\tau\right)\cdot\dfrac{dh}{h_{\text{inf}}-h_{\text{sup}}}+g_{j+1,j}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_{j+1}\left(\tau\right)-T_j\left(\tau\right)\right)\\ -g_{j,j-1}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_j\left(\tau\right)-T_{j-1}\left(\tau\right)\right)+w_{j+1,j,c}\left(\tau\right)-w_{j,j-1,c}\left(\tau\right)\end{array}\right)\cdot d\tau & \text{si} \quad 1<j<J\\ \displaystyle\int_0^t\left(\begin{array}{l}w_0\left(\tau\right)\cdot\dfrac{dh}{h_{\text{inf}}-h_{\text{sup}}}+g_{j+1,j}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_0-T_j\left(\tau\right)\right)\\ -g_{j,j-1}\left(\tau\right)\cdot\dfrac{A}{dh}\cdot\left(T_j\left(\tau\right)-T_{j-1}\left(\tau\right)\right)+w_{j+1,j,c}\left(\tau\right)-w_{j,j-1,c}\left(\tau\right)\end{array}\right)\cdot d\tau & \text{si} \quad j=J\end{cases} \tag{20}$$

$E_j(0)$ es la energía en la rodaja j inicialmente, en [J]; $w_0(t)$ es la potencia (térmica) del calefactor al agua en el tubo, en [W]; $g_{j+1,j}(t)$ es la conductividad térmica del agua entre las rodajas $j+1$ y j, en [W m^{-1} K^{-1}]; T_0 es la temperatura de la piscina, en [K]; $w_{j+1,j}(t)$ es la potencia (térmica) de la rodaja $j+1$ a la j con el caudal, en [W]:

$$E_j\left(0\right)=961250 \qquad \text{si} \quad 1\le j\le J \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$w_0\left(t\right)=10^4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

$$g_{j+1,j}\left(t\right)=\begin{cases}-0.468+5.8\cdot10^{-3}\cdot\dfrac{T_1\left(t\right)+T_0}{2}-7.3\cdot10^{-6}\cdot\left(\dfrac{T_1\left(t\right)+T_0}{2}\right)^2 & \text{si} \quad j=0\\ -0.468+5.8\cdot10^{-3}\cdot\dfrac{T_{j+1}\left(t\right)+T_j\left(t\right)}{2}-7.3\cdot10^{-6}\cdot\left(\dfrac{T_{j+1}\left(t\right)+T_j\left(t\right)}{2}\right)^2 & \text{si} \quad 1\le j<J\\ -0.468+5.8\cdot10^{-3}\cdot\dfrac{T_0+T_j\left(t\right)}{2}-7.3\cdot10^{-6}\cdot\left(\dfrac{T_0+T_j\left(t\right)}{2}\right)^2 & \text{si} \quad j=J\end{cases} \tag{23}$$

CC BY NC ND

$$T_0 = 0.4767 \cdot \sqrt{\frac{E_0}{m_0} - 322000} - 160.3 \tag{24}$$

$$w_{j+1,j}\left(t\right) = \begin{cases} q_{1,0}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_1\left(t\right)}{m_1\left(t\right)} & \text{si} \quad 0 < q_{1,0}\left(t\right) \quad \text{y} \quad j = 0 \\ q_{1,0}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_0}{m_0} & \text{si} \quad q_{1,0}\left(t\right) \le 0 \quad \text{y} \quad j = 0 \\ q_{j+1,j}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_{j+1}\left(t\right)}{m_{j+1}\left(t\right)} & \text{si} \quad 0 < q_{j+1,j}\left(t\right) \quad \text{y} \quad 1 \le j < J \\ q_{j+1,j}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_j\left(t\right)}{m_j\left(t\right)} & \text{si} \quad q_{j+1,j}\left(t\right) \le 0 \quad \text{y} \quad 1 \le j < J \\ q_{J+1,J}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_0}{m_0} & \text{si} \quad 0 < q_{J+1,J}\left(t\right) \quad \text{y} \quad j = J \\ q_{J+1,J}\left(t\right) \cdot \dfrac{E_J\left(t\right)}{m_J\left(t\right)} & \text{si} \quad q_{J+1,J}\left(t\right) \le 0 \quad \text{y} \quad j = J \end{cases} \tag{25}$$

E_0 es la energía (térmica, supuestamente constante) en la piscina, en [J]; m_0 es la masa (supuestamente constante) en la piscina, en [kg]:

$$E_0 = 1.2271 \cdot 10^{11} \tag{26}$$

$$m_0 = 10^5 \tag{27}$$

El dibujo de la estructura causal es enredado si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo también.

La estructura causal es dudable pues, aunque (4), (5), (6), (7), (8), (9), (13), (14), (19), (21), (24), (26) y (27) no contienen ninguna variable que evoluciona: (22) contiene 1; (16), 2; (1), (3), (17), (18) y (23), 3 cada una; (11) y (12), 4; (10) y (15), 5; (25), 6; (2), 7; (20), 9; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 14 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^5 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^1 \cdot 7^1 \cdot 9^1$ (=102876480) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(27).

Pero no es cuerdo plantear que una fuerza, un caudal de masa o una potencia a través de la frontera de un recinto depende de los otros o de las otras a través de la frontera y, por derivación, del momentum, de la masa o de la energía en el recinto, sino que el momentum, la masa o la energía depende por integración de todos los caudales o de todas las fuerzas.

(2), (3) y (20) tienen un momentum, una masa o una energía despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado (para todas las rodajas) y, de los 102876480 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(27), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^1 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^1 \cdot 7^0 \cdot 9^0$ (=388800).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

BY NC ND

De los 388800 sistemas de ecuaciones restantes, 388799 tienen una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones (para la rodaja *j* o alguna otra), y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(27).

Si nos interesa la evolución de las velocidades v_j; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (2), (3) y (20); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *w*, p_j inicial, m_j inicial, E_j inicial, *J*, P_{atm}, ρ_0, h_{sup}, *A*, h_{inf}, E_0, m_0, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(27) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y el dibujo de la estructura temporal del método de computación son bastante largos. Saltémoslos también.

El caso es que el método de computación correspondiente (con los datos originales y $dt=10^{-7}$) graficó predicciones erráticas e inestables, según insinúa la figura 2.

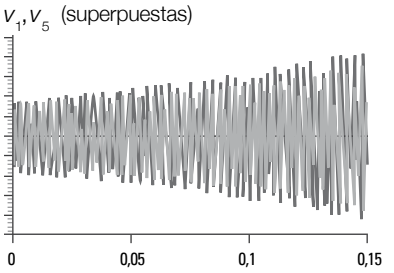


Fig. 2: Predicciones erráticas e inestables

Según se cuenta, en la Francia de principios del siglo 19, Laplace llegó a imaginar un demonio que, conociendo las leyes de la Física y las posiciones y velocidades de todas las partículas del Universo en un instante, podría predecir las posiciones y velocidades de todas las partículas del Universo en todos los instantes futuros.

Terrenamente, estamos bastante lejos del demonio de Laplace: con nuestros pequeños cerebros es muy difícil conocer las posiciones y velocidades de todas las partículas de este mundo (incluyendo a las de nuestros pequeños cerebros) en un instante, y, conociendo lo anterior en ese instante y las leyes de la Física, no es menos dificil predecir las posiciones y velocidades de todas las partículas de este mundo (incluídas las de nuestros cerebros) en todos los instantes futuros.

Aquí estamos averiados (mucho más que ante el escenario celeste del Sol y la Tierra en órbitas mutuas), ante un escenario doméstico con apenas 5 rodajas que suponemos homogéneas horizontalmente, sin poder predecir bien las evoluciones de interés durante un décimo de segundo.

Podríamos explicar esta avería con la debilidad del roce en el agua (que no es como a lo largo de una correa), con la homogeneidad horizontal supuesta en las rodajas, con la cortedad del número de rodajas, y con la precariedad de la aproximación de Euler; más: parodiando a Newton, podríamos pedir que el número de rodajas sea aumentado y su espesor disminuido *in infinitum*, e insistir en otras cautelas parecidas; pero tales explicaciones y peticiones nos volverían a dejar averiados en este libro.

Quedémonos en suspenso, pensando perseverar en algún futuro.

CC BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (2), (3) y (20), se podría intentar ecuaciones diferenciales para los momenta, las masas y las energías. Pero, tratándose de un fenómeno distribuido en el espacio, es mejor intentar ecuaciones diferenciales para las concentraciones de los momenta, las masas y las energías en los volúmenes de los recintos donde se alojan, de manera que se pueda integrar espacialmente. Y si luego se quiere hablar de fuerzas, caudales y potencias, hay que intentar ecuaciones para las concentraciones de tales fuerzas, caudales y potencias en las áreas de las fronteras por donde viajan los momenta, las masas y las energías.

$\underline{p}_j(t)$ es la concentración de momentum en el volumen de la rodaja *j*, en [N s m^{-3}] hacia la derecha, $\underline{m}_j(t)$ es la concentración de masa en el volumen de la rodaja *j*, en [kg m^{-3}]; y $\underline{E}_j(t)$ es la concentración de energía (térmica) en el volumen de la rodaja *j*, en [J m^{-3}]:

$$\underline{p}_j\left(t\right) = \frac{p_j\left(t\right)}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 < j < J \tag{a1}$$

$$\underline{m}_j\left(t\right) = \frac{m_j\left(t\right)}{A \cdot dx} = \rho_j\left(t\right) \quad \text{si} \quad 1 < j < J \tag{a2}$$

$$\underline{E}_j\left(t\right) = \frac{E_j\left(t\right)}{A \cdot dx} \quad \text{si} \quad 1 < j < J \tag{a3}$$

Derivando (a1), insertando (2), (10), (11), (12), (18), (17) y (1), y usando (a1), (a2) y (a3); derivando (a2), insertando (3), (15) y (1), y usando (a1) y (a2); derivando (a3), insertando (20), (23), (25), (17), (15) y (1), y usando (a1), (a2) y (a3); haciendo que *dh* tienda a 0 en el supuesto de que

$$\frac{\partial \frac{\partial \underline{m}\left(h,t\right)}{\partial h} \cdot \left| \frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right|^2 \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right)}{\partial h},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \underline{m}\left(h,t\right)}{\partial h} \cdot \frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right)}{\partial h},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \underline{m}\left(h,t\right)}{\partial h} \cdot \frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \cdot \frac{\underline{E}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right) \right)}{\partial h},$$

$$\frac{\partial \left(\underline{m}\left(h,t\right) \cdot \frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \cdot \frac{\partial \frac{\underline{E}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)}}{\partial h} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right) \right)}{\partial h} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\underline{m}\left(h,t\right)}{dh} \cdot \frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \cdot \frac{\partial \frac{\underline{E}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)}}{\partial h} \cdot \left| \operatorname{sgn}\left(\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \right) \right|^2 \right)}{\partial h}$$

CC BY NC ND

son finitas; y reconociendo que $d\underline{p}(h,t)/dt=\partial\underline{p}(h,t)/\partial t$, $d\underline{m}(h,t)/dt=\partial\underline{m}(h,t)/\partial t$ y $d\underline{E}(h,t)/dt=\partial\underline{E}(h,t)/\partial t$ cuando esas derivadas parciales se refieren a h constante:

$$\frac{\partial \underline{p}(h,t)}{\partial t} = -9.8\cdot\underline{m}(h,t) + 2.38\cdot10^{6}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial\underline{m}(h,t)}{\partial h}\\ -0.9658\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}}{\partial h}\\ +0.8635\cdot\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-160.3\right)^{2}}{\partial h}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1780\\ -90\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-433.2\right)^{1/2}\\ -26\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-433.2\right)\\ +2\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-433.2\right)^{3/2}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\frac{\underline{p}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}}{\partial h} + \frac{4}{3\cdot10^{6}}\cdot\frac{\partial\frac{\underline{p}^{2}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}}{\partial h} \qquad \text{si } h_{sup}<h<h_{inf} \tag{a4}$$

$$\frac{\partial \underline{m}(h,t)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{p}(h,t)}{\partial h} \qquad \text{si } h_{sup}<h<h_{inf} \tag{a5}$$

$$\frac{\partial \underline{E}(h,t)}{\partial t} = \frac{w_0(t)}{A\cdot\left(h_{inf}-h_{sup}\right)}$$

$$\frac{\partial^{2}\begin{pmatrix}-0.468\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-160.3\right)\\ +\frac{5.8\cdot10^{-3}}{2}\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-160.3\right)^{2}\\ -\frac{7.3\cdot10^{-6}}{3}\cdot\left(0.4767\cdot\sqrt{\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}-322000}-160.3\right)^{3}\end{pmatrix}}{\partial h^{2}} + \frac{\partial\left(\underline{p}(h,t)\cdot\frac{\underline{E}(h,t)}{\underline{m}(h,t)}\right)}{\partial h} \qquad \text{si } h_{sup}<h<h_{inf} \tag{a6}$$

CC BY NC ND

Si interesan las evoluciones de las velocidades, usando (1), (a1) y (a2), y acomodando para *dh* tendiente a 0:

$$v\left(h,t\right)=\frac{\underline{p}\left(h,t\right)}{\underline{m}\left(h,t\right)} \qquad \text{(a7)}$$

Por cierto, $h_{sup}<h<h_{inf}$ alude a la rodaja elegida (según su profundidad media, hacia abajo).

Apéndice acerca de otras ecuaciones diferenciales

Si la gravedad fuese nula y si $\underline{E}/m$ (casi) se mantuviera en $\underline{E}_0/m_0$ sin cambiar con *h* ni con *t* (lo que se produciría si $w_0=0$ y produciría $T=T_0$ y $\eta=\eta_0$), (a4), (a5) y (a7) podrían replantearse rápidamente como:

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t}=\frac{\partial\left(\kappa\cdot\underline{m}+\frac{4}{3}\cdot\eta_0\cdot\frac{\partial\left(\underline{p}/\underline{m}\right)}{\partial h}+\underline{m}\cdot\left(\underline{p}/\underline{m}\right)^2\right)}{\partial h}=\frac{\partial\left(\underline{f_e}+\underline{f_r}-\underline{f_c}\right)}{\partial h}$$

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial t}=\frac{\partial \underline{p}}{\partial h}$$

$$\underline{p}=\underline{m}\cdot v=\rho\cdot v$$

donde $\kappa=2.38\cdot10^6$ sería un coeficiente relativo a la elasticidad del agua, en [m^2 s^{-2}] [112], y $\underline{f_e}$, $\underline{f_r}$ y $\underline{f_c}$ serían concentraciones de fuerzas de elasticidad (repulsiva), roce y convección, respectivamente, en [N m^{-2}].

Según ello:

$$\frac{\partial\left(\rho\cdot v\right)}{\partial t}=\frac{\partial\left(\kappa\cdot\rho+\frac{4}{3}\cdot\eta_0\cdot\frac{\partial v}{\partial h}+\rho\cdot v^2\right)}{\partial h}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\left(\rho\cdot v\right)}{\partial h}$$

Luego:

$$\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\kappa\cdot\left(\rho-730.5-2.026\cdot T_0+3.8\cdot10^{-3}\cdot T_0^2\right)}{\partial h}+\frac{\partial\frac{4}{3}\cdot\eta_0\cdot\frac{\partial v}{\partial h}}{\partial h}+2\cdot\rho\cdot v\cdot\frac{\partial v}{\partial h}+v^2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial h}$$

---

[112] Según la aproximación macroscópica estándar, para los líquidos $\frac{\partial P}{\partial V}\approx-\frac{K}{V}$; y, para el agua, $K\approx2.2\cdot10^9$, en [N m^{-2}], cuando $P\approx101325$, en [N m^{-2}], y *K* aumenta cuando *P* aumenta. Por consiguiente, para los líquidos, $\partial P=-\frac{K}{V}\cdot\partial V=-K\cdot\frac{m}{V}\cdot\partial\left(\frac{V}{m}\right)=-K\cdot\rho\cdot\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{K}{\rho}\cdot\partial\rho$; y, para el agua, $\partial P=2.2\cdot10^6\cdot\partial\rho$ cuando $P\approx101325$ y tal ecuación podría mantenerse cuando *P* aumenta. Según nuestra aproximación, $\partial P=\kappa\cdot\partial\rho\approx2.38\cdot10^6\cdot\partial\rho$. No estamos mal...

CC BY NC ND

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial h} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial h}$$

E insertando la última ecuación en la penúltima y reordenando un poco:

$$\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial t} + v\left(x,t\right) \cdot \frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{\rho\left(x,t\right)} \cdot \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} - \frac{4}{3 \cdot \rho\left(x,t\right)} \cdot \frac{\partial \eta_0 \cdot \frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x}}{\partial x} = 0 \qquad \text{(a8)}$$

$$\frac{\partial \rho\left(x,t\right)}{\partial t} + v\left(x,t\right) \cdot \frac{\partial \rho\left(x,t\right)}{\partial x} + \rho\left(x,t\right) \cdot \frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x} = 0 \qquad \text{(a9)}$$

donde $x=H-h$ sería el nivel del agua desde una referencia, en [m], y $P=\kappa\cdot(\rho-730.5-2.026\cdot T_0+3.8\cdot 10^{-3}\cdot T_0^2)=\underline{f}_e$ sería la presión (repulsiva) del agua, en [N m^{-2}]. Esas son las ecuaciones de Navier y Stokes unidimensionales para fluidos con gravedad nula y temperatura constante [113].

Apéndice acerca de las propiedades del agua líquida, para (10)

	101325	6892857	*P*
273.2	999.8	1003.0	
277.6	999.9	1003.0	
283.2	999.8	1003.0	
288.8	999.2	1002.4	
294.3	998.1	1001.1	
299.9	996.8	999.8	
305.4	994.9	998.1	
311.0	993.1	996.2	
316.5	991.2	993.6	
322.1	988.8	991.2	
327.6	985.7	988.8	
333.2	983.3	986.4	
338.8	980.3	983.3	
344.3	977.3	980.3	
349.9	973.7	976.8	
355.4	970.2	973.1	
361.0	966.7	969.6	
366.5	962.7	966.0	
T			ρ [114]

Observando el gráfico correspondiente, podemos aventurar:

$$\rho_{aprox} = 730.5 + 4.2 \cdot 10^{-7} \cdot P + 2.026 \cdot T - 3.8 \cdot 10^{-3} \cdot T^2$$

Eso da:

[113] (a6) merece una consideración especial, que no haremos.

[114] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1976, *CRC handbook of tables for applied engineering science*, CRC Press, Cleveland

CC BY NC ND

	101325	6892857	*P*
273.2	1000.4	1003.3	
277.6	1000.1	1003.0	
283.2	999.5	1002.4	
288.8	998.7	1001.6	
294.3	997.7	1000.5	
299.9	996.4	999.2	
305.4	994.9	997.7	
311.0	993.1	995.9	
316.5	991.1	994.0	
322.1	988.9	991.7	
327.6	986.4	989.3	
333.2	983.7	986.6	
338.8	980.8	983.6	
344.3	977.6	980.5	
349.9	974.2	977.1	
355.4	970.6	973.5	
361.0	966.7	969.6	
366.5	962.6	965.5	
T			ρ_{aprox}

Por consiguiente, podemos suponer:

$$\rho_{aprox} = 730.5 + 4.2 \cdot 10^{-7} \cdot P + 2.026 \cdot T - 3.8 \cdot 10^{-3} \cdot T^2$$

y luego:

$$P \approx 2.38 \cdot 10^{6} \cdot \left(\rho - 730.5 - 2.026 \cdot T + 3.8 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 \right)$$

CC BY NC ND

Apéndice acerca de las propiedades del agua líquida, para (18)

	101325	6892857	*P*
273.2	0.001752	0.001748	
277.6	0.001547	0.001547	
283.2	0.001302	0.001302	
288.8	0.001125	0.001125	
294.3	0.000977	0.000977	
299.9	0.000847	0.000847	
305.4	0.000766	0.000766	
311.0	0.000680	0.000680	
316.5	0.000603	0.000603	
322.1	0.000546	0.000546	
327.6	0.000503	0.000503	
333.2	0.000460	0.000460	
338.8	0.000426	0.000426	
344.3	0.000397	0.000397	
349.9	0.000369	0.000369	
355.4	0.000345	0.000345	
361.0	0.000326	0.000326	
366.5	0.000299	0.000301	
T			η [115]

Observando el gráfico correspondiente, podemos aventurar:

$$\eta_{aprox} = \frac{1780 - 90 \cdot \left(T - 273.2\right)^{1/2} - 26 \cdot \left(T - 273.2\right)^{2/2} + 2 \cdot \left(T - 273.2\right)^{3/2}}{10^6}$$

Eso da:

[115] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1976, *CRC handbook of tables for applied engineering science*, CRC Press, Cleveland. Es interesante comparar el primer renglón de esta tabla con el de la tabla para ρ, pues manifiesta una disminución de η junto con un aumento de ρ y, de esa manera, disminuye la sorpresa ante la presencia de ρ como denominador para η en el caso de la correa; en los renglones siguientes de la tabla actual no se aprecia variaciones de η que sirvan para el mismo fin; y en el último se aprecia una contradicción.

CC BY NC ND

	101325	6892857	*P*
273.2	0.001780	0.001780	
277.6	0.001493	0.001493	
283.2	0.001299	0.001299	
288.8	0.001143	0.001143	
294.3	0.001012	0.001012	
299.9	0.000897	0.000897	
305.4	0.000797	0.000797	
311.0	0.000709	0.000709	
316.5	0.000631	0.000631	
322.1	0.000563	0.000563	
327.6	0.000504	0.000504	
333.2	0.000452	0.000452	
338.8	0.000408	0.000408	
344.3	0.000371	0.000371	
349.9	0.000341	0.000341	
355.4	0.000317	0.000317	
361.0	0.000299	0.000299	
366.5	0.000287	0.000287	

T η_{aprox}

Por consiguiente, podemos suponer:

$$\eta \approx \frac{1780 - 90 \cdot \left(T - 273.2\right)^{1/2} - 26 \cdot \left(T - 273.2\right) + 2 \cdot \left(T - 273.2\right)^{3/2}}{10^6}$$

Apéndice acerca de las propiedades del agua líquida, para (23)

	101325	6892857	*P*
273.2	0.5687	0.5744	
277.6	0.5781	0.5832	
283.2	0.5871	0.5928	
288.8	0.5971	0.6023	
294.3	0.6057	0.6109	
299.9	0.6127	0.6196	
305.4	0.6213	0.6265	
311.0	0.6288	0.6345	
316.5	0.6352	0.6421	
322.1	0.6421	0.6473	
327.6	0.6473	0.6542	
333.2	0.6542	0.6594	
338.8	0.6587	0.6641	
344.3	0.6629	0.6681	
349.9	0.6681	0.6732	
355.4	0.6715	0.6767	
361.0	0.6750	0.6802	
366.5	0.6777	0.6826	

T *g* [116]

[116] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1976, *CRC handbook of tables for applied engineering science*, CRC Press, Cleveland.

CC BY NC ND

Observando el gráfico correspondiente, podemos aventurar:

$$g_{aprox} = -0.468 + 5.8 \cdot 10^{-3} \cdot T - 7.3 \cdot 10^{-6} \cdot T^2$$

Eso da:

	101325	6892857	P
273.2	0.5717	0.5717	
277.6	0.5795	0.5795	
283.2	0.5891	0.5891	
288.8	0.5982	0.5982	
294.3	0.6067	0.6067	
299.9	0.6149	0.6149	
305.4	0.6225	0.6225	
311.0	0.6297	0.6297	
316.5	0.6364	0.6364	
322.1	0.6428	0.6428	
327.6	0.6486	0.6486	
333.2	0.6541	0.6541	
338.8	0.6591	0.6591	
344.3	0.6636	0.6636	
349.9	0.6677	0.6677	
355.4	0.6713	0.6713	
361.0	0.6745	0.6745	
366.5	0.6771	0.6771	
T			g_{aprox}

Por consiguiente, podemos suponer:

$$g \approx -0.468 + 5.8 \cdot 10^{-3} \cdot T - 7.3 \cdot 10^{-6} \cdot T^2$$

Apéndice acerca de las propiedades del agua líquida, para (24)

	101325	6892857	P
273.2	4216	4183	
277.6	4203	4174	
283.2	4195	4166	
288.8	4187	4162	
294.3	4183	4162	
299.9	4178	4162	
305.4	4178	4162	
311.0	4178	4162	
316.5	4183	4162	
322.1	4183	4166	
327.6	4183	4166	
333.2	4183	4170	
338.8	4187	4170	
344.3	4191	4174	
349.9	4195	4178	
355.4	4199	4183	
361.0	4203	4191	
366.5	4208	4195	
T			c_p [117]

[117] De: R. Boltz y G. Tuve, ed., 1976, *CRC handbook of tables for applied engineering science*, CRC Press, Cleveland.

CC BY NC ND

Observando el gráfico correspondiente, podríamos aventurar:

$$c_{aprox} = 5515 - 8.46 \cdot T + 1.33 \cdot 10^{-2} \cdot T^2$$

Eso da:

	101325	6892857	*P*
273.2	4196	4196	
277.6	4191	4191	
283.2	4186	4186	
288.8	4181	4181	
294.3	4177	4177	
299.9	4174	4174	
305.4	4172	4172	
311.0	4170	4170	
316.5	4170	4170	
322.1	4170	4170	
327.6	4171	4171	
333.2	4173	4173	
338.8	4175	4175	
344.3	4179	4179	
349.9	4183	4183	
355.4	4188	4188	
361.0	4194	4194	
366.5	4201	4201	
T			$c_{p,aprox}$

Pero, para calcular *T* de manera que $E=c \cdot m \cdot T$, eso mismo nos obligaría a invertir una ecuación cúbica. Es más conveniente replantear la tabla original como:

	101325	6892857	*P*
273.2	$1.1518 \cdot 10^6$	$1.1428 \cdot 10^6$	
277.6	$1.1668 \cdot 10^6$	$1.1587 \cdot 10^6$	
283.2	$1.1880 \cdot 10^6$	$1.1798 \cdot 10^6$	
288.8	$1.2092 \cdot 10^6$	$1.2020 \cdot 10^6$	
294.3	$1.2311 \cdot 10^6$	$1.2249 \cdot 10^6$	
299.9	$1.2530 \cdot 10^6$	$1.2482 \cdot 10^6$	
305.4	$1.2760 \cdot 10^6$	$1.2711 \cdot 10^6$	
311.0	$1.2994 \cdot 10^6$	$1.2944 \cdot 10^6$	
316.5	$1.3239 \cdot 10^6$	$1.3173 \cdot 10^6$	
322.1	$1.3473 \cdot 10^6$	$1.3419 \cdot 10^6$	
327.6	$1.3704 \cdot 10^6$	$1.3648 \cdot 10^6$	
333.2	$1.3938 \cdot 10^6$	$1.3894 \cdot 10^6$	
338.8	$1.4186 \cdot 10^6$	$1.4128 \cdot 10^6$	
344.3	$1.4430 \cdot 10^6$	$1.4371 \cdot 10^6$	
349.9	$1.4678 \cdot 10^6$	$1.4619 \cdot 10^6$	
355.4	$1.4923 \cdot 106$	$1.4866 \cdot 10^6$	
361.0	$1.5173 \cdot 10^6$	$1.5130 \cdot 10^6$	
366.5	$1.5422 \cdot 10^6$	$1.5375 \cdot 10^6$	
T			*(c·T)*

CC BY NC ND

Observando el gráfico, podemos aventurar:

$$\left(c \cdot T\right)_{aprox} = 435100 + 1.411 \cdot 10^3 \cdot T + 4.4 \cdot T^2$$

Esto da:

	101325	6892857	P
273.2	$1.1490 \cdot 10^6$	$1.1490 \cdot 10^6$	
277.6	$1.1659 \cdot 10^6$	$1.1659 \cdot 10^6$	
283.2	$1.1876 \cdot 10^6$	$1.1876 \cdot 10^6$	
288.8	$1.2096 \cdot 10^6$	$1.2096 \cdot 10^6$	
294.3	$1.2315 \cdot 10^6$	$1.2315 \cdot 10^6$	
299.9	$1.2540 \cdot 10^6$	$1.2540 \cdot 10^6$	
305.4	$1.2764 \cdot 10^6$	$1.2764 \cdot 10^6$	
311.0	$1.2995 \cdot 10^6$	$1.2995 \cdot 10^6$	
316.5	$1.3224 \cdot 10^6$	$1.3224 \cdot 10^6$	
322.1	$1.3461 \cdot 10^6$	$1.3461 \cdot 10^6$	
327.6	$1.3696 \cdot 10^6$	$1.3696 \cdot 10^6$	
333.2	$1.3937 \cdot 10^6$	$1.3937 \cdot 10^6$	
338.8	$1.4182 \cdot 10^6$	$1.4182 \cdot 10^6$	
344.3	$1.4425 \cdot 10^6$	$1.4425 \cdot 10^6$	
349.9	$1.4675 \cdot 10^6$	$1.4675 \cdot 10^6$	
355.4	$1.4923 \cdot 10^6$	$1.4923 \cdot 10^6$	
361.0	$1.5179 \cdot 10^6$	$1.5179 \cdot 10^6$	
366.5	$1.5432 \cdot 10^6$	$1.5432 \cdot 10^6$	
T			$(c \cdot T)_{aprox}$

Por consiguiente, podemos suponer:

$$\left(c \cdot T\right) \approx 435100 + 1.411 \cdot 10^3 \cdot T + 4.4 \cdot T^2$$

y luego, invirtiendo la ecuación cuadrática y considerando que $c \cdot T = E/m$:

$$T \approx 0.4767 \cdot \sqrt{E / m - 322000} - 160.3$$

Así podemos terminar el caso presente pensando que, aunque ha quedado en suspenso nuestra avería en las predicciones, tenemos explicaciones teóricas suficientes para discutir tanto nuestro supuesto unidimensional del movimiento del agua, como el comportamiento de los líquidos según la aproximación macroscópica estándar… incluso con algunos efectos de la energía térmica que saltamos en la conducta de los sólidos.

CC BY NC ND

71.0

UNA MERCADERÍA EN UN MERCADO LIBRE E INGENUO (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA)

Cambiando de tema con alguna resignación, imaginemos el mercado de una mercadería; esto es, el conjunto de lugares, concentrados o dispersos, donde se transa la mercadería aportada por sus productores, negociada por sus comerciantes y retirada por sus consumidores.

Imaginemos que los comerciantes aumentan el precio de la mercadería al disminuir la existencia de ella, que los productores aumentan sus aportes al aumentar el precio, que los consumidores disminuyen sus retiros al aumentar el precio y, con bastante ingenuidad, que todos actúan así libre e ingenuamente constituyendo una "mano invisible" que los mueve hacia el bienestar según pregonaba una metáfora de Adam Smith (1729-1790) en la Inglaterra del siglo 18.

Interesa predecir la evolución del precio de la mercadería.

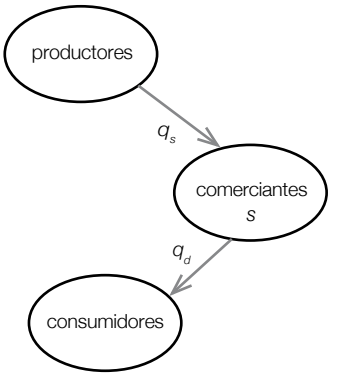


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$p(t)$ es el precio unitario de la mercadería, en [\$ unidad^{-1}] [118] :

$$p\left(t\right)=\max\left(0,\left(P-K_p\cdot s\left(t\right)\right)\right) \tag{1}$$

P es un coeficiente, en [\$ unidad^{-1}]; K_p es otro coeficiente, en [\$ unidad^{-2}]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]:

$$P=200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$K_p=2\cdot10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$s\left(t\right)=s\left(0\right)+\int_0^t\left(q_s\left(\tau\right)-q_d\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{4}$$

$s(0)$ es la existencia inicialmente, en [unidad]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería que viaja de los lugares de producción al mercado, en [unidad s^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mer-

[118] Advertencia: en esto, "unidad" es un sustantivo ambiguo.

CC BY NC ND

cadería que viaja del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$q_s(t) = \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p(t)\right)\right) \tag{6}$$

$$q_d(t) = \begin{cases} \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p(t)\right)\right) & \text{si } 0 < s(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{7}$$

Q_s es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_s es otro, en [unidad^2 s^{-1} $\$^{-1}$]; Q_d es otro, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [unidad^2 s^{-1} $\$^{-1}$]:

$$Q_s = 150 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$K_s = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$Q_d = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$K_d = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

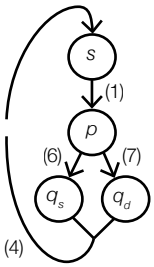


Fig. 2: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (3), (5), (8), (9), (10) y (11) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (6) y (7) contienen 2 cada una; (4) contiene 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 4 fórmulas donde aparecen, podríamos plantear $2^3 \cdot 3^1$ (=24) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(11).

Pero no es cuerdo plantear que un flujo de mercadería a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la existencia de mercadería en el recinto, sino que la existencia depende por integración de todos los flujos.

(4) tiene la existencia de la mercadería despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en (4) se reducen al que está planteado y, de los 24 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(11), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^3$ (=8).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 8 sistemas de ecuaciones restantes, 7 tienen por lo menos una variable

CC BY NC ND

que evoluciona despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(11)

Si nos interesa la evolución de *p*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para la integral en (4); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *s* inicial, P, K_p, Q_s, K_s, Q_d, K_d, dt y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(11) como:

$P = \ldots$ (2′)

$K_p = \ldots$ (3′)

$Q_s = \ldots$ (8′)

$K_s = \ldots$ (9′)

$Q_d = \ldots$ (10′)

$K_d = \ldots$ (11′)

$s_0 = \ldots$ (5′)

$$p_k = \begin{cases} P - K_p \cdot s_k & \text{si } 0 < P - K_p \cdot s_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (1')$$

$$q_{s,k} = \begin{cases} -Q_s + K_s \cdot p_k & \text{si } 0 < -Q_s + K_s \cdot p_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (6')$$

$$q_{d,k} = \begin{cases} Q_d - K_d \cdot p_k & \text{si } 0 < s_k \text{ y } 0 < Q_d - K_d \cdot p_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (7')$$ [119]

$$s_{k+1} = s_k + \left(q_{s,k} - q_{d,k}\right) \cdot dt \quad (4')$$

[119] Para impedir que, por la aproximación de Euler, $q_{d,k}$ provoque $s_{k+1}<0$, la fórmula siguiente es más segura:

$$q_{d,k} = \begin{cases} q_{s,k} + s_k \cdot dt & \text{si } 0 < s_k \text{ y } q_{s,k} + s_k \cdot dt < Q_d - K_d \cdot p_k \\ Q_d - K_d \cdot p_k & \text{si } 0 < s_k \text{ y } 0 < Q_d - K_d \cdot p_k \le q_{s,k} + s_k \cdot dt \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

BY NC ND

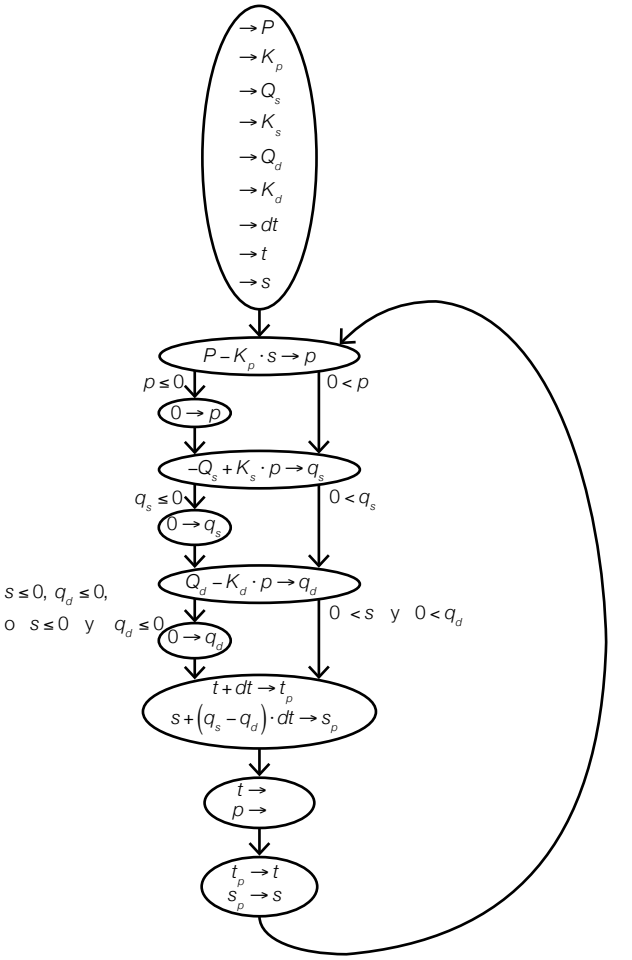


Fig. 3: Estructura temporal (de método de computación)

Un método parecido (con los datos originales, *dt*=60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4 (según la cual, al cabo de 850000 segundos, equivalentes a unos 10 días, se estarían vendiendo y comprando 300 unidades cada segundo, equivalentes a unos 26 millones de unidades cada día, con 25 millones de unidades en existencia y a $150 cada unidad).

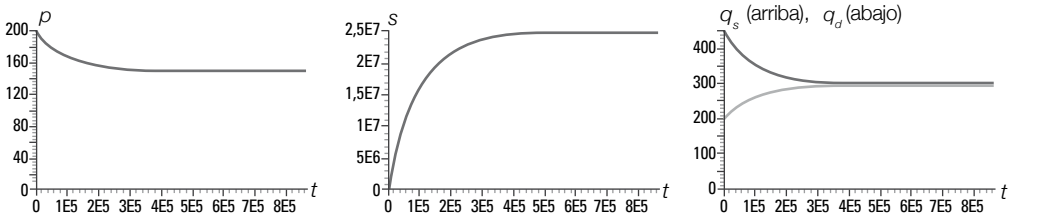


Fig. 4: Predicciones

BY NC ND

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (4) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial para la existencia con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (4) e insertando (6), (7) y (1):

$$\frac{ds(t)}{dt} = \max\left(0,\left(-Q_d + K_d \cdot \max\left(0,\left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right)\right)\right) - \begin{cases} \max\left(0,\left(Q_s - K_s \cdot \max\left(0,\left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right)\right)\right) & \text{si } 0 < s(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del precio de la mercadería, aceptando (a1) y considerando (1):

$$p(t) = \max\left(0,\left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right) \quad \text{(a2)}$$

Seguramente, es realista pensar que aumentar *s* disminuye a *p*, y que aumentar *p* aumenta a q_s y disminuye a q_d. Pero, con seguridad parecida, no es realista pensar que eso equivale justamente a (1), (6) y (7).

CC BY NC ND

72.0

UNA MERCADERÍA, Y DINEROS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO)

El mercado imaginado antes es bastante ingenuo.

Imaginemos un mercado un poco más rudo, donde los precios y las ganancias y pérdidas de dinero invitan a la astucia.

Interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

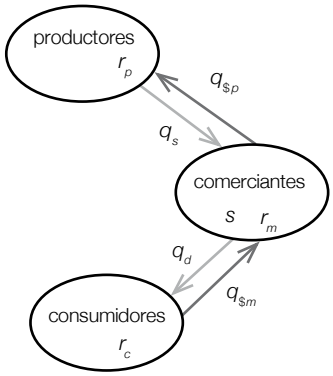


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores, en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p\left(t\right) = r_p\left(0\right) + \int_0^t q_{\$p}\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{1}$$

$$r_m\left(t\right) = r_m\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$m}\left(\tau\right) - q_{\$p}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$r_c\left(t\right) = r_c\left(0\right) - \int_0^t q_{\$m}\left(\tau\right) \cdot d\tau \tag{3}$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

CC BY NC ND

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \quad (5)$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (6)$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \quad (7)$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (8)$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería de los lugares de producción al mercado, en [unidad s^{-1}]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s(t) = \frac{p_d(t)}{1+m} \quad (9)$$

$$q_s(t) = \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p_s(t)\right)\right) \quad (10)$$

$$p_d(t) = \max\left(0, \left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right) \quad (11)$$

$$q_d(t) = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d(t)\right)\right) \quad (12)$$ [120]

m es un margen de comercialización cobrado por los comerciantes en las transacciones, en tanto por uno; Q_s es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_s es otro coeficiente, en [unidad^2 s^{-1} $^{-1}$]; P es otro, en [$ unidad^{-1}]; K_p es otro, en [$ unidad^{-2}]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; Q_d es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [unidad^2 s^{-1} $^{-1}$]:

$$m = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (13)$$

$$Q_s = 150 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (14)$$

$$K_s = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (15)$$

$$P = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (16)$$

$$K_p = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \quad (17)$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left(q_s(\tau) - q_d(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (18)$$

$$Q_d = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (19)$$

$$K_d = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (20)$$

$s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [unidad]:

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (21)$$

El dibujo de la estructura causal es un poco aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Reemplacémoslo por una descripción verbal: r_p depende de $q_{\$p}$; r_m, de $q_{\$m}$ y $q_{\$p}$; r_c, de $q_{\$m}$; $q_{\$p}$, de p_s y q_s; $q_{\$m}$, de p_d y q_d; p_s, de p_d; q_s, de p_s; p_d, de s; q_d, de p_d; y s, de q_s y q_d.

[120] Lo puesto en el caso anterior al respecto, es más seguro.

CC BY NC ND

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (6), (8), (13), (14), (15), (16), (17), (19), (20) y (21) no contienen ninguna variable que evoluciona: (1), (3), (9), (10), (11) y (12) contienen 2 cada una; (2), (5), (7) y (18), 3; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^4$ (=5184) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(21).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero o de mercadería a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero o de la existencia de mercadería en el recinto, sino que tal reserva o existencia depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3) y (18) tienen reservas de dinero o existencias de mercadería despejadas en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 5184 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(21), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^2$ (=144).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 144 sistemas de ecuaciones restantes, 143 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(21).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3) y (18); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, *s* inicial, *m*, Q_s, K_s, *P*, K_p, Q_d, K_d, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos plantear (1)-(21) como:

$$m = \ldots \tag{13'}$$
$$Q_s = \ldots \tag{14'}$$
$$K_s = \ldots \tag{15'}$$
$$P = \ldots \tag{16'}$$
$$K_p = \ldots \tag{17'}$$
$$Q_d = \ldots \tag{19'}$$
$$K_d = \ldots \tag{20'}$$
$$r_{p,0} = \ldots \tag{4'}$$
$$r_{m,0} = \ldots \tag{6'}$$
$$r_{c,0} = \ldots \tag{8'}$$
$$s_0 = \ldots \tag{21'}$$
$$p_{d,k} = \max\left(0, \left(P - K_p \cdot s_k\right)\right) \tag{11'}$$
$$p_{s,k} = \frac{p_{d,k}}{1+m} \tag{9'}$$
$$q_{s,k} = \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p_{s,k}\right)\right) \tag{10'}$$

CC BY NC ND

$$q_{d,k} = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_{d,k}\right)\right) \tag{12'}$$

$$q_{\$p,k} = p_{s,k} \cdot q_{s,k} \tag{5'}$$

$$q_{\$m,k} = p_{d,k} \cdot q_{d,k} \tag{7'}$$

$$r_{p,k+1} = r_{p,k} + q_{\$p,k} \cdot dt \tag{1'}$$

$$r_{m,k+1} = r_{m,k} + \left(q_{\$m,k} - q_{\$p,k}\right) \cdot dt \tag{2'}$$

$$r_{c,k+1} = r_{c,k} - q_{\$m,k} \cdot dt \tag{3'}$$

$$s_{k+1} = s_k + \left(q_{s,k} - q_{d,k}\right) \cdot dt \tag{18'}$$

El dibujo de la estructura temporal del método de computación, también es aburrido. Saltémoslo.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo (con los datos originales, *dt*=60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2, en cuyo final r_p=33.7·10⁹, r_m=8.7·10⁹ y r_c=12.6·10⁹.

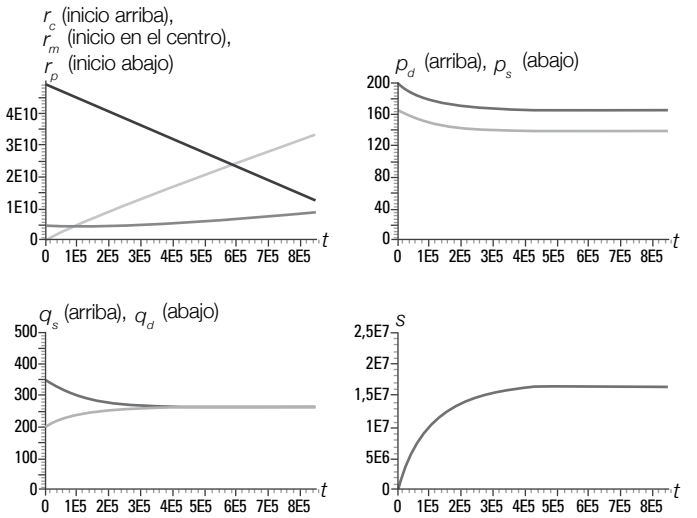


Fig. 2: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3) y (18) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales para las reservas de dineros y la existencia de mercadería con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

BY NC ND

73.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, Y EMPLEADOS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

Si las reservas de dinero de los consumidores disminuyen en un mercado, los consumidores deben actuar como productores o comerciantes para traspasarse dineros con que seguir operando en el mercado.

Imaginemos un mercado en el que algunos consumidores apoyan a los productores (de la misma mercadería) en calidad de empleados, atraídos por un salario.

Interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

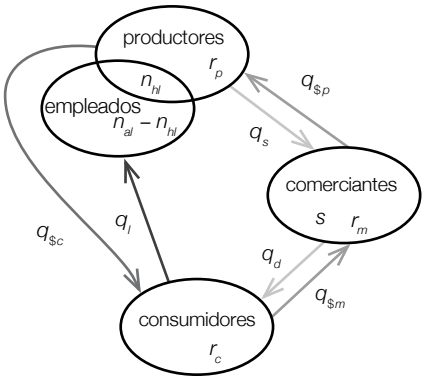


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p(t) = r_p(0) + \int_0^t \left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$r_m(t) = r_m(0) + \int_0^t \left(q_{\$m}(\tau) - q_{\$p}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (2)$$

$$r_c(t) = r_c(0) + \int_0^t \left(q_{\$c}(\tau) - q_{\$m}(\tau)\right) \cdot d\tau \qquad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por

CC BY NC ND

su calidad de empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \tag{5}$$

$$q_{\$c}(t) = w(t) \cdot n_{hl}(t) \tag{6}$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \tag{8}$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ $unidad^{-1}$]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería de los lugares de producción al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados por los productores, en [$ s^{-1} $persona^{-1}$]; $n_{hl}(t)$ es el número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ $unidad^{-1}$]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s(t) = \frac{p_d(t)}{1+m} \tag{10}$$

$$q_s(t) = \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p_s(t)\right)\right) \tag{11}$$

$$w(t) = w(0) + \int_0^t K_w \cdot \left(n_{dl}(\tau) - n_{al}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$n_{hl}(t) = \min\left(n_{dl}(t), n_{al}(t)\right) \tag{13}$$

$$p_d(t) = \max\left(0, \left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d(t) = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d(t)\right)\right) \tag{15}$$

m es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_s es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_s es otro, en [$unidad^2$ s^{-1} $\$^{-1}$]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [$ s^{-1} $persona^{-1}$]; K_w es otro coeficiente, en [$ s^{-2} $persona^{-2}$]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [$ $unidad^{-1}$]; K_p es otro, en [$ $unidad^{-2}$]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; Q_d es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [$unidad^2$ s^{-1} $\$^{-1}$]:

$$m = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$Q_s = 150 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$K_s = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

CC BY NC ND

$$w\left(0\right)=0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$K_w=1\cdot10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$n_{dl}\left(t\right)=75000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{al}\left(t\right)=n_{al}\left(0\right)+\int_0^t q_l\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{22}$$

$$P=200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{23}$$

$$K_p=2\cdot10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$s\left(t\right)=s\left(0\right)+\int_0^t\left(q_s\left(\tau\right)-q_d\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{25}$$

$$Q_d=600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$K_d=2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente , en [unidad]:

$$n_{al}\left(0\right)=50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$$q_l\left(t\right)=\begin{cases}0 & \text{si } K_l\cdot w\left(t\right)-Q_l-\left(n_{al}\left(t\right)-n_{hl}\left(t\right)\right)/T<0 \text{ y } n_{al}\left(t\right)\le 0\\ K_l\cdot w\left(t\right)-Q_l-\left(n_{al}\left(t\right)-n_{hl}\left(t\right)\right)/T & \text{si no}\end{cases} \tag{29}$$

$$s\left(0\right)=0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 \$$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

$$K_l=4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$Q_l=0.8 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

$$T=10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (7), (9), (16), (17), (18), (19), (20), (23), (24), (26), (27), (28), (30), (31), (32) y (33) no contienen ninguna variable que evoluciona: (21) contiene 1; (10), (11), (14), (15) y (22), 2 cada una; (1), (2), (3), (5), (6), (8), (12), (13) y (25), 3; (29), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 16 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1\cdot2^5\cdot3^9\cdot4^1$ (=2519424) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(33).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero, de mercadería o de personas a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero, de la existencia de mercadería o del número de personas en el recinto, sino que tal reserva, existencia o número depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3), (22) y (25) tienen reservas de dinero, existencias de mercadería

CC BY NC ND

o números de personas despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 2519424 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(33), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 4^1$ (=15552).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 15552 sistemas de ecuaciones restantes, 15551 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(33).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (22) y (25); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, *w* inicial, n_{al} inicial, *s* inicial, n_{dl}, *m*, Q_s, K_s, K_w, *P*, K_p, Q_d, K_d, K_l, Q_l, *T*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(33) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, *dt*=60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2, en cuyo final r_p=18.6·10⁹, r_m=8.7·10⁹ y r_c=27.7·10⁹.

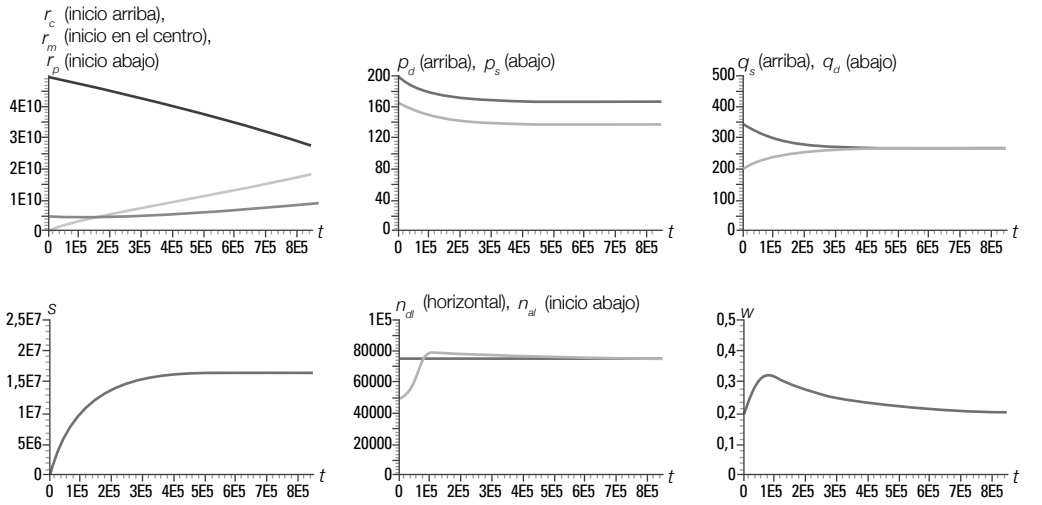


Fig. 2: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (22) y (25) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

BY NC ND

74.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, EMPLEADOS, Y PRODUCTORES DISPERSOS Y ADICTOS AL CÁLCULO (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

En el mercado imaginado antes, el número de empleados demandado por los productores, n_{dl}, aparece sin causa, y el de los empleados contratados, n_{hl}, aparece sin efecto directo en el flujo de mercadería saliente al mercado, q_s.

Imaginemos un caso más realista, en el que el número demandado es con miras a afectar ese flujo, y el número de empleados contratados lo afecta aproximadamente según el gráfico de la figura 1: en un primer intervalo, aumentar n_{hl} aumenta a q_s; en un segundo intervalo, seguir aumentando n_{hl} deja a q_s casi constante por limitaciones de la infraestructura; y en un tercer intervalo, seguir aumentando n_{hl} disminuye a q_s por disputa entre los empleados, con la infraestructura limitada.

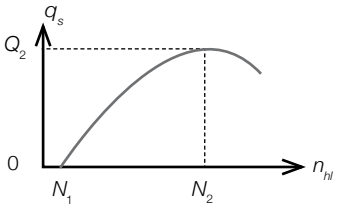


Fig. 1: q_s dependiendo de n_{hl}

La fórmula correspondiente sería:

$$q_s = -K_1 + K_2 \cdot n_{hl} - K_3 \cdot n_{hl}^2$$

donde K_3, K_2 y K_1 pueden estimarse suponiendo q_s=0 y n_{hl}=N_1, y luego $\partial q_s/\partial n_{hl}$=0, n_{hl}=N_2 y q_s=Q_2, lo cual da, algebraicamente:

$$N_1 = \frac{K_2}{2 \cdot K_3} - \sqrt{\frac{\frac{K_2^2}{4 \cdot K_3} - K_1}{K_3}}$$

$$N_2 = \frac{K_2}{2 \cdot K_3}$$

$$Q_2 = \frac{K_2^2}{4 \cdot K_3} - K_1$$

Como K_3, K_2 y K_1 deben ser positivos para garantizar que N_1, N_2 y Q_2 también lo sean, insertando las fórmulas de N_2 y Q_2 en la de N_1:

CC BY NC ND

$$K_3 = \frac{Q_2}{\left(N_2 - N_1\right)^2}$$

Insertando esta de K_3 en la de N_2:

$$K_2 = \frac{2 \cdot Q_2 \cdot N_2}{\left(N_2 - N_1\right)^2}$$

E insertando estas últimas de K_2 y K_3 en la de Q_2:

$$K_1 = \frac{Q_2 \cdot N_1 \cdot \left(2 \cdot N_2 - N_1\right)}{\left(N_2 - N_1\right)^2}$$

En resumen:

$$q_s = -K_1 + K_2 \cdot n_{hl} - K_3 \cdot n_{hl}^2$$
$$= Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2\right)$$

En esta circunstancia, el número de empleados demandado podría mantenerse, por ejemplo, como $n_{dl} = n_{hl} = N_2$ con miras a maximizar el flujo de mercadería saliente al mercado como $q_s = Q_2$.

Con eso q_s aparece dependiendo de n_{hl} y no de p_s, como en el caso anterior.

La clave está en que q_s depende de n_{hl}, y n_{hl}, por lo menos parcialmente, de p_s (de manera que q_s queda dependiendo de p_s) ya que los productores no demandan un número de empleados con miras a maximizar el flujo de mercadería saliente al mercado, sino el flujo de dinero entrante netamente a los lugares de producción; o sea, si dichos productores fueran adictos al Cálculo, demandarían el número de empleados con miras a:

$$\frac{\partial\left(q_{\$p} - q_{\$c} - \ldots\right)}{\partial n_{hl}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(q_{\$p} - q_{\$c} - \ldots\right)}{\partial n_{hl}^2} < 0$$

luego:

$$\frac{\partial\left(q_{\$p}\right)}{\partial n_{hl}} = \frac{\partial\left(q_{\$c} + \ldots\right)}{\partial n_{hl}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(q_{\$p}\right)}{\partial n_{hl}^2} < \frac{\partial^2\left(q_{\$c} + \ldots\right)}{\partial n_{hl}^2}$$

y luego:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = \frac{\partial\left(w \cdot n_{hl} + \ldots\right)}{\partial n_{hl}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} < \frac{\partial^2\left(w \cdot n_{hl} + \ldots\right)}{\partial n_{hl}^2}$$

donde "…" sugiere otros flujos de dinero salientes de los lugares de producción por costos de la infraestructura, intereses de préstamos, y demás (por lo menos aparentemente independientes de n_{hl}).

Si los productores son numerosos y dispersos, cada uno puede percibir cómo

BY NC ND

su propio flujo de mercadería saliente al mercado depende del número de empleados contratados, y en el conjunto de los productores existe una noción (dispersa) de cómo el flujo total q_s depende del número total, n_{hl}; pero no de cómo el salario individual w de los empleados y el precio unitario p_s de la mercadería dependen de ese número total, n_{hl}. Así, w y p_s aparecen como (casi) independientes de n_{hl}, y la maximización se concentra (globalmente) en:

$$p_s \cdot q_s = p_s \cdot Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = p_s \cdot \frac{\partial q_s}{\partial n_{hl}} = \frac{2 \cdot Q_2 \cdot p_s \cdot \left(N_2 - n_{hl}\right)}{\left(N_2 - N_1\right)^2} = \frac{\partial\left(w \cdot n_{hl}\right)}{\partial n_{hl}} = w \cdot \frac{\partial n_{hl}}{\partial n_{hl}} = w$$

$$\frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} = p_s \cdot \frac{\partial^2 q_s}{\partial n_{hl}^2} = -\frac{2 \cdot Q_2 \cdot p_s}{\left(N_2 - N_1\right)^2} < \frac{\partial^2\left(w \cdot n_{hl}\right)}{\partial n_{hl}^2} = w \cdot \frac{\partial^2 n_{hl}}{\partial n_{hl}^2} = 0$$

En particular, el gráfico con n_{hl} en el eje horizontal y $\partial(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}$ en el vertical es en línea recta, y tal que:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} \begin{cases} \text{tiende a} + \infty & \text{si } n_{hl} \text{ tiende a} - \infty \text{ (extrapolando)} \\ = \dfrac{2 \cdot Q_2 \cdot p_s}{N_2 - N_1} & \text{si } n_{hl} = N_1 \\ = 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 \\ \text{tiende a } - \infty & \text{si } n_{hl} \text{ tiende a} + \infty \text{ (extrapolando)} \end{cases}$$

de manera que la situación es como en la figura 2.

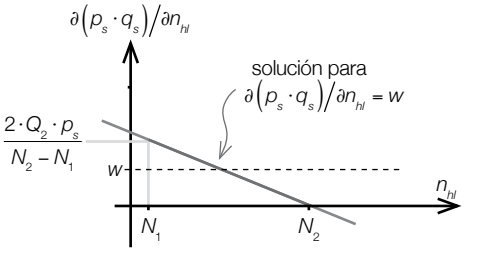


Fig.2: Maximización de acuerdo con los productores dispersos (variante según w y p_s)

Por supuesto, en fórmulas, la solución a:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = p_s \cdot \frac{\partial q_s}{\partial n_{hl}} = \frac{2 \cdot Q_2 \cdot p_s}{N_2 - N_1} \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right) = w$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} = p_s \cdot \frac{\partial^2 q_s}{\partial n_{hl}^2} = -\frac{2 \cdot Q_2 \cdot p_s}{\left(N_2 - N_1\right)^2} < 0$$

CC BY NC ND

es:

$$n_{hl} = N_2 - \frac{\left(N_2 - N_1\right)^2 \cdot w}{2 \cdot Q_2 \cdot p_s}$$

y decide el número de empleados demandado, n_{dl}, como menor que N_2 para maximizar el flujo de dinero entrante netamente a los lugares de producción (y quizás para que los productores puedan ejercer algún control).

En la figura 2 queda claro que w debe ser mayor que 0 y menor que $2 \cdot Q_2 \cdot p_s / (N_2 - N_1)$, lo cual da esta condición inquietante para los productores dispersos:

$$\frac{w}{p_s} < \frac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1}$$

En ese escenario, y sin mucha inquietud por la condición expuesta, interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

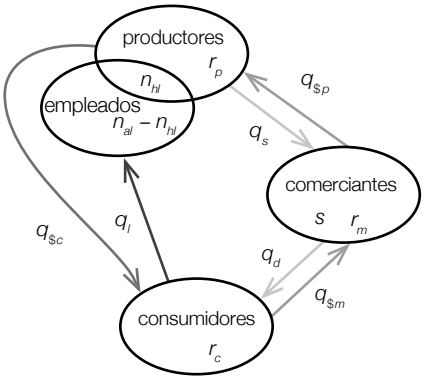


Fig. 3: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p(t) = r_p(0) + \int_0^t \left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$r_m(t) = r_m(0) + \int_0^t \left(q_{\$m}(\tau) - q_{\$p}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$r_c(t) = r_c(0) + \int_0^t \left(q_{\$c}(\tau) - q_{\$m}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados) inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por su actuación como empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de

BY NC ND

dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \tag{5}$$

$$q_{\$c}(t) = w(t) \cdot n_{hl}(t) \tag{6}$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \tag{8}$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ $unidad^{-1}$]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados, en [$ s^{-1} $persona^{-1}$]; $n_{hl}(t)$ es el número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ $unidad^{-1}$]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s(t) = \frac{p_d(t)}{1+m} \tag{10}$$

$$q_s(t) = \max\left(0, Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}(t)}{N_2 - N_1}\right)^2\right)\right) \tag{11}$$

$$w(t) = w(0) + \int_0^t K_w \cdot \left(n_{dl}(\tau) - n_{al}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$n_{hl}(t) = \min\left(n_{dl}(t), n_{al}(t)\right) \tag{13}$$

$$p_d(t) = \max\left(0, \left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d(t) = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d(t)\right)\right) \tag{15}$$

m es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_2 es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; N_2 es otro, en [persona]; N_1 es otro, en [persona]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [$ s^{-1} $persona^{-1}$]; K_w es otro coeficiente, en [$ s^{-2} $persona^{-2}$]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [$ $unidad^{-1}$]; K_p es otro, en [$ $unidad^{-2}$]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; Q_d es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [$unidad^2$ s^{-1} $\$^{-1}$]:

$$m = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$Q_2 = 300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

CC BY NC ND

$$N_2 = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$N_1 = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$w(0) = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_w = 1 \cdot 10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{dl}(t) = \max\left(0, N_2 - \frac{(N_2 - N_1)^2 \cdot w(t)}{2 \cdot Q_2 \cdot p_s(t)}\right) \tag{22}$$ [121]

$$n_{al}(t) = n_{al}(0) + \int_0^t q_l(\tau) \cdot d\tau \tag{23}$$

$$P = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$K_p = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left(q_s(\tau) - q_d(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{26}$$

$$Q_d = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$K_d = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [unidad]:

$$n_{al}(0) = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t)\right)/T < 0 \quad \text{y} \quad n_{al}(t) \le 0 \\ K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t)\right)/T & \text{si no} \end{cases} \tag{30}$$

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 \$$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

---

[121] Es interesante que, si se mantienen constantes (y mayores que 0) tanto el número de empleados demandado como el salario de esos empleados, y si hay postulantes en exceso, insertando (22) en (13), insertando el resultado en (11) y maniobrando un poco:

$$q_s = \max\left(0, \left(Q_2 - \frac{(N_2 - N_1)^2 \cdot w}{4 \cdot Q_2} \cdot \frac{1}{p_s}\right)\right)$$

lo cual, en las inmediaciones de p_s donde q_s se despega de 0, se parece a:

$$q_s = \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p_s\right)\right)$$

con:

$$Q_s = 2 \cdot Q_2 \quad \text{y} \quad K_s = \frac{4 \cdot Q_2^2}{(N_2 - N_1)^2 \cdot w}$$

La diferencia principal entre las dos expresiones para q_s está en que, a medida que p_s crece, q_s crece rectamente según la segunda expresión, pero se curva tendiendo a Q_2 según la primera.

CC BY NC ND

K_l=4 (por ejemplo) (32)

Q_l=0.8 (por ejemplo) (33)

T = 10000 (por ejemplo) (34)

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (7), (9), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (24), (25), (27), (28), (29), (31), (32), (33) y (34) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10), (11), (14), (15) y (23), contienen 2 cada una; (1), (2), (3), (5), (6), (8), (12), (13), (22) y (26), 3; (30), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 16 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^5 \cdot 3^{10} \cdot 4^1$ (=7558272) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(34).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero, de mercadería o de personas a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero, de la existencia de mercadería o del número de personas en el recinto, sino que tal reserva, existencia o número depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3), (23) y (26) tienen reservas de dinero, existencias de mercadería o números de personas despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 7558272 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(34), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 4^1$ (=46656).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 46656 sistemas de ecuaciones restantes, 46368 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 288 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (30) aún quedan, respectivamente, 2, 3, 2, 2, 2, 2 y 3 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa. Dichas variables aparecen insinuadas en la figura 4.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	ndl	w	w
	n_{hl}					n_{hl}

Fig. 4: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (5) se puede despejar $q_{\$p}$ o q_s, en (6) $q_{\$c}$, w o n_{hl},... y en (30) q_l, w o n_{hl}; no que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (30), respectivamente, se pueden despejar $q_{\$p}$, $q_{\$c}$, q_s, w, n_{hl}, n_{dl} y q_l, o q_s, w, n_{hl}, n_{dl}, n_{dl}, w y w, o algo más)

En la figura 4, sólo (5) contiene a $q_{\$p}$, sólo (6) a $q_{\$c}$ y sólo (30) a q_l. Descartando cualquier otro despeje en esas ecuaciones, la situación se reduce a la figura 5.

CC BY NC ND

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
		n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}	w	

Fig. 5: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa
(Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas,
y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 5, sólo (11) contiene a q_s. Descartando cualquier otro despeje en esa ecuación, la situación se reduce a la figura 6.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
			n_{dl}	n_{dl}	w	

Fig. 6: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa
(Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas,
y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 6, sólo (13) contiene a n_{hl}. Descartando cualquier otro despeje en esa ecuación, la situación se reduce a la figura 7.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
			n_{dl}		w	

Fig. 7: Variables que podrían despejarse atendiendo a la causalidad
(Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas,
y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Y como no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, sólo quedan 2 alternativas: despejar en (12) y (22), respectivamente, w y n_{dl}, o w y n_{dl}, según la figura 8.

(12)	(22)
w	n_{dl}
n_{dl}	w

Fig. 8: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa
(Advertencia: la figura sí trata de insinuar una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Saltando sus dificultades de despeje, la opción inferior insinúa que, por el lado de (22), el salario dependería del precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, positivamente, y del número de empleados demandado, negativamente, lo cual es interesante si la demanda de empleados radica en los productores; pero, por el lado de (12), el número de empleados demandado por los productores dependería del número de postulantes, positivamente, y de la tasa de crecimiento del salario, también positivamente, lo cual no concuerda con la sicología de quienes producen por negocio.

Así, sólo queda la primera opción, que es la original.

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas y con q_s dependiendo de n_{hl}, n_{hl} de n_{dl} y n_{al}, y n_{dl} de w y

CC BY NC ND

p_s, de manera que q_s queda dependiendo de w, n_{al} y p_s): (1)-(34).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (23) y (26); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, w inicial, n_{al} inicial, s inicial, m, Q_2, N_2, N_1, K_w, P, K_p, Q_d, K_d, K_l, Q_l, T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(34) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 9, en cuyo final r_p=19.4·10^9, r_m=8.3·10^9 y r_c=27.3·10^9.

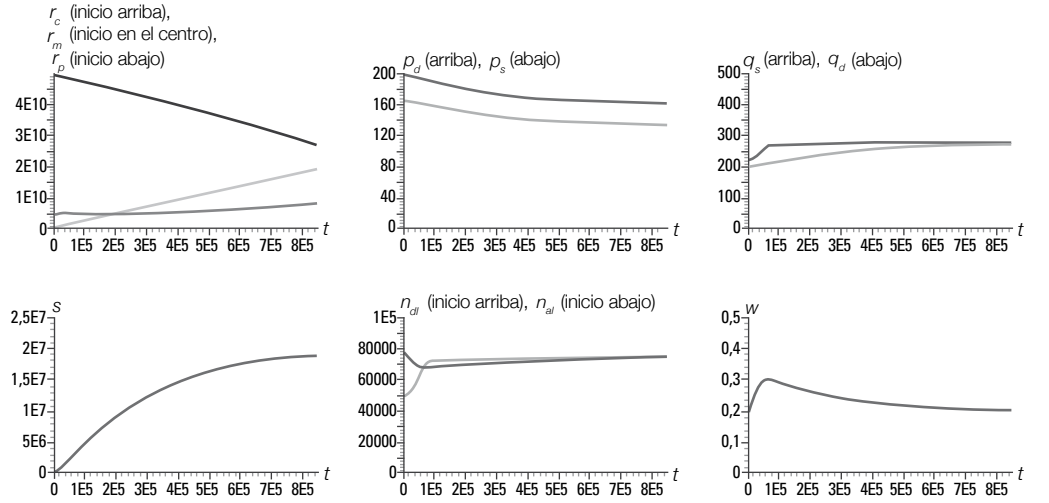


Fig. 9: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (23) y (26) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

BY NC ND

75.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, EMPLEADOS, Y UN PRODUCTOR MONOPÓLICO Y ADICTO AL CÁLCULO (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

En el mercado imaginado antes, los productores son numerosos y dispersos. Así, el salario de los empleados que contratan y el precio de la mercadería que producen se les aparecen como independientes del número de empleados que demandan.

Imaginemos un mercado en que hay un productor único, monopólico, con miras a maximizar el flujo de dinero entrante netamente al lugar de producción.

A ese productor, el salario de los empleados, cuyas postulaciones se le escapan de las manos, se le puede aparecer como (casi) independiente del número de empleados demandado por él; pero el precio de la mercadería, no. Por consiguiente, si dicho productor fuera adicto al Cálculo, la maximización se le reduciría a:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = w \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} < 0$$

Estacionariamente respecto a la existencia de mercadería en el mercado:

$$q_s = Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2\right)$$

$$= q_d = Q_d - K_d \cdot p_d = Q_d - K_d \cdot \left(1 + m\right) \cdot p_s$$

Luego:

$$p_s = \frac{Q_d - Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2\right)}{K_d \cdot \left(1 + m\right)}$$

y luego:

CC BY NC ND

$$p_s \cdot q_s = \frac{-\left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^4 - \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 2\right) \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2 + \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 1\right)}{\frac{K_d \cdot (1+m)}{Q_2^2}}$$

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 2\right) \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)}{\frac{K_d \cdot (1+m) \cdot (N_2 - N_1)}{Q_2^2}} = w$$

$$\frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} = -\frac{12 \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 2\right)}{\frac{K_d \cdot (1+m) \cdot (N_2 - N_1)^2}{Q_2^2}} < 0$$

En particular, el gráfico con n_{hl} en el eje horizontal y $\partial(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}$ en el vertical es en línea curva, y tal que:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} \begin{cases} \text{tiende a } +\infty & \text{si } n_{ha} \text{ tiende a } -\infty \text{ (extrapolando)} \\ = \frac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1} \cdot \frac{Q_d}{K_d \cdot (1+m)} & \text{si } n_{hl} = N_1 \\ = 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 - (N_2 - N_1) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{Q_d}{Q_2}\right)} = N_\alpha \\ = 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 \\ = 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 + (N_2 - N_1) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{Q_d}{Q_2}\right)} = N_\beta \\ \text{tiende a } -\infty & \text{si } n_{ha} \text{ tiende a } +\infty \text{ (extrapolando)} \end{cases}$$

de manera que la situación es como en la figura 1, con el gráfico cruzando al eje horizontal una vez si $2 \cdot Q_2 \leq Q_d$, y tres veces si $Q_d < 2 \cdot Q_2$.

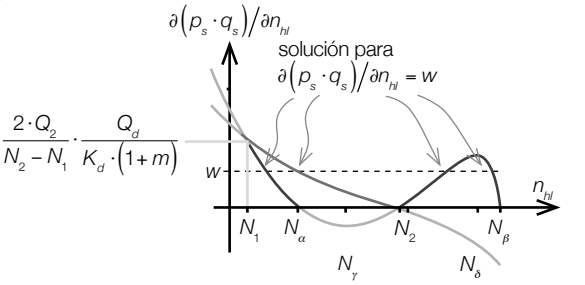


Fig. 1: Maximizaciones de acuerdo con el productor monopólico (variantes según *w*)

BY NC ND

La duda es acaso las soluciones de la figura 1 maximizan efectivamente el flujo de dinero entrante de manera neta al lugar de producción, o no; esto es, acaso $\partial^2(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}^2<0$, o no.

Tal duda empieza a disiparse notando que:

$$\frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} < 0$$

$$\text{si y sólo si} \begin{cases} -\infty < n_{hl} & \text{si } 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ n_{hl} < N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \left(2 - \frac{Q_d}{Q_2}\right)} = N_\gamma & \text{si } Q_d < 2 \cdot Q_2 \\ \text{o} \quad N_2 + \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \left(2 - \frac{Q_d}{Q_2}\right)} = N_\delta < n_{hl} & \end{cases}$$

y, como $\partial^2(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}^2$ es la pendiente de $\partial(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}$, termina de aclararse observando la figura 1: la maximización es efectiva en las soluciones con $N_1 \le n_{hl} \le N_2$ si $2 \cdot Q_2 \le Q_d$, y en las soluciones con $N_1 \le n_{hl} \le N_\alpha$ o $N_\delta \le nhl \le N_\beta$ si $Q_d < 2 \cdot Q_2$.

Ahora la duda es acerca de cuál de los dos casos da el máximo global si $Q_d < 2 \cdot Q_2$.

Notemos que:

$$n_{hl} = N_2 \pm \Delta N$$

$$\rightarrow p_s \cdot q_s = \frac{-\frac{\Delta N^4}{\left(N_2 - N_1\right)^4} - \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 2\right) \cdot \frac{\Delta N^2}{\left(N_2 - N_1\right)^2} + \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 1\right)}{\frac{K_d \cdot \left(1 + m\right)}{Q_2^2}}$$

Según éso, el flujo de dinero entrante al lugar de producción (desde el mercado) sería simétrico en torno a $n_{hl}=N_2$; pero el flujo de dinero saliente del lugar de producción (al de consumo) es mayor en el lado derecho:

$$n_{hl} = N_2 \pm \Delta N$$

$$\rightarrow w \cdot n_{hl} = w \cdot \left(N_2 \pm \Delta N\right)$$

Por consiguiente, el máximo global se logra con $N_1 \le n_{hl} \le N_2$ si $2 \cdot Q_2 \le Q_d$, y con $N_1 \le n_{hl} \le N_\alpha$, si $Q_d < 2 \cdot Q_2$.

Así, la figura 2 resume la maximización verdadera.

BY NC ND

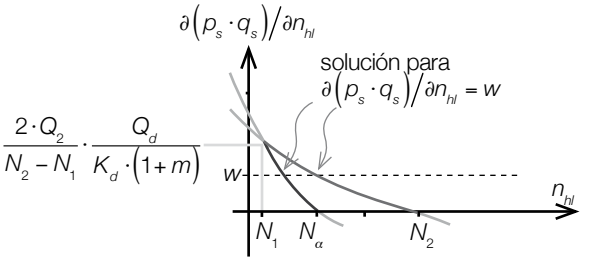


Fig. 2: Maximización de acuerdo con el productor monopólico (variante según *w*)

La fórmula para tal maximización no es fácil.

Pero se puede hallar una para aproximaciones de líneas rectas, insistiendo en que:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1} \cdot \dfrac{Q_d}{K_d \cdot (1+m)} & \text{si } n_{hl} = N_1 \\ 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 \text{ y } 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ 0 & \text{si } n_{hl} = N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)} \text{ y } Q_d < 2 \cdot Q_2 \end{cases}$$

interpolando:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} \approx \begin{cases} \dfrac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1} \cdot \dfrac{Q_d}{K_d \cdot (1+m)} \cdot \dfrac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1} + 0 \cdot \dfrac{n_{hl} - N_1}{N_2 - N_1} & \text{si } 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ \dfrac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1} \cdot \dfrac{Q_d}{K_d \cdot (1+m)} \cdot \dfrac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - \left(N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right)} & \\ + 0 \cdot \dfrac{Q_d}{K_d \cdot (1+m)} \cdot \dfrac{n_{hl} - \left(N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right)}{N_2 - \left(N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right)} & \text{si } Q_d < 2 \cdot Q_2 \end{cases}$$

y reduciendo:

BY NC ND

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} \approx \begin{cases} \dfrac{2 \cdot Q_d \cdot Q_2 \cdot \left(N_2 - n_{hl}\right)}{K_d \cdot \left(1+m\right) \cdot \left(N_2 - N_1\right)^2} & \text{si} \quad 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ \dfrac{2 \cdot Q_d \cdot Q_2 \cdot \left(N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)} - n_{hl}\right)}{K_d \cdot \left(1+m\right) \cdot \left(N_2 - N_1\right)^2 \cdot \left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right)} & \text{si} \quad Q_d < 2 \cdot Q_2 \end{cases}$$

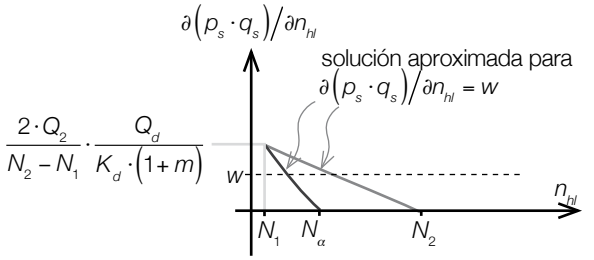


Fig. 3: Maximización aproximada de acuerdo con el productor monopólico (variante según *w*)

Por supuesto, en fórmula, la solución aproximada es:

$$n_{hl} = \begin{cases} \left(N_2 - \dfrac{K_d \cdot \left(1+m\right) \cdot \left(N_2 - N_1\right)^2}{2 \cdot Q_d \cdot Q_2} \cdot w\right) & \text{si} \quad 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ \left(N_2 - \left(N_2 - N_1\right) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)} - \dfrac{K_d \cdot \left(1+m\right) \cdot \left(N_2 - N_1\right)^2}{2 \cdot Q_d \cdot Q_2} \cdot \left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right) \cdot w\right) & \text{si} \quad Q_d < 2 \cdot Q_2 \end{cases}$$

y queda claro que *w* debe ser mayor que 0 y menor que $(2 \cdot Q_2/((N_2-N_1)) \cdot (Q_d/ \cdot (K_d \cdot (1+m))$, lo cual da una condición inquietante para el productor monopólico:

$$w < \frac{2 \cdot Q_2}{N_2 - N_1} \cdot \frac{Q_d}{K_d \cdot \left(1+m\right)}$$

En ese escenario, y sin mucha inquietud por la condición expuesta, interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el productor, por el conjunto de los comerciantes y por el de los consumidores.

CC BY NC ND

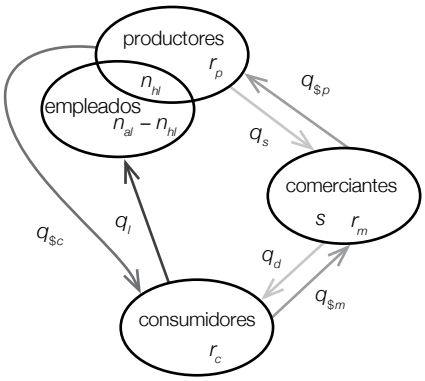


Fig. 4: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el productor, en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p\left(t\right) = r_p\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$p}\left(\tau\right) - q_{\$c}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{1}$$

$$r_m\left(t\right) = r_m\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$m}\left(\tau\right) - q_{\$p}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{2}$$

$$r_c\left(t\right) = r_c\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$c}\left(\tau\right) - q_{\$m}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{3}$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el productor inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al productor, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por su actuación como empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$q_{\$p}\left(t\right) = p_s\left(t\right) \cdot q_s\left(t\right) \tag{5}$$

$$q_{\$c}\left(t\right) = w\left(t\right) \cdot n_{hl}\left(t\right) \tag{6}$$

$$r_m\left(0\right) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$q_{\$m}\left(t\right) = p_d\left(t\right) \cdot q_d\left(t\right) \tag{8}$$

$$r_c\left(0\right) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; $n_{hl}(t)$ es el número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

BY NC ND

$$p_s(t) = \frac{p_d(t)}{1+m} \tag{10}$$

$$q_s(t) = \max\left(0, Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}(t)}{N_2 - N_1}\right)^2\right)\right) \tag{11}$$

$$w(t) = w(0) + \int_0^t K_w \cdot \left(n_{dl}(\tau) - n_{al}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$n_{hl}(t) = \min\left(n_{dl}(t), n_{al}(t)\right) \tag{13}$$

$$p_d(t) = \max\left(0, \left(P - K_p \cdot s(t)\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d(t) = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d(t)\right)\right) \tag{15}$$

m es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_2 es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; N_2 es otro, en [persona]; N_1 es otro, en [persona]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [\$ s^{-1} $persona^{-1}$]; K_w es otro coeficiente, en [\$ s^{-2} $persona^{-2}$]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [\$ $unidad^{-1}$]; K_p es otro, en [\$ $unidad^{-2}$]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; Q_d es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [$unidad^2$ s^{-1} \$$^{-1}$]:

$$m = 0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$Q_2 = 300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$N_2 = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$N_1 = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$w(0) = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_w = 1 \cdot 10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{dl}(t) = \begin{cases} N_2 - \dfrac{K_d \cdot (1+m) \cdot (N_2 - N_1)^2}{2 \cdot Q_d \cdot Q_2} \cdot w(t) & \text{si } 2 \cdot Q_2 \le Q_d \\ N_2 - (N_2 - N_1) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)} - \dfrac{K_d \cdot (1+m) \cdot (N_2 - N_1)^2}{2 \cdot Q_d \cdot Q_2} \cdot \left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2 - \dfrac{Q_d}{Q_2}\right)}\right) \cdot w(t) & \text{si } Q_d < 2 \cdot Q_2 \end{cases} \tag{22}$$

$$n_{al}(t) = n_{al}(0) + \int_0^t q_l(\tau) \cdot d\tau \tag{23}$$

$$P = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

CC BY NC ND

$$K_p = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left(q_s(\tau) - q_d(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{26}$$

$$Q_d = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$K_d = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [unidad]:

$$n_{al}(0) = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t) \right) / T < 0 \quad \text{y} \quad n_{al}(t) \le 0 \\ K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t) \right) / T \qquad \text{si no} \end{cases} \tag{30}$$

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 $\$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

$$K_l = 4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

$$Q_l = 0.8 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$T = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (7), (9), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (24), (25), (27), (28), (29), (31), (32), (33) y (34) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10), (11), (14), (15), (22) y (23), contienen 2 cada una; (1), (2), (3), (5), (6), (8), (12), (13) y (26), 3; (30), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 16 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^6 \cdot 3^9 \cdot 4^1$ (=5038848) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(34).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero, de mercadería o de personas a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero, de la existencia de mercadería o del número de personas en el recinto, sino que tal reserva, existencia o número depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3), (23) y (26) tienen reservas de dinero, existencias de mercadería o números de personas despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 5038848 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(34), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^1$ (=31104).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 31104 sistemas de ecuaciones restantes, 30816 tienen por lo menos

BY NC ND

una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 288 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (30) aún quedan, respectivamente, 2, 3, 2, 2, 2, 2 y 3 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa. Dichas variables aparecen insinuadas en la figura 5.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}	w	w
	n_{hl}					n_{hl}

Fig. 5: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (5) se puede despejar $q_{\$p}$ o q_s, en (6) $q_{\$c}$, w o n_{hl}, … y en (30) q_l, w o n_{hl}; no que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (30), respectivamente, se pueden despejar $q_{\$p}$, $q_{\$c}$, q_s, w, n_{hl}, n_{dl} y q_l, o q_s, w, n_{hl}, n_{dl}, n_{dl}, w y w, o algo más)

En la figura 5, sólo (5) contiene a $q_{\$p}$, sólo (6) a $q_{\$c}$ y sólo (30) a q_l. Descartando cualquier otro despeje en esas ecuaciones, la situación se reduce a la figura 6.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
		n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}	w	

Fig. 6: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 6, sólo (11) contiene a q_s. Descartando cualquier otro despeje en esa ecuación, la situación se reduce a la figura 7.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
			n_{dl}	n_{dl}	w	

Fig. 7: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 7, sólo (13) contiene a n_{hl}. Descartando cualquier otro despeje en esa ecuación, la situación se reduce a la figura 8.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(30)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
			n_{dl}		w	

Fig. 8: Variables que podrían despejarse atendiendo a la causalidad (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Y como no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, sólo quedan 2 alternativas: despejar en (12) y (22), respectivamente, w y n_{dl}, o w y n_{dl}, según la figura 9.

CC BY NC ND

(12)	(22)
w	n_{dl}
n_{dl}	w

Fig. 9: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Saltando sus dificultades de despeje, la opción inferior insinúa que, por el lado de (22), el salario dependería del número de empleados demandado por el productor, negativamente; y, por el lado de (12), el número de empleados demandado dependería del número de postulantes, positivamente, y de la tasa de crecimiento del salario, también positivamente, lo cual no concuerda con la sicología de quienes producen por negocio.

Así, sólo queda la primera opción, que es la original.

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas y con q_s dependiendo de n_{hl}, n_{hl} de n_{dl} y n_{al}, y n_{dl} de w, de manera que q_s queda dependiendo de w y n_{al} pero no de p_s): (1)-(34).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (23) y (26); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, w inicial, n_{al} inicial, s inicial, m, Q_2, N_2, N_1, K_w, P, K_p, Q_d, K_d, K_l, Q_l, T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(34) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=60 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 10, en cuyo final $r_p=17.1\cdot10^9$, $r_m=7.9\cdot10^9$ y $r_c=30.0\cdot10^9$.

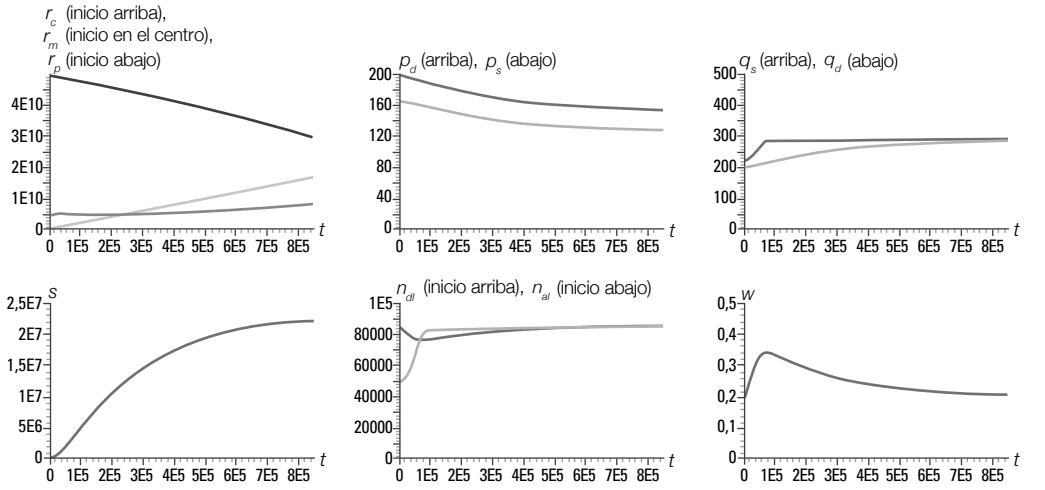


Fig. 10: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (23) y (26) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

CC BY NC ND

76.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, EMPLEADOS, Y PRODUCTORES AVENTUREROS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

El final de la predicción de las evoluciones de r_p, r_m y r_c en el caso anterior acusa que la maximización del productor monopólico habría sido menos afortunada para él, en términos de negocios, que la de los productores dispersos, aunque cabía esperar lo contrario: que el productor monopólico, teniendo más visión del mercado, negociara con mejor fortuna.

Una excusa evidente para el desacierto, es que la maximización fue aproximada: las figuras 2 y 3 del caso anterior muestran que la aproximación desplaza las soluciones hacia la derecha; vale decir, a demandar un número de empleados mayor que el óptimo y, consecuentemente, a experimentar egresos mayores por parte del productor (e ingresos mayores por parte de los consumidores).

Para maximizar el flujo de dinero entrante netamente al lugar de producción, el productor podría haber planteado:

$$\frac{\partial\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{Q_d}{Q_2} - 2\right) \cdot \left(\frac{N_2 - n_{hl}}{N_2 - N_1}\right)}{\frac{K_d \cdot (1+m) \cdot \left(N_2 - N_1\right)}{Q_2^2}} = w$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2\left(p_s \cdot q_s\right)}{\partial n_{hl}^2} < 0$$

y podría haber invertido algebraicamente la ecuación cúbica sin aproximaciones, como hicimos en el caso de la sección 5, donde resolvimos una ecuación parecida para predecir la conducta del agua en un estanque esférico.

Pero, como las maniobras algebraicas son algo excesivas, el productor no habría hecho mal en desecharlas y en apelar a una búsqueda estructurada según el método siguiente:

1. reformule algebraicamente la ecuación en dos, mediante igualaciones con otra variable;

2. grafique sueltamente las fórmulas resultantes de la etapa 1;

3. y estructure las fórmulas como en el diagrama de la figura 1, despejándolas según convenga para las tendencias y transiciones deseadas en los gráficos de la etapa 2.

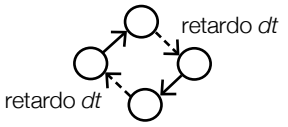


Fig. 1: Estructura causal para evoluciones que resuelven la ecuación cúbica

CC BY NC ND

Por ejemplo y muy apretadamente, si $Q_d<2\cdot Q_2$, podría haber intentado esto:

$$4\cdot\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)^2+2\cdot\left(\frac{Q_d}{Q_2}-2\right)=\frac{\frac{K_d\cdot(1+m)\cdot(N_2-N_1)}{Q_2^2}\cdot w}{\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)}$$

$$\text{luego}\quad y=4\cdot\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)^2+2\cdot\left(\frac{Q_d}{Q_2}-2\right)$$

$$\text{e}\quad y=\frac{\frac{K_d\cdot(1+m)\cdot(N_2-N_1)}{Q_2^2}\cdot w}{\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)}$$

$$\text{luego}\quad \left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{y-2\cdot\left(\frac{Q_d}{Q_2}-2\right)}$$

$$\text{e}\quad y=\frac{\frac{K_d\cdot(1+m)\cdot(N_2-N_1)}{Q_2^2}\cdot w}{\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)}$$

$$\text{y luego}\quad \left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)_{l+1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{y_l-2\cdot\left(\frac{Q_d}{Q_2}-2\right)}$$

$$\text{e}\quad y_{l+1}=\frac{\frac{K_d\cdot(1+m)\cdot(N_2-N_1)}{Q_2^2}\cdot w}{\left(\frac{N_2-n_{hl}}{N_2-N_1}\right)_l}$$

esperando que estas ecuaciones resuelvan la cúbica y que, con la eliminación de las aproximaciones del caso anterior, la maximización le sea más afortunada.

Un problema gracioso está en que la ecuación cúbica resuelta por fin, proviene de una aproximación previa: la de suponer que el número de empleados contratados afecta al flujo de mercadería saliente al mercado, según la figura 1 del caso anterior al anterior. Seguramente, es realista pensar que: en un primer intervalo, aumentar n_{hl} aumenta a q_s; en un segundo intervalo, seguir aumentando n_{hl} deja a q_s casi constante por limitaciones de la infraestructura; y, en un tercer intervalo, seguir aumentando n_{hl} disminuye a q_s por disputa entre los empleados, con la infraestructura limitada. Pero, con seguridad parecida, no es realista pensar que eso equivale justamente a la figura 1 del caso anterior al anterior (así como tampoco es realista pensar que los productores, dispersos o monopólico, aumentan n_{hl} sin modificar la infraestructura).

CC BY NC ND

Sin duda, el productor podría afinar la figura 1, reemplazar la ecuación cúbica, y adaptar el método de búsqueda para invertir la ecuación reemplazante de la cúbica. Sin embargo, queda otro problema: *w* evoluciona, lo cual pone al productor ante la necesidad de repetir la búsqueda en cada etapa de la evolución, y, más profundamente, advierte que *s* también evoluciona. Esto último pone en duda la maximización completa, que fue concebida para una etapa estacionaria respecto a la existencia de mercadería en el mercado.

Por cierto, concebir una maximización para la evolución es más difícil que concebirla para la etapa estacionaria; y concebirla para la etapa estacionaria ya ocasiona fórmulas bastante difíciles.

Entonces, ¿qué?

Sin adicción al Cálculo, tanto el productor monopólico como los dispersos pueden aventurarse desatendiendo la fórmula para $\partial(p_s \cdot q_s)/\partial n_{hl}$, atendiendo directamente a $p_s \cdot q_s - w \cdot n_{hl}$ (en términos más rudos, al flujo de dinero entrante netamente al lugar de producción: $q_{\$p} - q_{\$c}$), y explorando con algún método de búsqueda de máximo que exacerbe cualquier variación hecha en el número de empleados si el flujo de dinero aumenta, y revierta la variación si el flujo de dinero disminuye.

Por ejemplo, en fórmulas, los productores pueden explorar así:

$$n_{dl}(t) = n_{dl}(0) + K_{dl} \cdot \int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl}(\tau)}{d\tau}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right)}{d\tau}\right) \cdot d\tau$$

$$n_{dl}(0) = \ldots$$

$$K_{dl} = \ldots$$

o, más sencillamente, según la aproximación de Euler:

$$n_{dl,k+1} = n_{dl,k} + K_{dl} \cdot \operatorname{sgn}\left(n_{hl,k} - n_{hl,k-1}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(q_{\$p,k} - q_{\$c,k} - q_{\$p,k-1} + q_{\$c,k-1}\right) \cdot dt$$

$$n_{dl,0} = \ldots$$

$$K_{dl} = \ldots$$

Con ese método, si aumenta el número de empleados contratados, n_{hl}, y disminuye el flujo de dinero entrante netamente al lugar de producción, $q_{\$p} - q_{\$c}$, surge $1 \cdot (-1)$ (=-1) como argumento de la integral y el número de empleados demandado, n_{dl}, queda obligado a disminuir; si aumenta n_{hl} y aumenta $q_{\$p} - q_{\$c}$, surge $1 \cdot 1$ (=+1) como argumento de la integral y n_{dl} queda obligado a aumentar más; si disminuye n_{hl} y aumenta $q_{\$p} - q_{\$c}$, surge $(-1) \cdot 1$ (=-1) y n_{dl} queda obligado a disminuir más; si disminuye n_{hl} y disminuye $q_{\$p} - q_{\$c}$, surge $(-1) \cdot (-1)$ (=+1) y n_{dl} queda obligado a aumentar. (Advirtamos que el asunto se complica porque tiene repercusiones en p_s y w).

Suponiendo que los productores exploran con tal método, interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

CC BY NC ND

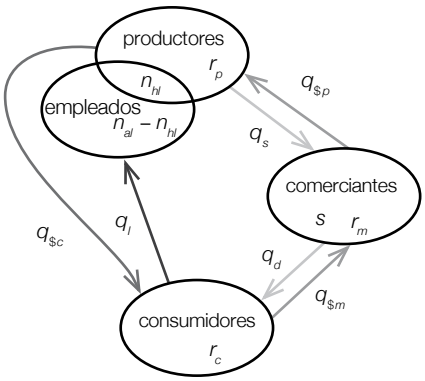


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p(t) = r_p(0) + \int_0^t \left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$r_m(t) = r_m(0) + \int_0^t \left(q_{\$m}(\tau) - q_{\$p}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$r_c(t) = r_c(0) + \int_0^t \left(q_{\$c}(\tau) - q_{\$m}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por su actuación como empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \quad (5)$$

$$q_{\$c}(t) = w(t) \cdot n_{hl}(t) \quad (6)$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \quad (8)$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; $n_{hl}(t)$ es el

CC BY NC ND

número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_o(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s\left(t\right)=\frac{p_d\left(t\right)}{1+m} \tag{10}$$

$$q_s\left(t\right)=\max\left(0,Q_2\cdot\left(1-\left(\frac{N_2-n_{hl}\left(t\right)}{N_2-N_1}\right)^2\right)\right) \tag{11}$$

$$w\left(t\right)=w\left(0\right)+\int_0^t K_w\cdot\left(n_{dl}\left(\tau\right)-n_{al}\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{12}$$

$$n_{hl}\left(t\right)=\min\left(n_{dl}\left(t\right),n_{al}\left(t\right)\right) \tag{13}$$

$$p_d\left(t\right)=\max\left(0,\left(P-K_p\cdot s\left(t\right)\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d\left(t\right)=\max\left(0,\left(Q_d-K_d\cdot p_d\left(t\right)\right)\right) \tag{15}$$

m es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_2 es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; N_2 es otro, en [persona]; N_1 es otro, en [persona]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; K_w es otro coeficiente, en [$ s^{-2} persona^{-2}]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [$ unidad^{-1}]; K_p es otro, en [$ unidad^{-2}]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; Q_d es otro coeficiente, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [unidad^2 s^{-1} $$^{-1}$]:

$$m=0.20 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$Q_2=300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$N_2=100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$N_1=0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$w\left(0\right)=0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_w=1\cdot10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{dl}\left(t\right)=n_{dl}\left(0\right)+K_{dl}\cdot\int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p}\left(\tau\right)-q_{\$c}\left(\tau\right)\right)}{d\tau}\right)\cdot d\tau \tag{22}$$

$$n_{al}\left(t\right)=n_{al}\left(0\right)+\int_0^t q_l\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{23}$$

$$P=200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$K_p=2\cdot10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

CC BY NC ND

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left(q_s(\tau) - q_d(\tau) \right) \cdot d\tau \tag{26}$$

$$Q_d = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$K_d = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$n_{dl}(0)$ es el número de empleados demandado inicialmente, en [persona]; K_{dl} es otro coeficiente, en [$\$^{-1}$ s^2]; $n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente , en [unidad]:

$$n_{dl}(0) = 50002 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$K_{dl} = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$n_{al}(0) = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t) \right) / T < 0 \quad \text{y} \quad n_{al}(t) \le 0 \\ K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t) \right) / T \qquad \text{si no} \end{cases} \tag{32}$$

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 $\$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

$$K_l = 4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

$$Q_l = 0.8 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

$$T = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{36}$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (7), (9), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (24), (25), (27), (28), (29), (30), (31), (33), (34), (35) y (36) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10), (11), (14), (15) y (23), contienen 2 cada una; (1), (2), (3), (5), (6), (8), (12), (13) y (26), 3; (22) y (32), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 16 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $2^5 \cdot 3^9 \cdot 4^2$ (=10077696) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(36).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero, de mercadería o de personas a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero, de la existencia de mercadería o del número de personas en el recinto, sino que tal reserva, existencia o número depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3), (23) y (26) tienen reservas de dinero, existencias de mercadería o números de personas despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 10077696 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(36), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 4^2$ (=62208).

CC BY NC ND

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 62208 sistemas de ecuaciones restantes, 61632 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 576 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (32) aún quedan, respectivamente, 2, 3, 2, 2, 2, 4 y 3 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa. Dichas variables aparecen insinuadas en la figura 3.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(32)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}	n_{hl}	w
	n_{hl}				$q_{\$p}$	n_{hl}
					$q_{\$c}$	

Fig. 3: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (5) se puede despejar $q_{\$p}$ o q_s, en (6) $q_{\$c}$, w o n_{hl},... y en (32) q_l, w o n_{hl}; no que en (5), (6), (11), (12), (13), (22) y (32), respectivamente, se pueden despejar $q_{\$p}$, $q_{\$c}$, q_s, w, n_{hl}, n_{dl} y q_l, o q_s, w, n_{hl}, n_{dl}, n_{dl}, n_{hl} y w, o algo más)

En la figura 3, (22) sólo deja despejar a n_{dl}. Con eso, la situación se reduce a la figura 4.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(32)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}		w
	n_{hl}					n_{hl}

Fig. 4: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 4, sólo (5) contiene a $q_{\$p}$, sólo (6) a $q_{\$c}$ y sólo (32) a q_l. Descartando cualquier otro despeje en esas ecuaciones, la situación se reduce a la figura 5.

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(32)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w	n_{hl}	n_{dl}	q_l
		n_{hl}	n_{dl}	n_{dl}		

Fig. 5: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

En la figura 5, sólo (11) contiene a q_s. Descartando cualquier otro despeje en esa ecuación, la situación se reduce a la figura 6.

CC BY NC ND

(5)	(6)	(11)	(12)	(13)	(22)	(32)
$q_{\$p}$	$q_{\$c}$	q_s	w n_{dl}	n_{hl} n_{dl}	n_{dl}	q_l

Fig. 6: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Y como no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, sólo quedan 1 alternativa: la original

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas y con q_s dependiendo de n_{hl}, n_{hl} de n_{dl} y n_{al}, y n_{dl} de w, de manera que q_s queda dependiendo de w y n_{al} pero no de p_s): (1)-(36).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (22), (23) y (26); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, w inicial, n_{dl} inicial, n_{al} inicial, s inicial, m, Q_2, N_2, N_1, K_w, P, K_p, Q_d, K_d, K_{dl}, K_l, Q_l, T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(36) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=60 y algunos detalles adicionales, entre los que se cuentan las condiciones previas para las derivadas en (22)) graficó la figura 7 en cuyo final r_p=21.5·10⁹, r_m=8.4·10⁹ y r_c=25.1·10⁹.

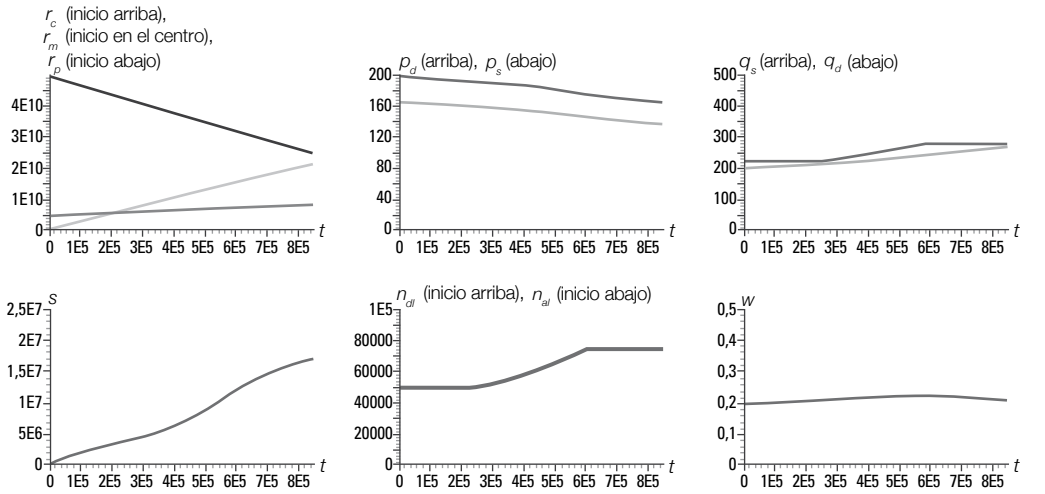


Fig. 7: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (22), (23) y (26) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

CC BY NC ND

77.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, EMPLEADOS, Y PRODUCTORES Y COMERCIANTES AVENTUREROS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

En el caso anterior, los productores se aventuraron atendiendo de manera directa al flujo de dinero entrante netamente al lugar de producción, y explorando con un método de búsqueda de máximo que exacerba cualquier variación en el número de empleados si el flujo de dinero aumenta, y revierte la variación si el flujo de dinero disminuye. Según el final de las predicciones, con esa estratagema los productores habrían sido más afortunados, en términos de negocios, que en los dos casos previos, donde concebían una maximización para una etapa estacionaria respecto a la existencia de mercadería en el mercado.

Refinemos ahora la situación de los comerciantes advirtiendo, de partida, que no necesitan mantener constante el margen que cobran en las transacciones.

Si la existencia está escasa y el flujo de mercadería de los productores al mercado está difícil (vale decir, si se vive con escasez verdadera), los comerciantes pueden hacer que el precio unitario pagado por los consumidores sea grande y cobrar un margen grande en las transacciones (para sobrevivir con pocas de ellas). Si no, pueden hacer lo contrario.

Como ya hemos venido proponiendo una ecuación para el precio pagado por los consumidores, p_d, podemos conjeturar una simple para el margen, m:

$$m = \frac{M}{P} \cdot p_d$$

Pero también podemos conjeturar que los comerciantes tratan de adelantarse a la escasez (o abundancia) de mercadería modificando el precio de ella no sólo según su existencia sino también según la tasa de crecimiento de su existencia:

$$p_d = \max\left(0, \left(P - K_{p1} \cdot s - K_{p2} \cdot \frac{ds}{dt}\right)\right)$$

Por cierto, ya que:

$$s = s(0) + \int_0^t \left(q_s - q_d\right) \cdot d\tau$$

los comerciantes pueden advertir que:

$$\frac{ds}{dt} = q_s - q_d$$

y ajustar la fórmula para p_d en consecuencia, o no.

Suponiendo que los comerciantes operan con tales estratagemas [122] , interesa

[122] Quizás en combinación (que ignoramos aquí) con otra estratagema como la de los productores en el caso anterior.

CC BY NC ND

predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

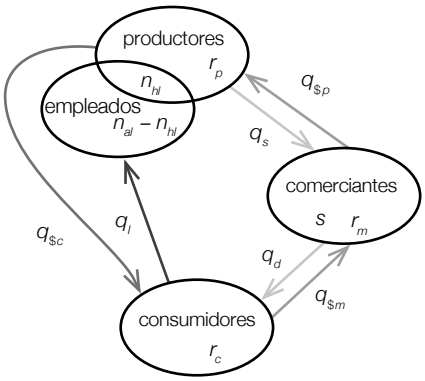


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p(t) = r_p(0) + \int_0^t \left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$r_m(t) = r_m(0) + \int_0^t \left(q_{\$m}(\tau) - q_{\$p}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$r_c(t) = r_c(0) + \int_0^t \left(q_{\$c}(\tau) - q_{\$m}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por su actuación como empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \quad (5)$$

$$q_{\$c}(t) = w(t) \cdot n_{hl}(t) \quad (6)$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \quad (8)$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

CC BY NC ND

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; $n_{hl}(t)$ es el número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s\left(t\right) = \frac{p_d\left(t\right)}{1+m\left(t\right)} \tag{10}$$

$$q_s\left(t\right) = \max\left(0, Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}\left(t\right)}{N_2 - N_1}\right)^2\right)\right) \tag{11}$$

$$w\left(t\right) = w\left(0\right) + \int_0^t K_w \cdot \left(n_{dl}\left(\tau\right) - n_{al}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{12}$$

$$n_{hl}\left(t\right) = \min\left(n_{dl}\left(t\right), n_{al}\left(t\right)\right) \tag{13}$$

$$p_d\left(t\right) = \max\left(0, \left(P - K_{p1} \cdot s\left(t\right) - K_{p2} \cdot \frac{ds\left(t\right)}{dt}\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d\left(t\right) = \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d\left(t\right)\right)\right) \tag{15}$$

$m(t)$ es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_2 es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; N_2 es otro, en [persona]; N_1 es otro, en [persona]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; K_w es otro coeficiente, en [$ s^{-2} persona^{-2}]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [$ unidad^{-1}]; K_{p1} es otro, en [$ unidad^{-2}]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; K_{p2} es otro coeficiente, en [$ unidad^{-2} s]; Q_d es otro, en [unidad s^{-1}]; K_d es otro, en [unidad^2 s^{-1} $$^{-1}$]:

$$m\left(t\right) = \frac{M}{P} \cdot p_d\left(t\right) \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$ [123]

$$Q_2 = 300 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$N_2 = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$N_1 = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

[123] Es gracioso que, insertando (10) en (16) y maniobrando un poco:

$$p_s\left(t\right) = \frac{\frac{P}{M} \cdot p_d\left(t\right)}{p_d\left(t\right) + \frac{P}{M}}$$

lo cual se parece a una de las ecuaciones de Henri, Michaelis, Menten, Briggs y Haldane en el caso 18, acerca de una reacción con una enzima como catalizador, y a la aproximación de Monod en los casos 19 a 22, acerca de biodigestores.

CC BY NC ND

$$w\left(0\right)=0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_w=1\cdot 10^{-10} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{dl}\left(t\right)=n_{dl}\left(0\right)+K_{dl}\cdot\int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p}\left(\tau\right)-q_{\$c}\left(\tau\right)\right)}{d\tau}\right)\cdot d\tau \tag{22}$$

$$n_{al}\left(t\right)=n_{al}\left(0\right)+\int_0^t q_l\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{23}$$

$$P=200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$K_{p1}=2\cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$s\left(t\right)=s\left(0\right)+\int_0^t\left(q_s\left(\tau\right)-q_d\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{26}$$

$$K_{p2}=0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$Q_d=600 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$$K_d=2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

M es otro coeficiente, en tanto por uno; $n_{dl}(0)$ es el número de empleados demandado inicialmente, en [persona]; K_{dl} es otro coeficiente, en [$\$^{-1}$ s^2]; $n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [unidad]:

$$M=0.4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$n_{dl}\left(0\right)=50002 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$K_{dl}=10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

$$n_{al}\left(0\right)=50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$q_l\left(t\right)=\begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad K_l\cdot w\left(t\right)-Q_l-\left(n_{al}\left(t\right)-n_{hl}\left(t\right)\right)/T<0 \quad \text{y} \quad n_{al}\left(t\right)\le 0 \\ K_l\cdot w\left(t\right)-Q_l-\left(n_{al}\left(t\right)-n_{hl}\left(t\right)\right)/T \qquad \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \tag{34}$$

$$s\left(0\right)=0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 $\$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

$$K_l=4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{36}$$

$$Q_l=0.8 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{37}$$

$$T=10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{38}$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable, pero su justificación es muy parecida a

CC BY NC ND

la de la estructura causal en el caso anterior. Saltémosla también.

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y *rc*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (22), (23) y (26); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, *w* inicial, n_{dl} inicial, n_{al} inicial, *s* inicial, Q_2, N_2, N_1, K_w, P, K_{p1}, K_{p2}, Q_d, K_d, M, K_{dl}, K_l, Q_l, T, dt y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(38) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, *dt*=60 y algunos detalles adicionales, entre los que se cuentan las condiciones previas para las derivadas en (14) y (22)) graficó la figura 2 en cuyo final r_p=17.8·10^9, r_m=13.9·10^9 y r_c=23.3·10^9.

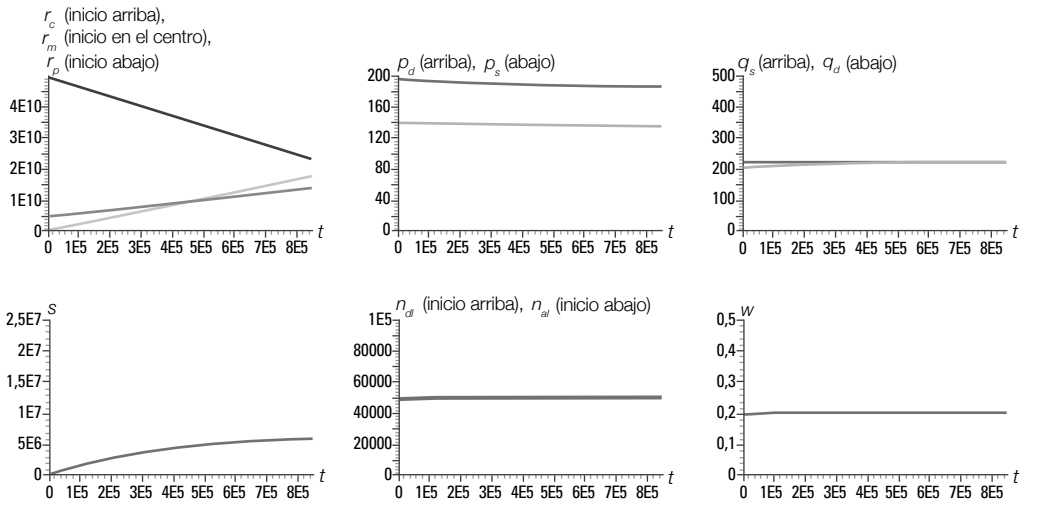


Fig. 2: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (22), (23) y (26) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

BY NC ND

78.0

UNA MERCADERÍA, DINEROS, EMPLEADOS, Y PRODUCTORES, COMERCIANTES Y CONSUMIDORES AVENTUREROS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS)

Introduzcamos ahora algunas conjeturas acerca de los consumidores, que hasta aquí parecen condenados a perder sus reservas; particularmente, atendamos al pregón de Adam Smith acerca del bienestar.

Advirtamos que el bienestar de los consumidores, *b*, aquí es sesgadamente mercantil, para permitirnos suponer que depende del flujo de mercadería que les llega: en un primer intervalo, aumentar q_d aumenta a *b*; en un segundo intervalo, seguir aumentando q_d deja a *b* casi constante por saciedad; y en un tercer intervalo, seguir aumentando q_d disminuye a *b* por fastidio (irremediable para los consumidores que, como tales, no re-venden la mercadería que compran [124]).

Así, parodiando el caso de los productores dispersos y adictos al Cálculo, podríamos plantear:

$$b = \max\left(0, B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)\right)$$

Pero, acentuando el carácter económico del bienestar *b*, permitámonos suponer que también depende del dinero habido por los consumidores. Y en esto, recordando la codicia, permitámonos suponer que no hay fastidio: en un primer intervalo, aumentar r_c aumenta a *b*; en un segundo intervalo, seguir aumentando r_c sigue aumentando a *b*; y en un tercer intervalo, seguir aumentando r_c sigue aumentando a *b*. También: en un primer intervalo, aumentar dr_c/dt aumenta a *b*; en un segundo intervalo, seguir aumentando dr_c/dt sigue aumentando a *b*; y en un tercer intervalo, seguir aumentando dr_c/dt sigue aumentando a *b*. Al revés y por desgracia: si r_c y dr_c/dt disminuyen y se hacen 0, sin importar q_d, *b* se hace 0: el bienestar económico fenece en los bolsillos vacíos.

Suponiendo que el bienestar económico también fenece en los negocios vacíos, cuando la mercadería, imprescindible, no llega y q_d se hace 0, podemos plantear:

$$b = \left(r_c + K_c \cdot \frac{dr_c}{dt}\right) \cdot \max\left(0, B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)\right)$$

lo cual, si r_c se mantiene constante por un momento, corresponde a la figura 1.

[124] La re-venta convertiría a los consumidores en comerciantes. En todo caso, tal posibilidad y la existencia de mercadería en el mercado hacen evidente que hay una existencia de mercadería en los lugares de consumo, que esa existencia afecta al bienestar junto con el flujo de mercadería entrante, y que estamos ignorando tanto esa existencia como su efecto.

CC BY NC ND

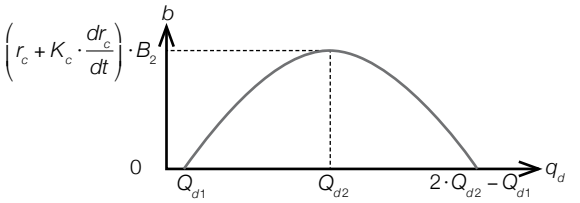


Fig. 1: *b* dependiendo de q_d, si r_c se mantiene constante por un momento

Entonces, si el máximo de *b* es mayor que 0, los consumidores podrían simplificar e, insertando un par de ecuaciones, podrían deducir que:

$$b = \left(r_c + K_c \cdot \frac{dr_c}{dt}\right) \cdot B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)$$

$$= \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - q_{\$m}\right)\right) \cdot B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)$$

$$= \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - p_d \cdot q_d\right)\right) \cdot B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)$$

$$= \frac{B_2}{\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2} \cdot \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - p_d \cdot q_d\right)\right) \cdot \left(\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2 - \left(Q_{d2} - q_d\right)^2\right)$$

Usando el Cálculo, también podrían deducir que:

$$\frac{\partial b}{\partial q_d} = \frac{B_2}{\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -K_c \cdot p_d \cdot q_d \cdot \left(\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2 - \left(Q_{d2} - q_d\right)^2\right) \\ + \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - p_d \cdot q_d\right)\right) \cdot 2 \cdot \left(Q_{d2} - q_d\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{B_2}{\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2} \cdot \left(a \cdot q_d^2 - b \cdot q_d + c\right)$$

con $a = 3 \cdot K_c \cdot p_d$

$b = 4 \cdot K_c \cdot Q_{d2} \cdot p_d + 2 \cdot \left(r_c + K_c \cdot q_{\$c}\right)$

$c = K_c \cdot Q_{d1} \cdot \left(2 \cdot Q_{d2} - Q_{d1}\right) \cdot p_d + 2 \cdot Q_{d2} \cdot \left(r_c + K_c \cdot q_{\$c}\right)$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial q_d^2} = \frac{B_2}{\left(Q_{d2} - Q_{d1}\right)^2} \cdot \left(2 \cdot a \cdot q_d - b\right)$$

Y, como es fácil invertir algebraicamente cualquier ecuación cuadrática, sin aproximaciones, también podrían deducir que:

CC BY NC ND

$$\frac{\partial b}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 b}{\partial \theta^2} < 0$$

$$\text{si y sólo si} \quad q_d = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Con eso, los consumidores podrían decidir q_d para maximizar su bienestar económico, dependiendo de r_c, $q_{\$c}$ y p_d.

Pero, tras los casos de los productores, podemos advertir que la ecuación cuadrática resuelta tan vistosamente proviene de una aproximación: la de suponer que la reserva de dinero habida por los consumidores y el flujo de mercadería que les llega afectan a su bienestar económico según la segunda ecuación. Seguramente, es realista pensar que: aumentar r_c aumenta a b; aumentar dr_c/dt aumenta a b; en un primer intervalo, aumentar q_d aumenta a b; en un segundo intervalo, seguir aumentando q_d deja a b casi constante por saciedad; y en un tercer intervalo, seguir aumentando q_d disminuye a b por fastidio. Pero, con seguridad parecida, no es realista pensar que eso equivale justamente a la segunda ecuación.

Los consumidores podrían afinar esa ecuación, reemplazar la cuadrática resuelta, e invertir la reemplazante de esa cuadrática usando el Álgebra y el Cálculo, o algún método de búsqueda. Sin embargo, queda otro problema: r_c evoluciona (y p_d también), lo cual pone a los consumidores ante la necesidad de repetir la inversión en cada etapa de la evolución, y, más profundamente, pone en duda la maximización del bienestar económico, que fue concebida pensando más bien en una etapa estacionaria.

Aflojando el Álgebra y el Cálculo, los consumidores pueden aventurarse atendiendo toscamente a su bienestar económico, y explorando con algún método de búsqueda de máximo que exacerbe cualquier variación hecha en el flujo de mercadería que adquieren si el bienestar aumenta, y revierta la variación si el bienestar disminuye,

Por ejemplo, en fórmulas, los consumidores pueden explorar así:

$$q_d(t) = q_d(0) + K \cdot \int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dq_d(\tau)}{d\tau}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{db(\tau)}{d\tau}\right) \cdot d\tau$$

$$q_d(0) = \ldots$$

$$K = \ldots$$

o, más sencillamente:

$$q_{d,k+1} = q_{d,k} + K \cdot \operatorname{sgn}\left(q_{d,k} - q_{d,k-1}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(b_k - b_{k-1}\right) \cdot dt$$

$$q_{d,0} = \ldots$$

$$K = \ldots$$

Suponiendo que los consumidores operan con ese método, interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores.

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no em-

CC BY NC ND

pleados), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes, en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p(t) = r_p(0) + \int_0^t \left(q_{\$p}(\tau) - q_{\$c}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (1)$$

$$r_m(t) = r_m(0) + \int_0^t \left(q_{\$m}(\tau) - q_{\$p}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$r_c(t) = r_c(0) + \int_0^t \left(q_{\$c}(\tau) - q_{\$m}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores (por su actuación como empleados), en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m}(t)$ es el flujo entrante al conjunto de los comerciantes, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (4)$$

$$q_{\$p}(t) = p_s(t) \cdot q_s(t) \quad (5)$$

$$q_{\$c}(t) = w(t) \cdot n_{hl}(t) \quad (6)$$

$$r_m(0) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (7)$$

$$q_{\$m}(t) = p_d(t) \cdot q_d(t) \quad (8)$$

$$r_c(0) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (9)$$

$p_s(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de los empleados contratados, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; $n_{hl}(t)$ es el número de empleados contratados, en [persona]; $p_d(t)$ es el precio unitario de la mercadería pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_s(t) = \frac{p_d(t)}{1 + m(t)} \quad (10)$$

$$q_s(t) = \max\left(0, Q_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{N_2 - n_{hl}(t)}{N_2 - N_1}\right)^2\right)\right) \quad (11)$$

$$w(t) = w(0) + \int_0^t K_w \cdot \left(n_{dl}(\tau) - n_{al}(\tau)\right) \cdot d\tau \quad (12)$$

$$n_{hl}(t) = \min\left(n_{dl}(t), n_{al}(t)\right) \quad (13)$$

CC BY NC ND

$$p_d\left(t\right)=\max\left(0,\left(P-K_{p1}\cdot s\left(t\right)-K_{p2}\cdot\frac{ds\left(t\right)}{dt}\right)\right) \tag{14}$$

$$q_d\left(t\right)=q_d\left(0\right)+K\cdot\int_0^t\operatorname{sgn}\left(\frac{dq_d\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot d\tau \tag{15}$$

$m(t)$ es un margen de comercialización cobrado en las transacciones, en tanto por uno; Q_2 es un coeficiente, en [unidad s^{-1}]; N_2 es otro, en [persona]; N_1 es otro, en [persona]; $w(0)$ es el salario individual de los empleados inicialmente, en [\$ s^{-1} $persona^{-1}$]; K_w es otro coeficiente, en [\$ s^{-2} $persona^{-2}$]; $n_{dl}(t)$ es el número de empleados demandado por los productores, en [persona]; $n_{al}(t)$ es el número de empleados o postulantes a empleados (contratados o no), en [persona]; P es otro coeficiente, en [\$ $unidad^{-1}$]; K_{p1} es otro, en [\$ $unidad^{-2}$]; $s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [unidad]; K_{p2} es otro coeficiente, en [\$ $unidad^{-2}$ s]; $q_d(0)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo inicialmente, en [unidad s^{-1}]; K es otro coeficiente, en [$\$^{-1}$ s]; $b(t)$ es el bienestar económico promedio de los consumidores, en [\$]:

$$m\left(t\right)=\frac{M}{P}\cdot p_d\left(t\right)\quad\text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$Q_2=300\quad\text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$N_2=100000\quad\text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$N_1=0\quad\text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$w\left(0\right)=0.2\quad\text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$K_w=1\cdot10^{-10}\quad\text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$n_{dl}\left(t\right)=n_{dl}\left(0\right)+K_{dl}\cdot\int_0^t\operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p}\left(\tau\right)-q_{\$c}\left(\tau\right)\right)}{d\tau}\right)\cdot d\tau \tag{22}$$

$$n_{al}\left(t\right)=n_{al}\left(0\right)+\int_0^t q_l\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{23}$$

$$P=200\quad\text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$K_{p1}=2\cdot10^{-6}\quad\text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$s\left(t\right)=s\left(0\right)+\int_0^t\left(q_s\left(\tau\right)-q_d\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \tag{26}$$

$$K_{p2}=0.2\quad\text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$q_d\left(0\right)=75\quad\text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

$$K=5\cdot10^{-4}\quad\text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

CC BY NC ND

$$b(t) = \left(r_c(t) + K_c \cdot \left(q_{\$c}(t) - q_{\$m}(t)\right)\right) \cdot \max\left(0, B_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2} - q_d(t)}{Q_{d2} - Q_{d1}}\right)^2\right)\right) \quad (30)$$

M es otro coeficiente, en tanto por uno; $n_{dl}(0)$ es el número de empleados demandado inicialmente, en [persona]; K_{dl} es otro coeficiente, en [$\$^{-1}$ s^2]; $n_{al}(0)$ es el número de empleados o postulantes a empleados inicialmente, en [persona]; $q_l(t)$ es el flujo de postulantes, en [persona s^{-1}]; $s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [unidad]; K_c es otro coeficiente, en [s]; B_2 es otro, en tanto por uno; Q_{d2} es otro, en [unidad s^{-1}]; Q_{d1} es otro, en [unidad s^{-1}]:

$$M = 0.4 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (31)$$

$$n_{dl}(0) = 50002 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (32)$$

$$K_{dl} = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (33)$$

$$n_{al}(0) = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (34)$$

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t)\right)/T < 0 \quad \text{y} \quad n_{al}(t) \le 0 \\ K_l \cdot w(t) - Q_l - \left(n_{al}(t) - n_{hl}(t)\right)/T \quad \text{si no} \end{cases} \quad (35)$$

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (36)$$

$$K_c = 2 \cdot 10^5 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (37)$$

$$B_2 = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (38)$$

$$Q_{d2} = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (39)$$

$$Q_{d1} = 75 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (40)$$

K_l es otro coeficiente, en [persona^2 $\$^{-1}$]; Q_l es otro, en [persona s^{-1}]; T es otro, en [s]:

$$K_l = 4 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (41)$$

$$Q_l = 0.8 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (42)$$

$$T = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \quad (43)$$

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo también.

La estructura causal misma es dudable, pero su justificación es suficientemente parecida a la de las estructuras causales en los dos casos anteriores. Saltémosla también.

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (12), (15), (22), (23) y (26); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, w inicial, q_d inicial, n_{dl} inicial, n_{al} inicial, s inicial, Q_2,

BY NC ND

N_2, N_1, K_w, P, K_{p1}, K_{p2}, K, M, K_{dl}, K_c, B_2, Q_{d2}, Q_{d1}, K_l, Q_l, T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(43) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=60 y algunos detalles adicionales entre los que se cuentan las condiciones previas para las derivadas en (14), (15) y (22)) graficó la figura 2 en cuyo final r_p=8.75·10^9, r_m=1.65·10^9 y r_c=44.6·10^9.

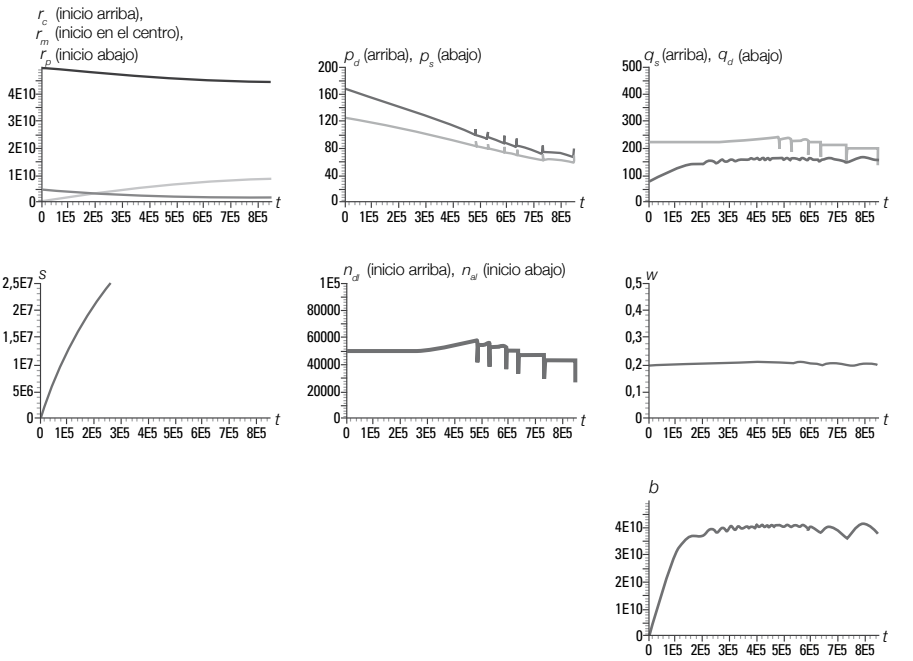


Fig. 2: Predicciones

Cabe mencionar que, aunque la figura 2 parece mostrar que la reserva de dinero de los consumidores tiende a una etapa estacionaria no nula, tal tendencia se revela ilusoria si se extiende el tiempo de las predicciones.

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (12), (15), (22), (23) y (26) y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. Pero el aburrimiento es mucho.

BY NC ND

Apéndice acerca de etapas estacionarias

La existencia de mercadería alcanza un estado estacionario si y sólo si:

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

Insertándole (26) y maniobrando muy poco, esa ecuación resulta equivalente a:

$$q_d = q_s \qquad \text{(a1)}$$

La reserva de dinero de los consumidores alcanza un estado estacionario si y sólo si:

$$\frac{dr_c}{dt} = 0$$

Insertándole (3), (6), (8), (11), (a1) y (14), y maniobrando otro poco, esta última ecuación resulta equivalente a:

$$(P - K_{p1} \cdot s) \cdot Q_2 \cdot \left(\left(N_2 - N_1 \right)^2 - \left(N_2 - n_{hl} \right)^2 \right) = \left(N_2 - N_1 \right)^2 \cdot w \cdot n_{hl} \qquad \text{(a2)}$$

Considerando que s, n_{hl} (como mínimo entre n_{dl} y n_{al}) y w devienen por integraciones matemáticas cuyos resultados son asuntos de las evoluciones (según (26), (13), (22), (23) y (12)), (a2) es inquietante; y, como el conocimiento de P, K_{p1} y s es de los comerciantes mientras el de Q_2, N_2, N_1 y n_{hl} es de los productores y el de w es compartido apenas por los productores y los consumidores, todo ello de manera dispersa, (a2) es aún más inquietante: indica que, de haber etapas estacionarias, las hay; pero es difícil llegar a alguna.

CC BY NC ND

79.0

DOS MERCADERÍAS Y DINEROS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO)

En el caso anterior, el salario individual de los empleados, *w*, resultó casi constante; además, el número de empleados demandado por los productores, n_{dl}, el número de empleados o postulantes a empleados, n_{al}, y, por la ecuación correspondiente, el número de empleados contratados, n_{hl}, resultaron casi iguales entre sí. Si hubiésemos supuesto tal constancia y tales igualdades, que, por supuesto, no habían sido predichas, habríamos hecho casi las mismas predicciones del resto, con menos ecuaciones.

Abreviemos aquí suponiendo la constancia y las igualdades señaladas, para atender al pregón del bienestar dando cabida amable a otra complicación: la presencia de dos mercaderías diferentes que compiten entre sí al ser retiradas de sus mercados por los consumidores.

En la segunda mitad del siglo 19, el bienestar económico con dos mercaderías fue postulado por Hermann Heinrich Gossen (1810-1858), William Stanley Jevons (1835-1882) y Leon Walras (1834-1910) como la suma de dos bienestares parciales que crecen por separado, cada uno con un flujo de mercadería; y, más ampliamente, fue postulado por Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926), Giovanni Battista Antonelli (1858-1944) e Irving Fisher (1867-1947) como una combinación que crece con ambos flujos de mercaderías en un gráfico tridimensional correspondiente. Ante la discusión subsiguiente acerca de las escalas de medida para el bienestar en el gráfico tridimensional, en la primera mitad del siglo 20 Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923) postuló que las escalas pueden variarse impunemente si y sólo si la variación mantiene tanto las curvas de nivel (esto es, aquellas en que el bienestar resulta constante) como su ordenamiento ascendente en el gráfico tridimensional; y Evgeny Slutsky (1880-1948), Harold Hotelling (1895-1973) y John Richard Hicks (1904-1989) iniciaron la costumbre de suponer que las curvas de nivel son convexas si se las mira desde la zona en que ambos flujos de mercaderías son nulos, y se ordenan ascendentemente, sin tocarse, en la dirección de crecimiento conjunto de ambos flujos. Ello permite ubicar el bienestar económico resultante como aquél cuya curva de nivel es tangente, en un punto, a una recta de presupuesto definida *ex profeso*; y corresponde a una maximización del bienestar en una etapa estacionaria, con limitación dura para los dineros pero sin saciedades ni fastidios (que terminan las curvas de nivel en redondo, contradiciendo la pura convexidad) para las mercaderías.

Por esto último, retomemos aquí el planteamiento del caso anterior para una sola mercadería, y veamos una manera de extenderlo a dos.

Si la mercadería fuese una sola (la "1"), podríamos plantear:

$$b = \left(r_c + K_c \cdot \frac{dr_c}{dt} \right) \cdot \max \left(0, B_{2,1} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,1} - q_{d,1}}{Q_{d2,1} - Q_{d1,1}} \right)^2 \right) \right)$$

apelando a que (con r_c constante por un momento), en un primer intervalo, aumentar q_{d1} aumenta a *b*; a que, en un segundo intervalo, seguir aumentando q_{d1} deja a *b*

CC BY NC ND

casi constante por saciedad; y a que, en un tercer intervalo, seguir aumentando q_{d1} disminuye a *b* por fastidio.

Apelando a un argumento parecido para la otra mercadería (la "2", con r_c y $q_{d,1}$ constantes por un momento), en primera instancia podríamos plantear:

$$b = \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - q_{Sm}\right)\right) \cdot \max\left(0, B_{2,1} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,1} - q_{d,1}}{Q_{d2,1} - Q_{d1,1}}\right)^2\right)\right) \cdot \max\left(0, B_{2,2} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,2} - q_{d,2}}{Q_{d2,2} - Q_{d1,2}}\right)^2\right)\right)$$

lo cual correspondería a la figura 1.

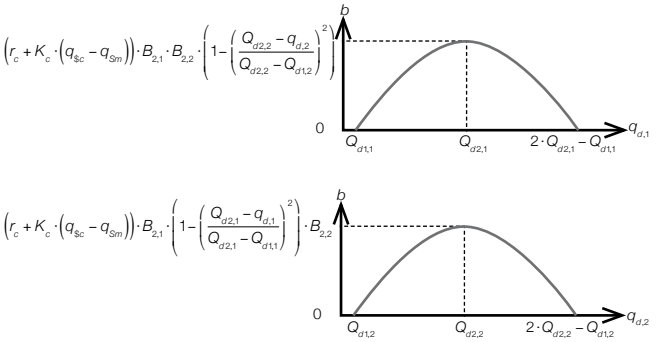


Fig. 1: *b* dependiendo de $q_{d,1}$ si r_c y $q_{d,2}$ se mantienen constantes por un momento (arriba), y *b* dependiendo de $q_{d,2}$ si r_c y $q_{d,1}$ se mantienen constantes por un momento (abajo), en primera instancia

Pero, observando que cada uno de los perfiles expuestos en la figura 1 se empina más o menos según el flujo mantenido constante por el momento, podemos sospechar que, con el planteamiento hecho recién, las curvas de nivel del gráfico tridimensional con ejes $q_{d,1}$, $q_{d,2}$ (horizontales) y *b* (vertical), manteniendo r_c constante, tendrían aspecto elíptico y se ordenarían ascendentemente de manera concéntrica, sin tocarse, hasta culminar en un punto ubicado sobre $q_{d,1} = Qd_{2,1}$ y $q_{d,2} = Q_{d2,2}$.

Como las elipses tendrían ejes de simetría paralelos a los ejes $q_{d,1}$ y $q_{d,2}$, y eso es un poco limitante, en segunda instancia podemos generalizar permitiendo que $Q_{d2,1}$ dependa de $q_{d,2}$ y $Q_{d2,2}$ dependa de $q_{d,1}$, de manera que cada uno de los perfiles expuestos en la figura 1 pueda desplazarse horizontalmente según el flujo mantenido constante por el momento y, así, las simetrías de las curvas de nivel puedan amoldarse más a gusto. Por ejemplo, en segunda instancia y para mercaderías en contienda por los consumidores, podemos plantear:

$$b = \left(r_c + K_c \cdot \left(q_{\$c} - q_{Sm}\right)\right) \cdot \max\left(0, B_{2,1} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,1}' - \alpha \cdot q_{d,2} - q_{d,1}}{Q_{d2,1} - Q_{d1,1}}\right)^2\right)\right) \cdot \max\left(0, B_{2,2} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,2}' - q_{d,1} / \alpha - q_{d,2}}{Q_{d2,2} - Q_{d1,2}}\right)^2\right)\right)$$

Para esta ecuación, las curvas de nivel son elipses cuyos ejes principales tienen inclinación $-\alpha$ si se los mira con $q_{d,1}$ como eje horizontal, e inclinación $-1/\alpha$ si se los mira con $q_{d,2}$ como eje horizontal. Así, a medida que $q_{d,1}$ aumenta, $q_{d,2}$ tiene una

BY NC ND

propensión a disminuir; y viceversa. Conformémonos, pues, con la última ecuación como aproximación razonable para mercaderías rivales [125] .

En esa circunstancia, los consumidores pueden aventurarse a buscar los flujos de ambas mercaderías que maximicen su bienestar económico.

Pero el método de búsqueda merece una atención adicional.

Hay varios métodos para buscar con dos variables, como en este caso de dos flujos de mercaderías. De tales métodos, nos conviene postular alguno simple, porque no es realista suponer que los consumidores, habitualmente dispersos, tienen oportunidad de uno refinado ni medida precisa del bienestar que maximizan (como corroboró la discusión previa a la contribución de Pareto).

Conjeturemos el método siguiente, aunque sea un poco sorpresivo:

$$q_{d,1}\left(t\right) = q_{d,1}\left(0\right) + K_1 \cdot \int_0^t \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,1}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \left(1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\right) \\ + \operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,2}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\right) \end{pmatrix} \cdot d\tau$$

$$q_{d,1}\left(0\right) = \ldots$$

$$K_1 = \ldots$$

$$q_{d,2}\left(t\right) = q_{d,2}\left(0\right) + K_2 \cdot \int_0^t \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,1}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right) - 1\right) \\ + \operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,2}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right) + 1\right) \end{pmatrix} \cdot d\tau$$

$$q_{d,2}\left(0\right) = \ldots$$

$$K_2 = \ldots$$

o, más sencillamente:

$$q_{d,1,k+1} = q_{d,1,k} + \frac{K_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(q_{d,1,k} - q_{d,1,k-1}\right) \cdot \left(1 + \operatorname{sgn}\left(b_k - b_{k-1}\right)\right) \\ + \operatorname{sgn}\left(q_{d,2,k} - q_{d,2,k-1}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{sgn}\left(b_k - b_{k-1}\right)\right) \end{pmatrix} \cdot dt$$

$$q_{d,1,0} = \ldots$$

$$K_1 = \ldots$$

[125] A fin de cuentas, seguimos ignorando las existencias de mercaderías en los lugares de consumo, y sus efectos en el bienestar.

CC BY NC ND

$$q_{d,2,k+1} = q_{d,2,k} + \frac{K_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(q_{d,1,k} - q_{d,1,k-1}\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(b_k - b_{k-1}\right) - 1\right) \\ + \operatorname{sgn}\left(q_{d,2,k} - q_{d,2,k-1}\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(b_k - b_{k-1}\right) + 1\right) \end{pmatrix} \cdot dt$$

$q_{d,2,0} = \ldots$

$K_2 = \ldots$

Suponiendo que los consumidores operan con un método parecido, interesa predecir las evoluciones de los dineros habidos por el conjunto de los productores, por el de los comerciantes y por el de los consumidores, cuyos salarios, además de constantes, son (casi) iguales en cualquier producción

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

t es el tiempo, en [s].

$r_p(t)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores (no empleados y sin distinción precisa entre los que producen una mercadería y los que producen la otra), en [$]; $r_m(t)$ es la habida por el conjunto de los comerciantes (también sin distinción), en [$]; $r_c(t)$ es la habida por el conjunto de los consumidores, en [$]:

$$r_p\left(t\right) = r_p\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$p,1}\left(\tau\right) + q_{\$p,2}\left(\tau\right) - q_{\$c,1}\left(\tau\right) - q_{\$c,2}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \qquad (1)$$

$$r_m\left(t\right) = r_m\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$m,1}\left(\tau\right) + q_{\$m,2}\left(\tau\right) - q_{\$p,1}\left(\tau\right) - q_{\$p,2}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \qquad (2)$$

$$r_c\left(t\right) = r_c\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{\$c,1}\left(\tau\right) + q_{\$c,2}\left(\tau\right) - q_{\$m,1}\left(\tau\right) - q_{\$m,2}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \qquad (3)$$

$r_p(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los productores inicialmente, en [$]; $q_{\$p,1}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores por la mercadería 1, en [$ s^{-1}]; $q_{\$p,2}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los productores por la mercadería 2, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c,1}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores por su actuación como empleados para la producción de la mercadería 1, en [$ s^{-1}]; $q_{\$c,2}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los consumidores por su actuación como empleados para la producción de la mercadería 2, en [$ s^{-1}]; $r_m(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los comerciantes inicialmente, en [$]; $q_{\$m,1}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes por la mercadería 1, en [$ s^{-1}]; $q_{\$m,2}(t)$ es el flujo de dinero entrante al conjunto de los comerciantes por la mercadería 2, en [$ s^{-1}]; $r_c(0)$ es la reserva de dinero habida por el conjunto de los consumidores inicialmente, en [$]:

$$r_p\left(0\right) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

$$q_{\$p,1}\left(t\right) = p_{s,1}\left(t\right) \cdot q_{s,1}\left(t\right) \qquad (5)$$

$$q_{\$p,2}\left(t\right) = p_{s,2}\left(t\right) \cdot q_{s,2}\left(t\right) \qquad (6)$$

$$q_{\$c,1}\left(t\right) = w\left(t\right) \cdot n_{hl,1}\left(t\right) \qquad (7)$$

$$q_{\$c,2}\left(t\right) = w\left(t\right) \cdot n_{hl,2}\left(t\right) \qquad (8)$$

CC BY NC ND

$$r_m\left(0\right) = 5 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$q_{\$m,1}\left(t\right) = p_{d,1}\left(t\right) \cdot q_{d,1}\left(t\right) \tag{10}$$

$$q_{\$m,2}\left(t\right) = p_{d,2}\left(t\right) \cdot q_{d,2}\left(t\right) \tag{11}$$

$$r_c\left(0\right) = 50 \cdot 10^9 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{12}$$

$p_{s,1}(t)$ es el precio unitario de la mercadería 1 pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_{s,1}(t)$ es el flujo de mercadería 1 saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $p_{s,2}(t)$ es el precio de la mercadería 2 pagado por los comerciantes, en [$ unidad^{-1}]; $q_{s,2}(t)$ es el flujo de mercadería 2 saliente al mercado, en [unidad s^{-1}]; $w(t)$ es el salario individual de cualquier empleado, en [$ s^{-1} persona^{-1}]; $n_{hl,1}(t)$ es el número de empleados contratados para la producción de la mercadería 1, en [persona]; $n_{hl,2}(t)$ es el de empleados contratados para la producción de la mercadería 2, en [persona]; $p_{d,1}(t)$ es el precio unitario de la mercadería 1 pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_{d,1}(t)$ es el flujo de mercadería 1 del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]; $p_{d,2}(t)$ es el precio de la mercadería 2 pagado por los consumidores, en [$ unidad^{-1}]; $q_{d,2}(t)$ es el flujo de mercadería 2 del mercado a los lugares de consumo, en [unidad s^{-1}]:

$$p_{s,1}\left(t\right) = \frac{p_{d,1}\left(t\right)}{1 + m_1\left(t\right)} \tag{13}$$

$$q_{s,1}\left(t\right) = \max\left(0, Q_{2,1} \cdot \left(1 - \left(\frac{N_{2,1} - n_{hl,1}\left(t\right)}{N_{2,1} - N_{1,1}}\right)^2\right)\right) \tag{14}$$

$$p_{s,2}\left(t\right) = \frac{p_{d,2}\left(t\right)}{1 + m_2\left(t\right)} \tag{15}$$

$$q_{s,2}\left(t\right) = \max\left(0, Q_{2,2} \cdot \left(1 - \left(\frac{N_{2,2} - n_{hl,2}\left(t\right)}{N_{2,2} - N_{1,2}}\right)^2\right)\right) \tag{16}$$

$$w\left(t\right) = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$n_{hl,1}\left(t\right) = n_{hl,1}\left(0\right) + K_{dl,1} \cdot \int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl,1}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p,1}\left(\tau\right) - q_{\$c,1}\left(\tau\right)\right)}{d\tau}\right) \cdot d\tau \tag{18}$$

$$n_{hl,2}\left(t\right) = n_{hl,2}\left(0\right) + K_{dl,2} \cdot \int_0^t \operatorname{sgn}\left(\frac{dn_{hl,2}\left(\tau\right)}{d\tau}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{d\left(q_{\$p,2}\left(\tau\right) - q_{\$c,2}\left(\tau\right)\right)}{d\tau}\right) \cdot d\tau \tag{19}$$

$$p_{d,1}\left(t\right) = \max\left(0, \left(P_1 - K_{p1,1} \cdot s_1\left(t\right) - K_{p2,1} \cdot \frac{ds_1\left(t\right)}{dt}\right)\right) \tag{20}$$

CC BY NC ND

$$q_{d,1}\left(t\right)=q_{d,1}\left(0\right)+K_1\cdot\int_0^t\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{l}\operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,1}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\left(1+\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\right)\\+\operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,2}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\left(1-\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\right)\end{array}\right)\cdot d\tau \tag{21}$$

$$p_{d,2}\left(t\right)=\max\left(0,\left(P_2-K_{p1,2}\cdot s_2\left(t\right)-K_{p2,2}\cdot\frac{ds_2\left(t\right)}{dt}\right)\right) \tag{22}$$

$$q_{d,2}\left(t\right)=q_{d,2}\left(0\right)+K_2\cdot\int_0^t\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{l}\operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,1}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)-1\right)\\+\operatorname{sgn}\left(\frac{dq_{d,2}\left(\tau\right)}{d\tau}\right)\cdot\left(\operatorname{sgn}\left(\frac{db\left(\tau\right)}{d\tau}\right)+1\right)\end{array}\right)\cdot d\tau \tag{23}$$

$m_1(t)$ es el margen de comercialización cobrado en las transacciones de la mercadería 1, en tanto por uno; $Q_{2,1}$ es un coeficiente relativo a la mercadería 1, en [unidad s^{-1}]; $N_{2,1}$ es otro, en [persona]; $N_{1,1}$ es otro, en [persona]; $m_2(t)$ es el margen cobrado en las transacciones de la mercadería 2, en tanto por uno; $Q_{2,2}$ es un coeficiente relativo a la mercadería 2, en [unidad s^{-1}]; $N_{2,2}$ es otro, en [persona]; $N_{1,2}$ es otro, en [persona]; $n_{hl,1}(0)$ es el número de empleados contratados para la producción de la mercadería 1 inicialmente, en [persona]; $K_{dl,1}$ es un coeficiente relativo a la mercadería 1, en [$\$^{-1}$ s^2]; $n_{hl,2}(0)$ es el número de empleados contratados para la producción de la mercadería 2 inicialmente, en [persona]; $K_{dl,2}$ es un coeficiente relativo a la mercadería 2, en [$\$^{-1}$ s^2]; P_1 es un coeficiente relativo a la mercadería 1, en [\$ $unidad^{-1}$]; $K_{p1,1}$ es otro, en [\$ $unidad^{-2}$]; $s_1(t)$ es la existencia de la mercadería 1 en el mercado, en [unidad]; $K_{p2,1}$ es otro coeficiente relativo a la mercadería 1, en [\$ $unidad^{-2}$ s]; $q_{d,1}(0)$ es el flujo de mercadería 1 del mercado a los lugares de consumo inicialmente, en [unidad s^{-1}]; K_1 es otro coeficiente relativo a la mercadería 1, en [$\$^{-1}$ s]; $b(t)$ es el bienestar económico de los consumidores, en [\$]; P_2 es un coeficiente relativo a la mercadería 2, en [\$ $unidad^{-1}$]; $K_{p1,2}$ es otro, en [\$ $unidad^{-2}$]; $s_2(t)$ es la existencia de la mercadería 2 en el mercado, en [unidad]; $K_{p2,2}$ es otro coeficiente relativo a la mercadería 2, en [\$ $unidad^{-2}$ s]; $q_{d,2}(0)$ es el flujo de mercadería 2 del mercado a los lugares de consumo inicialmente, en [unidad s^{-1}]; K_2 es otro coeficiente relativo a la mercadería 2, en [$\$^{-1}$ s]:

$$m_1\left(t\right)=\frac{M_1}{P_1}\cdot p_{d,1}\left(t\right)\quad\text{(por ejemplo)} \tag{24}$$

$$Q_{2,1}=100\quad\text{(por ejemplo)} \tag{25}$$

$$N_{2,1}=100000\quad\text{(por ejemplo)} \tag{26}$$

$$N_{1,1}=0\quad\text{(por ejemplo)} \tag{27}$$

$$m_2\left(t\right)=\frac{M_2}{P_2}\cdot p_{d,2}\left(t\right)\quad\text{(por ejemplo)} \tag{28}$$

CC BY NC ND

$$Q_{2,2} = 150 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{29}$$

$$N_{2,2} = 100000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{30}$$

$$N_{1,2} = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{31}$$

$$n_{dl,1}\left(0\right) = 25001 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{32}$$

$$K_{dl,1} = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{33}$$

$$n_{dl,2}\left(0\right) = 25001 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{34}$$

$$K_{dl,2} = 10 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{35}$$

$$P_1 = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{36}$$

$$K_{p1,1} = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{37}$$

$$s_1\left(t\right) = s_1\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{s,1}\left(\tau\right) - q_{d,1}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{38}$$

$$K_{p2,1} = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{39}$$

$$q_{d,1}\left(0\right) = 37 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{40}$$

$$K_1 = 5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} b\left(t\right) = {} & \left(r_c\left(t\right) + K_c \cdot \left(q_{\$c,1}\left(t\right) + q_{\$c,2}\left(t\right) - q_{Sm1}\left(t\right) - q_{Sm2}\left(t\right)\right)\right) \\ & \cdot \max\left(0, B_{2,1} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,1}' - \alpha \cdot q_{d,2}\left(t\right) - q_{d,1}\left(t\right)}{Q_{d2,1} - Q_{d1,1}}\right)^2\right)\right) \\ & \cdot \max\left(0, B_{2,2} \cdot \left(1 - \left(\frac{Q_{d2,2}' - q_{d,1}\left(t\right)/\alpha - q_{d,2}\left(t\right)}{Q_{d2,2} - Q_{d1,2}}\right)^2\right)\right) \end{aligned} \tag{42}$$

$$P_2 = 200 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{43}$$

$$K_{p1,2} = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{44}$$

$$s_2\left(t\right) = s_2\left(0\right) + \int_0^t \left(q_{s,2}\left(\tau\right) - q_{d,2}\left(\tau\right)\right) \cdot d\tau \tag{45}$$

$$K_{p2,2} = 0.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{46}$$

$$q_{d,2}\left(0\right) = 37 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{47}$$

$$K_2 = 5 \cdot 10^{-4} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{48}$$

M_1 es un coeficiente relativo a la mercadería 1, en tanto por uno; M_2 es un coeficiente relativo a la mercadería 2, en tanto por uno; $s_1(0)$ es la existencia de la mercadería 1 en el mercado inicialmente, en [unidad]; K_c es otro coeficiente, en [s]; B_2 es otro, en tanto por uno; Q_{d2} es otro, en [unidad s^{-1}]; Q_{d1} es otro, en [unidad s^{-1}]; $s_2(0)$ es la existencia de la mercadería 2 en el mercado inicialmente, en [unidad]:

CC BY NC ND

$M_1 = 0.4$ (por ejemplo) (49)

$M_2 = 0.4$ (por ejemplo) (50)

$s_1\left(0\right) = 0$ (por ejemplo) (51)

$K_c = 2 \cdot 10^5$ (por ejemplo) (52)

$B_{2,1} = 1$ (por ejemplo) (53)

$Q_{d2,1} = 200$ (por ejemplo) (54)

$\alpha = 3$ (por ejemplo) (55)

$Q_{d1,1} = 37$ (por ejemplo) (56)

$B_{2,2} = 1$ (por ejemplo) (57)

$Q_{d2,2} = 200$ (por ejemplo) (58)

$Q_{d1,2} = 37$ (por ejemplo) (59)

$s_2\left(0\right) = 0$ (por ejemplo) (60)

El dibujo de la estructura causal es aburrido si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho. Saltémoslo.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (4), (9), (12), (25), (26), (27), (29), (30), (31), (32), (33), (34), (35), (36), (37), (39), (40), (41), (43), (44), (46), (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53), (54), (55), (56), (57), (58), (59) y (60) no contienen ninguna variable que evoluciona: (17) contiene 1; (14), (16), (24) y (28), 2 cada una; (5), (6), (7), (8), (10), (11), (13), (15), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (38) y (45), 3; (1), (2) y (3), 5; (42), 8; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 25 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^4 \cdot 3^{16} \cdot 5^3 \cdot 8^1$ (=688747536000) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(60).

Pero no sería cuerdo plantear que un flujo de dinero o de mercadería a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la reserva de dinero o de la existencia de mercadería, sino que tal reserva o existencia depende por integración de todos los flujos.

(1), (2), (3), (38) y (45) tienen reservas de dinero o existencias de mercadería despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 688747536000 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(60), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^6 \cdot 2^4 \cdot 3^{14} \cdot 8^1$ (=612220032).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 612220032 sistemas de ecuaciones restantes, 612074880 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 145152 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (5), (6), (7), (8), (10), (11), (14), (16), (18), (19), (21), (22) y (42) aún quedan, respectivamente, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 y 7 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa.

CC BY NC ND

Pero (18) sólo deja despejar a $n_{hl,1}$; (19), a $n_{hl,2}$; (21), a $q_{d,1}$; y (23), a $q_{d,2}$.

Como no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, descartando cualquier otro despeje en esas 4 ecuaciones sólo cabe despejar $q_{\$c,1}$ en (7), $q_{\$c,2}$ en (8), $q_{\$m,1}$ en (10), $q_{\$m,2}$ en (11), $q_{s,1}$ en (14) y $q_{s,2}$ en (16).

Y otra vez: como no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, descartando cualquier otro despeje en estas 6 ecuaciones sólo cabe despejar $q_{\$p,1}$ en (5), $q_{\$p,2}$ en (6) y b en (42):

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(60).

Si nos interesan las evoluciones de r_p, r_m y r_c; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (2), (3), (18), (19), (21), (23), (38) y (45); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar r_p inicial, r_m inicial, r_c inicial, $n_{hl,1}$ inicial, $n_{hl,2}$ inicial, $q_{d,l}$ inicial, $q_{d,2}$ inicial, s_l inicial, s_2 inicial, w, $Q_{2,1}$, $N_{2,1}$, $N_{1,1}$, $Q_{2,2}$, $N_{2,2}$, $N_{1,2}$, $K_{dl,1}$, $K_{dl,2}$, P_1, $K_{p1,1}$, $K_{p2,1}$, K_1, P_2, $K_{p1,2}$, $K_{p2,2}$, K_2, M_1, M_2, K_c, $B_{2,1}$, $Q_{d2,1}$, α_l, $Q_{d1,1}$, $B_{2,2}$, $Q_{d2,2}$, $Q_{d2,1}$, T, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(60) adecuadamente.

Pero el replanteamiento y la estructura temporal del método de computación son bastante enredados. Saltémoslos también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=60 y algunos detalles adicionales, entre los que se cuentan las condiciones previas para las derivadas en (18), (19), (20), (21), (22) y (23), graficó la figura 2 en cuyo final r_p=3.75·10^9, r_m=3.25·10^9 y r_c=40.8·10^9.

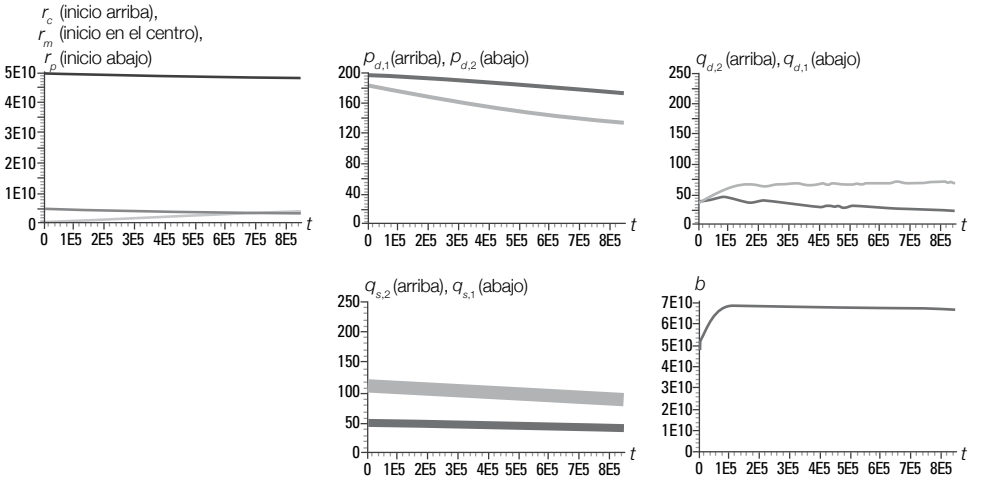


Fig. 2: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (1), (2), (3), (18), (19), (21), (23), (38) y (45), y la estructura causal, podemos plantear ecuaciones diferenciales. Pero el aburrimiento es mucho.

CC BY NC ND

Apéndice acerca del método de búsqueda

El método conjeturado para la búsqueda del bienestar económico máximo con los dos flujos de mercaderías, es un poco sorpresivo. Por ello, conviene agregar aquí algunas explicaciones.

Primero, remitámonos a un escenario de una variable gradual llamada genéricamente *y* que (casi como *b* en el caso anterior) depende estrictamente, sin discontinuidades y sin retardos de otra llamada *x* (como q_d entonces), pudiendo alcanzar un estado máximo (finito y único).

Si ambicionamos llegar al máximo de *y*, y si variamos *x* y con ello varía y, habiendo en cuenta que sólo tenemos acceso a *x* y que, por simplicidad, conservaremos el tamaño de la tasa de crecimiento de *x*, es cuerdo postular:

$$x(t) = x(0) + K \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot d\tau$$

o, si se quiere, según la aproximación de Euler:

$$x_{k+1} = x_k + K \cdot a_k \cdot dt$$

donde $a(t)$ (si se quiere, a_k) es un argumento variable con estados -1 o 1, de modo binario y dependiendo de sgn(dx/dt) y sgn(dy/dt) (si se quiere, sgn(x_k-x_{k-1}) y sgn(y_k-y_{k-1}), respectivamente).

Lo cuerdo es que, si la tasa de crecimiento de *x* ocasiona un crecimiento de *y*, se la mantenga; y, si no, se la invierta.

Tabulando:

sgn(dx/dt)	*sgn(dy/dt)*	*a*
-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
1	1	1

Interpolando:

$$\begin{aligned} a = & \frac{1-\operatorname{sgn}(dx/dt)}{1-(-1)} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn}(dy/dt)}{1-(-1)} \cdot 1 \\ & + \frac{1-\operatorname{sgn}(dx/dt)}{1-(-1)} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(dy/dt)-(-1)}{1-(-1)} \cdot (-1) \\ & + \frac{\operatorname{sgn}(dx/dt)-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{1-\operatorname{sgn}(dy/dt)}{1-(-1)} \cdot (-1) \\ & + \frac{\operatorname{sgn}(dx/dt)-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(dy/dt)-(-1)}{1-(-1)} \cdot 1 \end{aligned}$$

Y simplificando:

$$a = \operatorname{sgn}(dx/dt) \cdot \operatorname{sgn}(dy/dt)$$

CC BY NC ND

Por cierto, eso conduce directamente al método de búsqueda del caso anterior, sin garantías precisas y reconociendo aquí una falencia cuando dy/dt=0.

Ahora, remitámonos a un escenario de una variable llamada genéricamente *y* que (casi como *b* en el caso presente) depende estrictamente, sin discontinuidades y sin retardos de otras llamadas x_1 y x_2 (como $q_{d,1}$ y $q_{d,2}$), pudiendo alcanzar un estado máximo (finito y único).

Si ambicionamos llegar al máximo de *y*, y si variamos x_1 y x_2 y con ello varía *y*, habiendo en cuenta que tenemos acceso a x_1 y x_2 y que, por simplicidad, conservaremos el tamaño de la tasa de crecimiento de x_1 y x_2, es cuerdo postular:

$$x_1(t) = x_1(0) + K_1 \cdot \int_0^t a_1(\tau) \cdot d\tau$$

$$x_2(t) = x_2(0) + K_2 \cdot \int_0^t a_2(\tau) \cdot d\tau$$

o, si se quiere:

$$x_{k+1,1} = x_{k,1} + K_1 \cdot a_{k,1} \cdot dt$$

$$x_{k+1,2} = x_{k,2} + K_2 \cdot a_{k,2} \cdot dt$$

donde $a(t)$ (si se quiere, a_k) es un argumento variable con estados -1 o 1, de modo binario y dependiendo de sgn(dx_1/dt), sgn(dx_2/dt) y sgn(dy/dt) (si se quiere, sgn($x_{k,1}$-$x_{k-1,1}$), sgn($x_{k,2}$-$x_{k-1,2}$) y sgn(y_k-y_{k-1}), respectivamente).

Lo cuerdo es que, si las tasas de crecimientos de x_1 y x_2 ocasionan un crecimiento de *y*, se las mantenga; y, si no, se elija una de tres alternativas bosquejando las variaciones de x_1 y x_2 en un gráfico con esos ejes: retroceder en la misma dirección por donde se venía avanzando, torcer hacia la izquierda o torcer hacia la derecha.

Como negación a la pérdida de movimientos laterales y, como chiste (tonto) acerca de la libertad de los mercados, elijamos torcer hacia la derecha.

Tabulando:

sgn(dx_1/dt)	sgn(dx_1/dt)	sgn(dy/dt)	a_1	a_2
-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	1
-1	1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1

E interpolando y simplificando:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(dx_1/dt) \cdot (1 + \operatorname{sgn}(dy/dt)) \\ + \operatorname{sgn}(dx_2/dt) \cdot (1 - \operatorname{sgn}(dy/dt)) \end{pmatrix}$$

CC BY NC ND

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\left(dx_1 / dt\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(dy / dt\right) - 1\right) \\ + \operatorname{sgn}\left(dx_2 / dt\right) \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(dy / dt\right) + 1\right) \end{pmatrix}$$

Eso conduce al método de búsqueda del caso presente, otra vez sin garantías precisas y reconociendo una falencia cuando *dy/dt*=0.

BY NC ND

80.0

UNA MERCADERÍA QUE SE TRANSA POR TEMPORADAS (MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA)

Volvamos a un mercado ingenuo, con una complicación diferente: consideremos una mercadería que se transa por temporadas. En particular, imaginemos el caso de los árboles navideños vivos, porque:

- la mercadería se transa durante temporadas cíclicas bastante cortas y los remanentes de cada temporada se deben descartar, por lo menos parcialmente;
- la producción necesita tiempos considerables y, para iniciarla luego, al cabo de cada temporada los comerciantes deben dar indicios tempranos de los precios de la temporada venidera (o los productores deben adivinar ese precio observando el mercado por cuenta propia);
- el precio varía durante cada temporada, afectando inmediatamente a los consumidores y mediatamente a los productores.

Para simplificar, supongamos:

- que cada temporada dura un mes al año (entre los días 329 y 358 del calendario, inclusive, ignorando los años bisiestos) y que los remanentes de mercadería se deben descartar totalmente apenas termina cada temporada (en el día 359 del calendario);
- que, en esa última oportunidad, los comerciantes fijan como precio que cobrarán a los productores durante la temporada venidera, el 90% del precio promedio que recuerdan haber cobrado a los consumidores (olvidando paulatinamente las temporadas pasadas);
- y que, durante cada temporada, los productores suministran la mercadería parejamente según el precio fijado, mientras los comerciantes pagan ese precio a los productores pero cobran otro a los consumidores, iniciándolo más alto y disminuyéndolo luego para agotar la existencia, con urgencia creciente.

Interesa predecir la evolución de la existencia de la mercadería en el mercado.

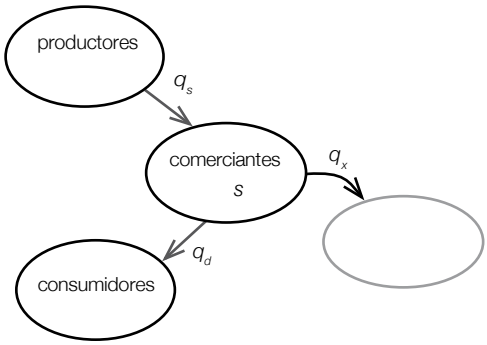


Fig. 1: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$s(t)$ es la existencia de la mercadería en el mercado, en [decena de miles de árboles]:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \left(q_s(\tau) - q_d(\tau) - q_x(\tau) \right) \cdot d\tau \qquad (1)$$

CC BY NC ND

$s(0)$ es la existencia de la mercadería en el mercado inicialmente, en [decena de miles de árboles]; $q_s(t)$ es el flujo de mercadería de los lugares de producción al mercado, en [(decena de miles de árboles) día^{-1}]; $q_d(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los lugares de consumo, en [(decena de miles de árboles) día^{-1}]; $q_x(t)$ es el flujo de mercadería del mercado a los basurales, en [(decena de miles de árboles) día^{-1}]:

$$s(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{2}$$

$$q_s(t) = \begin{cases} \max\left(0, \left(-Q_s + K_s \cdot p_s(t)\right)\right) & \text{si } 329 \le t + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\frac{t}{365}\right) < 359 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{3}$$

$$q_d(t) = \begin{cases} \max\left(0, \left(Q_d - K_d \cdot p_d(t)\right)\right) & \text{si } 329 \le t + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\frac{t}{365}\right) < 359 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{4}$$

$$q_x(t) = \begin{cases} \dfrac{s\left(358 + 365 \cdot \operatorname{int}\left(\frac{t}{365}\right)\right)}{1} & \text{si } 359 \le t + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\frac{t}{365}\right) < 360 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{5}$$

Q_s es un coeficiente, en [(decena de miles de árboles) día^{-1}]; K_s es otro, en [(decena de miles de árboles)^2 día^{-1} (decena de millones de \$)$^{-1}$]; $p_s(t)$ es el precio de compra de la mercadería, en [(decena de millones de \$) (decena de miles de árboles)$^{-1}$]; Q_d es otro coeficiente, en [(decena de miles de árboles) día^{-1}]; K_d es otro, en [(decena de miles de árboles)^2 día^{-1} (decena de millones de \$)$^{-1}$]; $p_d(t)$ es el precio de venta de la mercadería, en [(decena de millones de \$) (decena de miles de árboles)$^{-1}$]:

$$Q_s = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$K_s = 2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{7}$$

$$p_s(t) = 0.9 \cdot p_{d,med}(t) \tag{8}$$

$$Q_d = 4 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$K_d = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

$$p_d(t) = \begin{cases} \max\left(0.5 \cdot p_{d,med}(t), \left(2 \cdot p_{d,med}(t) - \frac{0.5}{r(t)} \cdot s(t)\right)\right) & \text{si } 329 \le t + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\frac{t}{365}\right) < 359 \\ p_{d,med}(t) & \text{si no} \end{cases}$$

(por ejemplo) (11)

$p_{d,med}(t)$ es el precio promedio de venta de la mercadería (olvidando lentamente las temporadas pasadas), en [(decena de millones de \$) (decena de miles de árboles)$^{-1}$]; r(t) es el resto del tiempo de temporada, en tanto por uno:

$$p_{d,med}(t) = p_{d,med}(0) + \int_0^t \left(\frac{c(\tau)}{v(\tau)} - p_{d,med}(\tau)\right) \cdot f(\tau) \cdot d\tau \tag{12}$$

CC BY NC ND

$$r\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{359-\left(t+1-365\cdot\operatorname{int}\left(\dfrac{t}{365}\right)\right)}{30} & \text{si } 329\le t+1-365\cdot\operatorname{int}\left(\dfrac{t}{365}\right)<359\\ 1 & \text{si no}\end{cases}$$

(por ejemplo) (13)

$p_{d,med}(0)$ es el precio promedio de venta de la mercadería inicialmente, en [(decena de millones de $) (decena de miles de árboles)$^{-1}$]; $c(t)$ es el total bruto de dinero cobrado por los comerciantes, en [decena de millones de $]; $v(t)$ es el total bruto de mercadería vendida por los comerciantes, en [decena de miles de árboles]; $f(t)$ es un coeficiente de olvido, en [s^{-1}]:

$$p_{d,med}\left(0\right)=1.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$c\left(t\right)=c\left(0\right)+\int_0^t q_d\left(\tau\right)\cdot p_d\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{15}$$

$$v\left(t\right)=v\left(0\right)+\int_0^t q_d\left(\tau\right)\cdot d\tau \tag{16}$$

$$f\left(t\right)=\begin{cases}0.8 \quad \left(\text{ó} \quad 0.4\right) & \text{si } 329\le t+1-365\cdot\operatorname{int}\left(\dfrac{t}{365}\right)<359\\ 0 & \text{si no}\end{cases} \tag{17}$$

$c(0)$ es el total bruto de dinero cobrado por los comerciantes inicialmente, en [decena de millones de $]; $v(0)$ es el total bruto de mercadería vendida por los comerciantes inicialmente, en [decena de miles de árboles]:

$$c\left(0\right)=0.0015 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$v\left(0\right)=0.001 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

Saltemos también el dibujo de la estructura causal si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (6), (7), (9), (10), (14), (15), (18) y (19) no contienen ninguna variable que evoluciona: (13) contiene 1; (3), (4), (5), (8) y (17), 2 cada una; (11), (12) y (16), 3; (1), 4; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 10 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1\cdot2^5\cdot3^3\cdot4^1$ (=3456) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(19).

Pero no es cuerdo plantear que un flujo de mercadería a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la existencia de mercadería en el recinto, sino que tal existencia depende por integración de todos los flujos.

(1) tienen una existencia de mercadería despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 3456 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(19), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2\cdot2^5\cdot3^3\cdot4^0$ (=864).

CC BY NC ND

Extendiendo el argumento anterior al total bruto de dinero cobrado por los comerciantes y al total bruto de mercadería vendida por ellos, no es cuerdo plantear que el flujo de dinero cobrado o de la mercadería vendida depende, por derivación, del total cobrado o vendido sino que tales totales dependen por integración de los flujos.

(15) y (16) tienen los totales despejados en sus lados izquierdos, como corresponde según el argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los restantes 864 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(19), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4^0$ (=144).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 144 sistemas de ecuaciones restantes, 143 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(19).

Si nos interesa la evolución de *s*; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo *dt* para las integraciones en (1), (12), (15) y (16); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar *s* inicial, $p_{d,med}$ inicial, *c* inicial, *v* inicial, Q_s, K_s, Q_d, K_d, *f*, *dt* y *t* inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(19) como:

$$Q_s = \ldots \tag{6'}$$

$$K_s = \ldots \tag{7'}$$

$$Q_d = \ldots \tag{9'}$$

$$K_d = \ldots \tag{10'}$$

$$s_0 = \ldots \tag{2'}$$

$$p_{d,med,0} = \ldots \tag{14'}$$

$$c_0 = \ldots \tag{18'}$$

$$v_0 = \ldots \tag{19'}$$

$$f_k = \begin{cases} \ldots & \text{si } 329 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 359 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \tag{17'}$$

$$r_k = \begin{cases} \dfrac{359 - \left(k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right)\right)}{30} & \text{si } 329 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 359 \\ 1 & \text{si no} \end{cases} \tag{13'}$$

$$p_{s,k} = 0.9 \cdot p_{d,med,k} \tag{8'}$$

$$p_{d,k} = \begin{cases} \max\left(0.5 \cdot p_{d,med,k}, \left(2 \cdot p_{d,med,k} - \dfrac{0.5}{r_k} \cdot s_k\right)\right) & \text{si } 329 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \operatorname{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 359 \\ p_{d,med,k} & \text{si no} \end{cases} \tag{11'}$$

CC BY NC ND

$$q_{s,k} = \begin{cases} \max\left(0,\left(-Q_s + K_s \cdot p_{s,k}\right)\right) & \text{si } 329 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \text{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 359 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (3')$$

$$q_{d,k} = \begin{cases} \min\left(\max\left(0,\left(Q_d - K_d \cdot p_{d,k}\right)\right),\left(q_{s,k} + s_k \cdot dt\right)\right) & \text{si } 329 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \text{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 359 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (4')$$ [126]

$$q_{x,k} = \begin{cases} \dfrac{s\left(358 + 365 \cdot \text{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right)\right)}{1} & \text{si } 359 \le k \cdot dt + 1 - 365 \cdot \text{int}\left(\dfrac{k \cdot dt}{365}\right) < 360 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (5')$$

$$s_{k+1} = s_k + \left(q_{s,k} - q_{d,k} - q_{x,k}\right) \cdot dt \qquad (1')$$

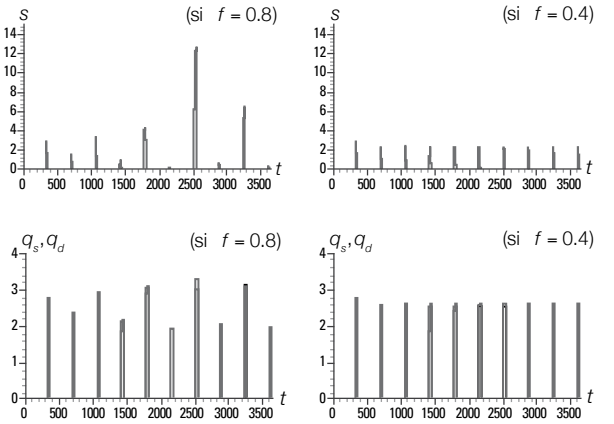
$$p_{d,med,k+1} = p_{d,med,k} + \left(\frac{c_k}{v_k} - p_{d,med,k}\right) \cdot f_k \cdot dt \qquad (12')$$

$$c_{k+1} = c_k + q_{d,k} \cdot p_{d,k} \cdot dt \qquad (15')$$

$$v_{k+1} = v_k + q_{d,k} \cdot dt \qquad (16')$$

Saltemos también el dibujo de la estructura temporal del método de computación.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales, dt=1 y algunos detalles adicionales) graficó la figuras 1 (donde las condiciones entre paréntesis aluden sólo a la primera parte de $f(t)$).



[126] min(,($q_{s,k}$+ $s_{,k}$·dt)) ha sido agregado como precaución para impedir que, con la aproximación de Euler, $q_{d,k}$ provoque s_{k+1}<0. Si 0<s_k, equivale a

$$q_{d,k} = \begin{cases} q_{s,k} + s_k \cdot dt & \text{si } 0 < s_k \text{ y } q_{s,k} + s_k \cdot dt < Q_d - K_d \cdot p_k \\ Q_d - K_d \cdot p_k & \text{si } 0 < s_k \text{ y } 0 < Q_d - K_d \cdot p_k \le q_{s,k} + s_k \cdot dt \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

CC BY NC ND

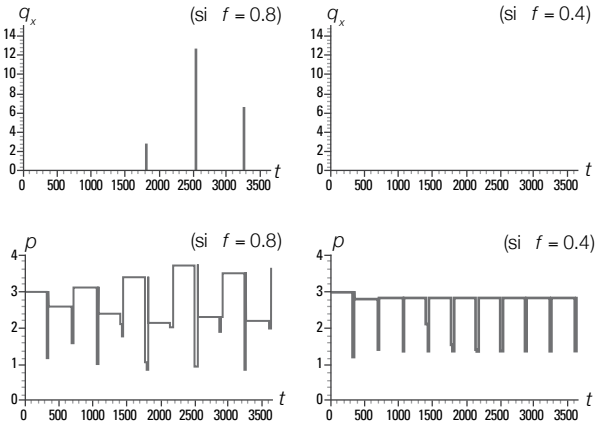


Fig. 2: Predicciones

81.0

UNA OFICINA DE TRAMITACIÓN DE EXPEDIENTES [127] (EXPEDIENTES Y FLUJOS DE EXPEDIENTES; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO)

Imaginemos una oficina de tramitaciones con un jefe y varios subalternos, todos profesionales, a los cuales el jefe otorga bonos variables, sobre los salarios fijos, para incentivar el despacho de los expedientes.

A fines de cada año, un organismo superior deposita en una cuenta bancaria el dinero presupuestado para los bonos. A fines de cada mes, el jefe entrega a aquel organismo los expedientes despachados, saca de la cuenta la parte del dinero que estima conveniente, reparte los bonos y acepta otros expedientes que agrega a los pendientes hasta el momento.

Interesa predecir la evolución de la existencia de expedientes pendientes.

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

k es el número del mes.

p_{k+1} es la existencia de expedientes pendientes a fines del mes k+1, en [expediente]:

$$p_{k+1} = p_0 + \sum_{\kappa=0}^{k} \left(d_\kappa - \sum_{\nu=1}^{N} o_{\nu,\kappa} \right) \cdot dt \qquad (1)$$

p_0 es la existencia de expedientes pendientes inicialmente, en [expediente]; d_k es el flujo de expedientes que se van allegando durante el mes k y son aceptados a fines de ese mes, en [expediente mes^{-1}]; N es el número de subalternos que despachan los expedientes, en [persona]; $o_{n,k}$ es el flujo de expedientes que el subalterno n va despachando durante el mes k para fines de ese mes, en [expediente mes^{-1}]; dt es el período de actualización de datos, en [mes]:

$$p_0 = 600 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (2)$$

$$d_k = \begin{cases} 400 & \text{si } 0 \le k < 24 \\ 400 + (k-24) \cdot \left(1 + \sin\left(\dfrac{2 \cdot \pi}{48} \cdot (k-24) \right) \right) & \text{si } 24 \le k \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (3)$$

$$N = 3 \quad \text{(por ejemplo)} \qquad (4)$$

$$o_{n,k} = \begin{cases} o_{m,n,k} & \text{si } \sum_{\nu=1}^{N} o_{m,\nu,k} \le p_k \\ \dfrac{p_k}{\sum_{\nu=1}^{N} o_{m,\nu,k}} \cdot o_{m,n,k} & \text{si } p_k < \sum_{\nu=1}^{N} o_{m,\nu,k} \end{cases} \qquad (5)$$

[127] Adaptación de: J. Sandoval, 2004, Estudio de optimización del sistema de control de gestión de la Dirección del Trabajo mediante la utilización de estrategias de control automático, *Memoria, Dep. Electrónica, Univ. Santa María*, Valparaíso.

CC BY NC ND

$$dt = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$o_{m,n,k}$ es el flujo de expedientes que el subalterno n se pone como meta para ir despachando durante el mes k, en [expediente mes^{-1}]:

$$o_{m,n,k} = \begin{cases} O_{\min} & \text{si } c_{\$,n,k} < \dfrac{\pi \cdot C_{\chi,n}}{2 \cdot O_{\max,n}} \\ \max\left(O_{\min}, \left(\dfrac{2 \cdot O_{\max,n}}{\pi} \cdot \arccos\left(\sqrt{\dfrac{\pi \cdot C_{\chi,n}}{2 \cdot O_{\max,n} \cdot c_{\$,n,k}}}\right)\right)\right) & \text{si } \dfrac{\pi \cdot C_{\chi,n}}{2 \cdot O_{\max,n}} \le c_{\$,n,k} \end{cases} \tag{7}$$

O_{min} es el flujo de expedientes que cualquier subalterno debe ir despachando como mínimo durante cualquier mes, en [expediente mes^{-1}]; $c_{\$,n,k}$ es el cuociente de crecimiento del ingreso de dineros propio según el crecimiento del despacho de expedientes propio, que el subalterno n se pronostica para el mes k, en [\$ expediente^{-1}]; $C_{\chi,n}$ es el cuociente de crecimiento del cansancio propio (traducido a dinero) según el crecimiento del despacho de expedientes propio, que el subalterno n experimenta durante cualquier mes, en [\$ expediente^{-1}]; $O_{max,n}$ es el máximo flujo de expedientes que el subalterno n puede ir despachando durante cualquier mes, en [expediente mes^{-1}]:

$$O_{\min} = 100 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$c_{\$,1,0} = 6000 \quad c_{\$,2,0} = 6000 \quad c_{\$,3,0} = 8000$$
$$c_{\$,1,1} = 3700 \quad c_{\$,2,1} = 3500 \quad c_{\$,3,1} = 6400$$

$$c_{\$,n,k+1} = \begin{cases} \left(1 - A_n\right) \cdot c_{\$,n,k} + A_n \cdot \dfrac{i_{n,k} - i_{n,k-1}}{o_{n,k} - o_{n,k-1}} & \text{si } \left|\dfrac{i_{n,k} - i_{n,k-1}}{o_{n,k} - o_{n,k-1}}\right| < 25000 \\ \left(1 - A_n\right) \cdot c_{\$,n,k-1} + A_n \cdot 25000 & \text{si } 25000 \le \left|\dfrac{i_{n,k} - i_{n,k-1}}{o_{n,k} - o_{n,k-1}}\right| \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$\text{si } 1 \le n \le 3 \text{ y } 1 \le k$$

$$C_{\chi,1} = 30000 \quad C_{\chi,2} = 20000 \quad C_{\chi,3} = 30000$$
(por ejemplo; el subalterno 2 es más vigoroso) (10)

$$O_{1,\max} = 250 \quad O_{2,\max} = 200 \quad O_{3,\max} = 200$$
(por ejemplo; el subalterno 1 es más talentoso) (11)

A_n es el coeficiente de ajuste de los pronósticos del subalterno n, en tanto por uno; $i_{n,k}$ es el flujo de ingresos propio del subalterno n durante el mes k, en [\$ mes^{-1}]:

$$A_1 = 0.4 \quad A_2 = 0.4 \quad A_3 = 0.2$$
(por ejemplo; el subalterno 3 es más cauteloso) (12)

$$i_{n,k} = S_n + b_{n,k} \tag{13}$$

S_n es el salario del subalterno n, en [\$ mes^{-1}]; $b_{n,k}$ es su bono durante el mes k, en [\$ mes^{-1}]:

$$S_1 = 400000 \quad S_2 = 400000 \quad S_3 = 400000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{14}$$

$$b_{n,k} = \frac{o_{n,k}}{\sum_{\nu=1}^{N} o_{\nu,k}} \cdot m_{o,k} \tag{15}$$

CC BY NC ND

$m_{o,k}$ es el flujo de dineros para bonos que el jefe saca de la cuenta bancaria durante el mes k, en [\$ mes^{-1}]:

$$m_{o,k} = \frac{B_k}{13 - M_k} \cdot \frac{1}{dt} \tag{16}$$

B_k es la reserva de dinero para bonos en la cuenta bancaria a fines del mes k, en [\$]; M_k es el número calendario correspondiente al mes k dentro del año (1 para enero, 2 para febrero y así sucesivamente), en tanto por doce:

$$B_{k+1} = B_0 + \sum_{\kappa=0}^{k} \left(m_{i,\kappa} - m_{o,\kappa} \right) \cdot dt \tag{17}$$

$$M_k = k + 1 - \text{int}\left(\frac{k}{12} \right) \cdot 12 \tag{18}$$

B_0 es la reserva de dinero para bonos en la cuenta bancaria inicialmente, en [\$]; $m_{i,k}$ es el flujo de dinero depositado en la cuenta bancaria durante el mes k, en [\$ mes^{-1}]:

$$B_0 = 7200000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$m_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M_n \neq 12 \\ 7200000 & \text{si} \quad M_n = 12 \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

Saltemos también el dibujo de la estructura causal si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (2), (4), (6), (8), (10), (11), (12), (14) y (19) no contienen ninguna variable que evoluciona: (3), (18) y (20) contienen 1 cada una; (7) y (13), 2; (1), (5), (9), (15), (16) y (17), 3; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 11 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^3 \cdot 2^2 \cdot 3^6$ (=2916) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(20).

Pero no es cuerdo plantear que un flujo de expedientes o dineros a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la existencia de expedientes o de la reserva de dinero en el recinto, sino que tal existencia o reserva depende por integración de todos los flujos.

(1) y (17) tienen una existencia de expedientes o dineros despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en cada una de ellas se reducen al que está planteado y, de los 2916 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(20), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^5 \cdot 2^2 \cdot 3^4$ (=324).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 324 sistemas de ecuaciones restantes, 276 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 48 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (5), (7), (9), (13) y (15) aún parecen quedar, respectivamente, 2, 2, 3, 2 y 2 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa. Dichas variables aparecen insinuadas en la figura 1.

CC BY NC ND

(5)	(7)	(9)	(13)	(15)
o_n	$o_{m,n}$	$c_{\$,n}$	i_n	b_n
$o_{m,n}$	$c_{\$,n}$	i_n	b_n	o_n
		o_n		

Fig. 1: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (5) se puede despejar o_n u $o_{m,n}$, en (7) $o_{m,n}$ o $c_{\$,n}$,... y en (15) b_n u o_n; no que en (5), (7), (9), (13) y (15), respectivamente, se pueden despejar o_n, $o_{m,n}$, $c_{\$,n}$, i_n y b_n, u $o_{m,n}$, $c_{\$,n}$, i_n, b_n y o_n, o algo más)

Sin embargo, un análisis cuidadoso de la figura 1 considerando otra vez que no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes, deja sólo 3 alternativas: despejar en (5), (7), (9), (13) y (15), respectivamente, o_n, $o_{m,n}$, $c_{\$,n}$, i_n y b_n, u $o_{m,n}$, $c_{\$,n}$, i_n, b_n y o_n, u $o_{m,n}$, $c_{\$,n}$, o_n, i_n y b_n, según la figura 2.

(5)	(7)	(9)	(13)	(15)
o_n	$o_{m,n}$	$c_{\$,n}$	i_n	b_n
$o_{m,n}$	$c_{\$,n}$	i_n	b_n	o_n
$o_{m,n}$	$c_{\$,n}$	o_n	i_n	b_n

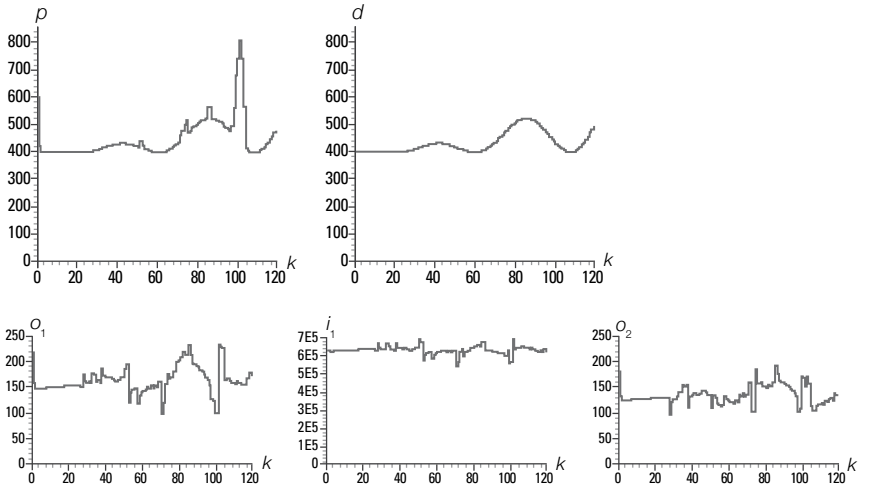
Fig. 2: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura sí trata de insinuar una disyuntiva de conjuntos en renglones)

Pero en (5) $o_{m,n}$ no se deja despejar. Con eso, sólo queda la primera opción, que es la original.

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(20).

Saltemos el dibujo de la estructura temporal del método de computación, también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales y algunos detalles adicionales) graficó la figura 3.



BY NC ND

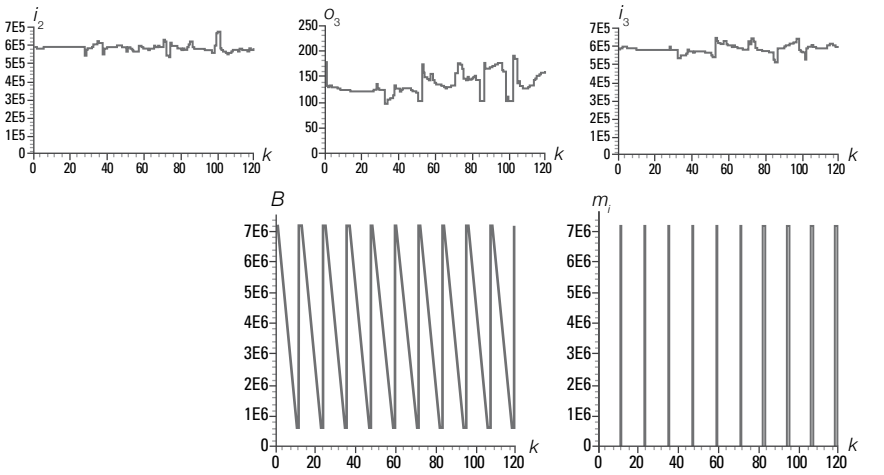


Fig. 1: Predicciones

Apéndice acerca de (7)

El flujo de expedientes que un subalterno se pone como meta por despachar durante un mes, depende de un diagnóstico personal según el cual el ingreso de dineros propio dependería del despacho de expedientes propio aproximadamente como *i* depende de *o* en la figura A1 o, equivalentemente, en la ecuación siguiente:

$$i = S + c_{\$} \cdot \left(o - O_{\min}\right) \quad \text{si} \quad 0 < O_{\min} \le o$$

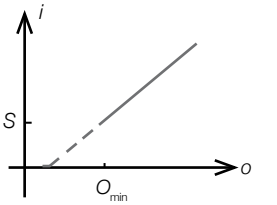


Fig. A1: Ingreso de dineros dependiendo del despacho de expedientes

Pero ese flujo que el subalterno se pone como meta, también depende de otro diagnóstico personal según el cual el cansancio propio dependería del despacho de expedientes aproximadamente como χ depende de *o* en la figura A2 o, equivalentemente, en la ecuación siguiente:

$$\chi = C_{\chi} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{o}{O_{\max}}\right) \quad \text{si} \quad 0 < O_{\min} \le o < O_{\max}$$

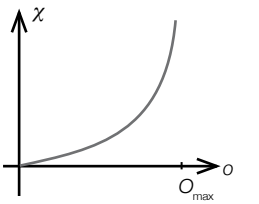


Fig. A2: Cansancio dependiendo del despacho de expedientes

BY NC ND

Si el subalterno, siendo un profesional, puede traducir su cansancio en dinero para compararlo con su ingreso, aunque sea vagamente, es posible que busque optimizar su trabajo, aunque esto también sea vagamente, con una figura como la A3 o, equivalentemente, con un desarrollo como este:

$$i - \chi = S + c_{\$} \cdot \left(o - O_{\min}\right) - C_{\chi} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{o}{O_{\max}}\right) \quad \text{si} \quad 0 < O_{\min} \le o < O_{\max}$$

$$\text{luego} \quad \frac{d\left(i - \chi\right)}{do} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad o = \frac{2 \cdot O_{\max}}{\pi} \cdot \arccos\left(\sqrt{\frac{\pi \cdot C_{\chi}}{2 \cdot O_{\max} \cdot c_{\$}}}\right)$$

$$\text{si} \quad \frac{\pi \cdot C_{\chi}}{2 \cdot O_{\max}} \le c_{\$}$$

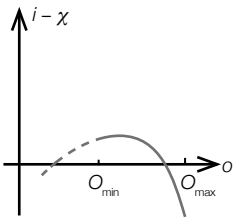


Fig. A3: Resta entre ingreso de dineros y cansancio dependiendo del despacho de expedientes

BY NC ND

82.0

UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA (PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO)

Imaginemos una institución educativa en la que se debe decidir la estrategia de admisión de estudiantes considerando crudamente los dineros necesarios para la supervivencia.

Interesa predecir la evolución del flujo de caja involucrado.

Saltemos el dibujo de la estructura espacial.

k es el número del año.

$q_{\$,k}$ es el flujo de caja neto entrante a la institución durante el año k, ocasionado por los estudiantes, en [\$ año^{-1}]:

$$q_{\$,k} = p_k \cdot \left(a + a_{fis} - g\right) \tag{1}$$

p_k es el número de estudiantes durante el año k, en [persona]; a es el arancel anual individual pagado por cada estudiante, en [\$ año^{-1} persona^{-1}]; a_{fis} es el aporte anual individual hecho por el Fisco a cada estudiante, en [\$ año^{-1} persona^{-1}]; g es el gasto anual individual ocasionado por cada estudiante, en [\$ año^{-1} persona^{-1}]:

$$p_{k+1} = p_0 + \sum_{\kappa=0}^{k} \left(q_{adm,\kappa} - q_{eli,\kappa} - q_{tit,\kappa}\right) \cdot dt \tag{2}$$

$$a = 1000000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{3}$$

$$a_{fis} = 500000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

$$g = 1400000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

p_0 es ese número de estudiantes inicialmente, en [persona]; $q_{adm,k}$ es el flujo de estudiantes entrantes a la institución durante el año k, por admisión, en [persona año^{-1}]; $q_{eli,k}$ es el flujo de estudiantes salientes de la institución durante el año, por eliminación, en [persona año^{-1}]; $q_{tit,k}$ es el flujo de estudiantes salientes de la institución, por titulación, en [persona año^{-1}]; dt es el período de actualización de los datos, en [año]:

$$p_0 = 6000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{6}$$

$$q_{adm,k} = \min\left(q_{adm,ref,k}, q_{pos,k}\right) \tag{7}$$

$$q_{eli,k} = \begin{cases} 0.06 \cdot p_k & \text{si} \quad k < 10 \\ 0.09 \cdot p_k & \text{si} \quad 10 \le k < 15 \\ 0.07 \cdot p_k & \text{si} \quad 15 \le k \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$$q_{tit,k} = 0.10 \cdot p_k \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$dt = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{10}$$

CC BY NC ND

$q_{adm,ref,k}$ es el flujo de postulantes que serían admitidos según la referencia decidida en la estrategia de admisión, en [persona año^{-1}]; $q_{pos,k}$ es el flujo de postulantes durante el año k, en [persona año^{-1}]:

$$q_{adm,ref,k} = \begin{cases} 1000 & \text{si} \quad k \le 4 \\ 1500 & \text{si} \quad 5 \le k \end{cases} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{11}$$

$$q_{pos,k} = q_{pos,tot,k} \cdot f_k \tag{12}$$

$q_{pos,tot,k}$ es el flujo de los postulantes a estudios similares en todas las instituciones educativas durante el año k, en [persona año^{-1}]; f_k es una fracción de ese flujo, por comparación pública de todas las instituciones educativas:

$$q_{pos,tot,k} = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

$$f_{k+1} = \begin{cases} f_0 & \text{si} \quad k = -1 \\ f_k \cdot \left(\begin{array}{l} 1 \\ +C_1 \cdot \left(1 - \dfrac{q_{eli,k} / q_{adm,k}}{q_{eli,tot,k} / q_{adm,tot,k}} \right) \\ +C_2 \cdot \left(\dfrac{q_{exi,k} / q_{tit,k}}{q_{exi,tot,k} / q_{tit,tot,k}} - 1 \right) \\ +C_3 \cdot \left(\dfrac{q_{adm,k} / q_{pos,k}}{q_{ad,tot,k} / q_{pos,tot,k}} - 1 \right) \end{array} \right) & \text{si} \quad 0 \le k \end{cases} \tag{14}$$

f_0 es la fracción del flujo total de postulantes inicialmente; C_1 es un coeficiente; $q_{eli,tot,k}$ es el flujo de estudiantes eliminados de estudios similares en todas las instituciones educativas durante el año k, en [persona año^{-1}]; $q_{adm,tot,k}$ es el flujo de estudiantes admitidos a estudios similares en todas las instituciones educativas durante el año, en [persona año^{-1}]; C_2 es otro coeficiente; $q_{exi,k}$ es el flujo de titulados que son exitosos, en [persona año^{-1}], $q_{exi,tot,k}$ es el flujo de titulados de estudios similares en todas las instituciones educativas que son exitosos, en [persona año^{-1}]; $q_{tit,tot,k}$ es el flujo total de titulados en estudios similares, en [persona año^{-1}]; C_3 es otro coeficiente:

$$f_0 = 0.02 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{15}$$

$$C_1 = 0.5 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{16}$$

$$q_{eli,tot,k} = 20000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{17}$$

$$q_{adm,tot,k} = 50000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{18}$$

$$C_2 = 1.0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{19}$$

$$q_{exi,k} = 0.70 \cdot q_{tit,k} \quad \text{(por ejemplo)} \tag{20}$$

$$q_{exi,tot,k} = 20000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{21}$$

$$q_{tit,tot,k} = 30000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{22}$$

BY NC ND

$C_3 = 0.8$ (por ejemplo) (23)

Saltemos también el dibujo de la estructura causal si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho.

La estructura causal misma es dudable pues, aunque (3), (4), (5), (6), (10), (15), (16), (19) y (23) no contienen ninguna variable que evoluciona: (11), (13), (17), (18), (21) y (22) contienen 1 cada una; (1), (8), (9) y (20), 2; (7) y (12), 3; (2), 4; (14), 11; por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 14 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^6 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4^1 \cdot 11^1$ (=6336) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(23).

Pero no es cuerdo plantear que un flujo de personas a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, del número de personas en el recinto, sino que tal número depende por integración de todos los flujos.

(2) tiene un número de personas despejado en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en (2) se reducen al que está planteado y, de los 6336 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(23), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4^0 \cdot 11^1$ (=1584).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 1584 sistemas de ecuaciones restantes, 1572 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Los 12 sistemas de ecuaciones restantes se deben a que en (7), (12) y (14) aún parecen quedar, respectivamente, 2, 2 y 3 variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa. Dichas variables aparecen insinuadas en la figura 1.

(7)	(12)	(14)
q_{adm}	q_{pos}	f
q_{pos}	f	q_{adm}
		q_{pos}

Fig. 1: Variables que evolucionan y que pueden despejarse de manera alternativa (Advertencia: la figura trata de insinuar un conjunto de disyuntivas en columnas, y no una disyuntiva de conjuntos en renglones; trata de decir que en (7) se puede despejar q_{adm} o q_{pos}, en (7) q_{pos} o f, y en (14) f, q_{adm} o q_{pos}; no que en (7), (12) y (14), respectivamente, se pueden despejar q_{adm}, q_{pos} y f, o q_{pos}, f y q_{adm}, o algo más)

Pero, no es cuerdo plantear que una variable domina variando después.

(14) tiene una variable que varía después despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los despejes imaginables en (14) se reducen al que está planteado y, de los 12 sistemas de ecuaciones restantes, los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^1 \cdot 2^2$ (=4).

Ahora no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 4 sistemas de ecuaciones restantes, 3 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

BY NC ND

Sólo hay 1 sistema de ecuaciones causalmente cuerdo (con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(23).

Saltemos el dibujo de la estructura temporal del método de computación, también.

Un método de computación como el sospechable pese a la ausencia del dibujo correspondiente (con los datos originales y algunos detalles adicionales) graficó la figura 2.

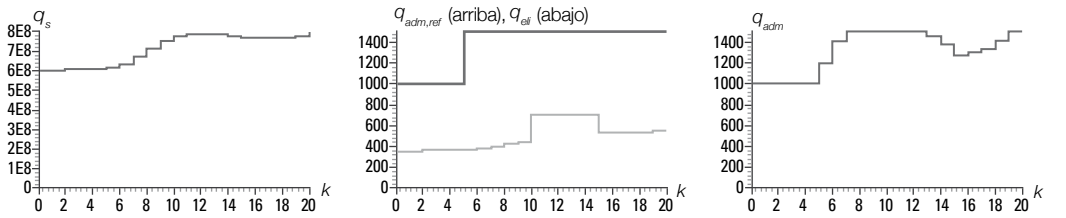


Fig.2: Predicciones

BY NC ND

83.0

DE VUELTA: AGUA Y BURBUJAS DE AIRE EN UN ESTANQUE CILÍNDRICO CON EJE VERTICAL (MASAS Y CAUDALES)

En algunas circunstancias productivas con medios líquidos, se usa a propósito burbujas de gases o de líquidos más livianos (no solubles). Así, por ejemplo, en medios acuosos se usa burbujas de aire como flotadores selectivos de partículas mineralógicas que resultan particularmente hidrófobas (quizás con ayuda de aditivos químicos en el medio), de manera que dichas partículas suban adheridas a las burbujas y las demás se hundan, permitiendo recolecciones separadas.

Simplificadamente, imaginemos un estanque cilíndrico con eje de simetría vertical; con agua que reposa dentro; y con aire que entra por abajo a través de una placa perforada, viaja subiendo por el agua en forma de burbujas esféricas iguales entre sí, sin tropiezos mutuos, sin aplastamiento significativo por la presión del agua y con velocidad (casi) constante, y sale por arriba abandonando el agua [128].

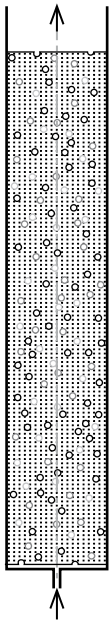


Fig. 1: Agua y burbujas de aire en un estanque cilíndrico con eje vertical

Como las burbujas tienen volúmenes que se añaden al del agua, interesa predecir las evoluciones del nivel de la columna de agua y burbujas dentro del estanque, suponiendo que ese nivel nunca desborda al estanque.

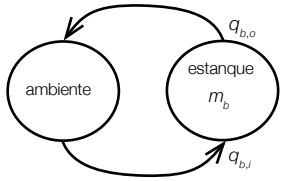


Fig. 2: Estructura espacial

t es el tiempo, en [s].

$h(t)$ es el nivel de la columna de agua y burbujas, desde el extremo inferior del estanque, en [m]:

$$h(t) = \frac{V_a + V_b(t)}{A} \qquad (1)$$

[128] Para imaginar que la velocidad es (casi) constante, en estado de casi-equilibrio, nos podemos justificar con el caso de una burbuja en el agua.

CC BY NC ND

V_a es el volumen del agua dentro del estanque, en [m^3]; $V_b(t)$ es el volumen total de las burbujas de aire, en [m^3]; A es el área transversal del estanque, en [m^2]:

$$V_a = \frac{m_a}{\rho_a} \tag{2}$$

$$V_b(t) = \frac{m_b(t)}{\rho_b} \tag{3}$$

$$A = 1 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{4}$$

m_a es la masa en el agua dentro del estanque, en [kg]; ρ_a es la densidad del agua, en [kg m^{-3}]; $m_b(t)$ es la masa total en las burbujas de aire, en [kg]; ρ_b es la densidad de las burbujas, en [kg m^{-3}]:

$$m_a = 10000 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{5}$$

$$\rho_a = 1000 \tag{6}$$

$$m_b(t) = m_b(0) + \int_0^t \left(q_{b,i}(\tau) - q_{b,o}(\tau)\right) \cdot d\tau \tag{7}$$

$$\rho_b = 1.2 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{8}$$

$m_b(0)$ es la masa total en las burbujas inicialmente, en [kg]; $q_{b,i}(t)$ es el caudal de aire que viaja del ambiente al estanque formando burbujas, por abajo, en [kg s^{-1}]; $q_{b,o}(t)$ es el caudal de aire que viaja del estanque al ambiente, por arriba, en [kg s^{-1}]:

$$m_b(0) = 0 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{9}$$

$$q_{b,i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 10 \\ 0.03 \cdot \left(1 - \cos\left\{\frac{2 \cdot \pi}{120} \cdot (t - 10)\right\}\right) & \text{si} \quad 10 \le t < 70 \\ 0.06 & \text{si} \quad 70 \le t \end{cases}$$

(por ejemplo) (10)

$$q_{b,o}(t) = q_{b,i}\left(t - t_{res}(t)\right) \tag{11}$$

$t_{res}(t)$ es el tiempo de residencia de las burbujas en el agua, mientras suben, en [s]:

$$t_{res}(t) = \frac{h(t)}{v_b} \tag{12}$$

$v_b(t)$ es la velocidad con que suben las burbujas, en [m s^{-1}]:

$$v_b = 0.24 \quad \text{(por ejemplo)} \tag{13}$$

BY NC ND

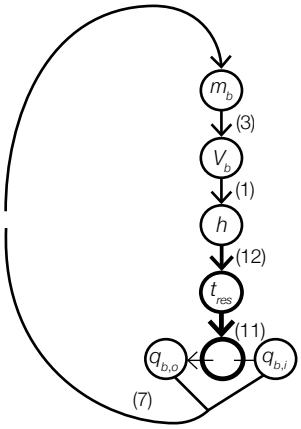


Fig. 3: Estructura causal (si ignoramos las variables que no evolucionan y si, al despejar una variable en el lado izquierdo de una fórmula, pretendemos decir que la variable aludida en ese lado depende de las aludidas en el derecho)

La estructura causal es dudable pues, aunque (2), (4), (5), (6), (8), (9) y (13) no contienen ninguna variable que evoluciona: (10) contiene 1; (1), (3) y (12) contienen 2 cada una; (7) y (11), 3; y, por tanto, despejando una de esas variables en el lado izquierdo de cada una de las 6 ecuaciones donde aparecen, se puede plantear $1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^2$ (=72) sistemas de ecuaciones distintos pero equivalentes algebraicamente a (1)-(13).

Pero no es cuerdo plantear que un caudal de masa a través de la frontera de un recinto depende de los otros a través de la frontera y, por derivación, de la masa en el recinto, sino que la masa depende por integración de todos los caudales.

(7) tiene la masa despejada en su lado izquierdo, como corresponde según ese argumento; por consiguiente, los 3 despejes imaginables en ella se reducen al que está planteado y, de los 72 sistemas de ecuaciones equivalentes algebraicamente a (1)-(13), los cuerdos causalmente son, a lo más, $1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^1$ (=24).

Pero no es cuerdo suponer que una variable depende de otras por dos o más dependencias diferentes.

De los 24 sistemas de ecuaciones restantes, 23 tienen por lo menos una variable despejada en los lados izquierdos de dos ecuaciones, y no son cuerdos causalmente.

Sólo hay 1 que sí es (y con retardos en todas las dependencias mutuas): (1)-(13).

Si nos interesa la evolución de h; si queremos hacer predicciones usando la estructura causal y la aproximación de Euler con retardo dt para la integración en (7); si queremos estructurar temporalmente un método de computación para hacer las predicciones; y si preferimos dejar m_b inicial, $q_{b,i}$, m_a, ρ_b, v_b, dt y t inicial a la voluntad del usuario; entonces, podemos replantear (1)-(13) adecuadamente; pero (11) contiene un retardo que evoluciona, cuyo tratamiento desborda a este libro.

De hecho, este caso, tan inocentemente parecido a los iniciales, sirve para advertir que los retardos no deben tomarse demasiado a la ligera.

Por lo demás, el retardo evoluciona aquí a causa de una distancia que evoluciona y una velocidad que no; y es fácil hallar retardos de la misma especie, entre otros casos, cuando se habla de fuerzas "a distancia" con velocidad finita y constante.

Insistamos, pues, en la advertencia, saltemos tanto el replanteamiento de ecua-

CC BY NC ND

ciones como el dibujo de la estructura temporal del método de computación, y digamos sólo que un método de computación (con los datos originales, *dt*=0.1 y algunos detalles adicionales) graficó la figura 4.

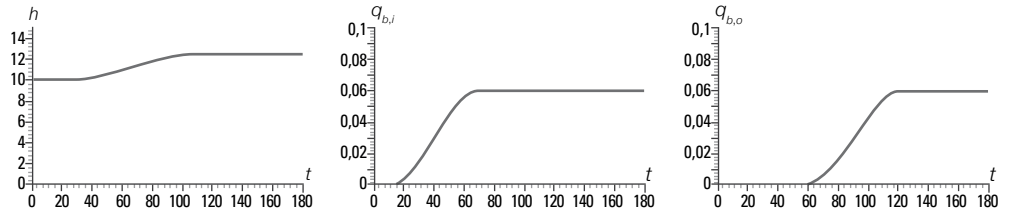


Fig. 4: Predicciones

Apéndice acerca de ecuaciones diferenciales

Aprovechando el carácter de (7) y la estructura causal, podemos plantear una ecuación diferencial retardada para la masa con el solo aburrimiento de derivar e insertar reemplazos directos. De hecho, derivando (7) e insertando (11), (12), (1) y (3):

$$\frac{dm_b(t)}{dt} = q_{b,i}(t) - q_{b,i}\left(t - \frac{V_a + \frac{m_b(t)}{\rho_b}}{A \cdot v_b}\right) \qquad \text{(a1)}$$

Si nos interesa la evolución del nivel de la columna de agua y burbujas dentro del estanque, aceptando (a1), considerando (1) e insertando (3):

$$h(t) = \frac{V_a + \frac{m_b(t)}{\rho_b}}{A} \qquad \text{(a2)}$$

Ya basta.

CC BY NC ND

84.0
RECUENTO DE VARIABLES

Desde la sección 3 y hasta esta 84, el libro presente invoca diversas variables, que evolucionan o no. Tales variables son de las especies sugeridas y dimensionadas a continuación:

1. *aceleraciones*, en [m s^{-2}];
2. *ángulos* (incluyendo posiciones angulares), en [rad];
3. *áreas*, en [m^2];
4. *bienestares económicos*, en [$];
5. *calores específicos*, en [J kg^{-1} K^{-1}] (=[m^2 s^{-2} K^{-1}]);
6. *caudales de masas*, en [kg s^{-1}];
7. *coeficientes de elasticidades*, en [N m^{-1}] (=[kg s^{-2}]);
8. *coeficientes de roces*, en [N m^{-1} s] (=[kg s^{-1}] como para los caudales de masas);
9. *coeficientes de roces angulares*, en [N m rad^{-1} s] (=[kg m^2 s^{-1} rad);
10. *concentraciones de masas* (incluyendo densidades), en [kg m^{-3}];
11. *concentraciones de caudales de masas*, en [kg s^{-1} m^{-2}] (=[kg m^{-2} s^{-1}]);
12. *concentraciones de momenta*, en [N s m^{-3}] (=[kg m^{-2} s^{-1}]);
13. *concentraciones de fuerzas* (incluyendo esfuerzos y presiones), en [N m^{-2}] (=[kg m^{-1} s^{-2}]);
14. *concentraciones de energías*, en [J m^{-3}] (=[kg m^{-1} s^{-2}]);
15. *concentraciones de potencias*, en [W m^{-2}] (=[kg s^{-3}]);
16. *concentraciones molares*, en [(mol de moléculas) m^{-3}] (≈[mol m^{-3}]);
17. *conductancias térmicas*, en [W K^{-1}] (=[kg m^2 s^{-3} K^{-1}]);
18. *conductividades térmicas*, en [W m^{-1} K^{-1}] (=[kg m s^{-3} K^{-1}]);
19. *cuocientes de crecimiento de dineros según crecimiento de expedientes* (incluyendo cuocientes de crecimiento de cansancios traducidos a dineros según crecimiento de expedientes), en [$ $expediente^{-1}$];
20. *difusividades*, en [kg s^{-1} m^{-1}] (=[kg m^{-1} s^{-1}];
21. *distancias* (incluyendo alturas, anchos, brazos, diámetros, espesores, longitudes, niveles, posiciones, profundidades y radios), en [m];
22. *energías*, en [J] (=[kg m^2 s^{-2}]);
23. *energías específicas*, en [J kg^{-1}] (=[m^2 s^{-2}]);
24. *existencias de expedientes*, en [expediente];
25. *existencias de mercaderías*, en [unidad] o en [decena de miles de árboles];
26. *flujos de dineros* (incluyendo bonos, flujos de caja y salarios), en [$ s^{-1}], en [$ mes^{-1}] o en [$ $año^{-1}$];
27. *flujos de expedientes*, en [expediente mes^{-1}];
28. *flujos de mercaderías*, en [unidad s^{-1}] o en [(decena de miles de árboles) $día^{-1}$];
29. *flujos de personas* (incluyendo empleados, estudiantes, postulantes y titulados), en [persona s^{-1}] o en [persona $año^{-1}$];
30. *flujos individuales de dineros*, (incluyendo aranceles individuales, aportes fiscales individuales, gastos individuales y salarios individuales), en [$ s^{-1} $persona^{-1}$] o en [$ $año^{-1}$ $persona^{-1}$];
31. *fracciones* (incluyendo deformaciones, humedades, márgenes de comercia-

CC BY NC ND

lización y restos), en [kg kg^{-1}] (=en tanto por uno);
32. *frecuencias*, en [s^{-1}];
33. *fuerzas*, en [N] (=[kg m s^{-2}]);
34. *masas*, en [kg];
35. *módulos de Young*, en [N m^{-2}] (=[kg m^{-1} s^{-2}]);
36. *módulos de Poisson*, en tanto por uno (como para las fracciones);
37. *momenta*, en [N s] (=[kg m s^{-1}]);
38. *momenta angulares*, en [N m s] (=[kg m^2 s^{-1}]);
39. *momenta de inercia*, en [N m rad^{-1} s^2] (=[kg m^2 rad^{-1}]);
40. *números calendarios correspondientes a meses*, en tanto por doce;
41. *números de moléculas*, en [molécula] o en [mol de moléculas] (≈[mol]);
42. *números de personas* (incluyendo empleados, estudiantes, ocupantes, postulantes y subalternos), en [persona];
43. *números de Reynolds*, sin unidades;
44. *poderes caloríficos*, en [J kg^{-1}] (=[m^2 s^{-2}], como para las energías específicas);
45. *potencias*, en [W] (=[kg m^2 s^{-3}]);
46. *precios unitarios de mercaderías*, en [$ $unidad^{-1}$] o en [(decena de millones de $) (decena de miles de árboles)$^{-1}$];
47. *reservas de dineros*, en [$];
48. *tasas de crecimiento de aceleraciones*, en [m s^{-3}];
49. *temperaturas*, en [K];
50. *tiempos* (incluyendo períodos, retardos y tiempos de residencia), en [s] o en [mes];
51. *torques*, en [N m] (=[kg m^2 s^{-2}], como para las energías);
52. *totales de dineros*, en [decena de millones de $];
53. *totales de mercaderías*, en [decena de miles de árboles];
54. *velocidades*, en [m s^{-1}];
55. *velocidades angulares*, en [rad s^{-1}];
56. *viscosidades cinemáticas*, en [m^2 s^{-1}];
57. *viscosidades dinámicas*, en [kg m^{-1} s^{-1}] (como para las difusividades);
58. *voltajes*, en [V] (=[J $coul^{-1}$] =[kg m^2 s^{-2} $coul^{-1}$]);
59. *volúmenes*, en [m^3];
60. *coeficientes a granel*, en [$kg^{1-(\varepsilon r1+...\varepsilon rM)}$ $m^{3\cdot(\varepsilon r1+...\varepsilon rM)}$ s^{-1}], en [kg^{-1} m^6 s^{-1}], en [J kg N^{-1} m^2] (=[kg^{-1} m^3]), en [kg kg^{-1}] (=en tanto por uno), en [m^{-1}], en [s^{-1}], en [s], en [N m V^{-1}] (=[coul]), en [m], en [m s^{-1}], en [kg s^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$] (=[m s $K^{1/2}$]), en [K], en [J kg^{-1} K^{-1}] (=[m^2 s^{-2} K^{-1}]), en [m^2 s^{-2}], en [m^3 s^{-1}], en [$kg^{1/2}$ $m^{-1/2}$], en [$kg^{1/2}$ $m^{3/2}$], en [kg^2 m^{-4} s^{-1}], en [kg s^{-1} m^{-2}] (=[kg m^{-2} s^{-1}]), en [kg s^{-1} m^{-1}] (=[kg m^{-1} s^{-1}]), en [N m^{-2} rad^{-2} s^2] (=[kg rad^{-2} m^{-1}]), en [kg $m^{-1/2}$ s^{-1}], en [W m^{-2} K^{-1}] (=[kg s^{-3} K^{-1}]), en [N m^{-1}] (=[kg s^{-2}]), en [N m^{-1} s] (=[kg s^{-1}]), en [N] (=[kg m s^{-2}]), en [N rad^{-1} s] (=[kg m s^{-1} rad^{-1}]), en [W K^{-1} (=[kg m^2 s^{-3} K^{-1}]), en [N m rad^{-1} s] (=[kg m^2 s^{-1} rad^{-1}]), en [(decena de miles de árboles) $día^{-1}$], en [(decena de miles de árboles)^2 $día^{-1}$ (decena de millones de $)$^{-1}$], en [$$^{-1}$ s], en [$$^{-1}$ s^2], en [unidad^2 $s^{-1}$$^{-1}$] (=[$$^{-1}$ unidad^2 s^{-1}]), en [unidad s^{-1}], en [persona s^{-1}], en [persona], en [persona^2 s^{-1}], en [$ mes^{-1}], en [$ s^{-2} $persona^{-2}$], en [$ $unidad^{-2}$ s], en [$ $unidad^{-2}$], en [$ $unidad^{-1}$], o sin especificar.

Además de la extravagancia de algunos nombres, es notable la profusión de variables. Y quizás debamos agregar a ésta la constante de Boltzmann, en [J K^{-1}] (=[kg m^2 s^{-2} K^{-1}]), y la constante gravitacional, en [N m^2 kg^{-2}] (=[kg^{-1} m^3 s^{-2}]), apelando a que no son completamente constantes: sus "valores numéricos" varían si se varían sus "unidades".

Eso merece un comentario.

CC BY NC ND

En la Inglaterra de la segunda mitad del siglo 19, James Clerk Maxwell (1831-1879) estableció literalmente lo que sigue. "Cada expresión de una Cantidad consiste de dos factores o componentes. Uno de estos es el nombre de alguna cantidad conocida de la misma especie que la cantidad por expresar, la cual se toma como un estándar de referencia. El otro componente es el número de veces que el estándar debe tomarse para lograr la cantidad requerida. La cantidad estándar se llama técnicamente Unidad, y el número se llama Valor Numérico de la cantidad. Debe haber tantas unidades diferentes como especies diferentes de cantidades por medir, pero en todas las ciencias dinámicas es posible definir estas unidades en términos de las tres unidades fundamentales de Longitud, Tiempo y Masa". "Podemos encontrar varias unidades de la misma especie fundadas en consideraciones independientes". "Es de la mayor importancia usar unidades pertenecientes a un sistema definido adecuadamente, y conocer las relaciones entre estas unidades y las fundamentales. Esto se hace de la manera más conveniente estableciendo las *dimensiones* de cada unidad en términos de las tres fundamentales. Cuando una unidad dada varía como la potencia n-ésima de una de estas unidades, se dice que es de *n dimensiones* respecto a esa unidad. Por ejemplo, la unidad científica de volumen siempre es el cubo cuyo lado es la unidad de longitud. Si la unidad de longitud varía, la unidad de volumen variará como su potencia tercera, y se dice que la unidad de volumen es de tres dimensiones con respecto a la unidad de longitud. Un conocimiento de las dimensiones de las unidades proporciona una prueba que debe aplicarse a las ecuaciones resultantes de cualquier investigación extensa. Las dimensiones de cada término de una de esas ecuaciones, con respecto a las tres unidades fundamentales, deben ser las mismas. Si no, la ecuación es absurda, y contiene algún error, ya que su interpretación sería diferente según el sistema de unidades arbitrario que adoptemos". "(La teoría de las dimensiones fue establecida inicialmente por Fourier)". "El estándar de longitud para propósitos científicos en este país es un pie, que es la tercera parte de la yarda estándar preservada en las Cámaras Exchequer. En Francia, y otras naciones que han adoptado el sistema métrico", "es el metro. El metro es, teóricamente la diez millonésima parte de un meridiano de la tierra medido desde el polo hasta el ecuador, pero, prácticamente, es la longitud de un estándar preservado en Paris, que fue construido" "para corresponder, cuando esté a la temperatura del hielo fundente, con el valor de la longitud precedente". "Llamaremos a la unidad de longitud [L]". "La unidad estándar de tiempo en todas las naciones civilizadas se deduce del" "período de rotación de la tierra," que "puede ser establecido con gran exactitud mediante las observaciones habituales de los astrónomos". "El día solar promedio puede ser deducido de este por nuestro conocimiento de la longitud" (¿?) "del año" y "la unidad de tiempo" "es un segundo del tiempo solar promedio". "Llamaremos a la unidad" "de tiempo [T]". "La unidad estándar de masa es en este país la libra avoirdupois preservada en las Cámaras Exchequer". "En el sistema métrico es el gramo, que es, teóricamente, la masa de un centímetro cúbico de agua destilada con temperatura y presión estándares, pero, prácticamente, es la milésima parte del kilógramo estándar preservado en París". "Representaremos a la unidad" "de masa mediante el símbolo [M]". "La unidad de Velocidad es aquella velocidad con que la unidad de longitud es descrita en la unidad de tiempo. Sus dimensiones son [LT^{-1}]". "La unidad de aceleración es aquella aceleración con que la velocidad aumenta una unidad en la unidad de tiempo. Sus dimensiones son [LT^{-2}]". "La unidad de Densidad es la densidad de una sustancia que contiene la unidad de masa en la unidad de volumen. Sus dimensiones son [ML^{-3}]". "La unidad de Momentum es el momentum de la unidad de masa moviéndose con la unidad de velocidad. Sus dimensiones son

BY NC ND

[MLT^{-1}]". "La unidad de Fuerza es la fuerza que produce la unidad de momentum en la unidad de tiempo. Sus dimensiones son [MLT^{-2}]". "La unidad de Trabajo es el trabajo hecho por la unidad de fuerza actuando a lo largo de la unidad de longitud en su misma dirección. Sus dimensiones son [ML^2T^{-2}]". "La Energía de un sistema, al ser su capacidad de realizar trabajo, se mide por el trabajo que el sistema es capaz de realizar mediante el gasto de toda su energía".

En el libro presente nos hemos apegado a lo establecido por Maxwell, aunque: escribiendo particularmente la "unidad" de las masas como [kg], la de las longitudes como [m] y la de los tiempos como [s], [día], [mes] o [año]; añadiendo una "unidad" de los ángulos como [rad], otra de las temperaturas como [K], otra de los números de moléculas como [mol de moléculas] (¿≈[mol]?), otra de los números de personas como [persona], otra de los números de expedientes como [expediente], otra de las reservas de dineros como [$] o [decena de millones de $], y otra de las existencias de mercaderías como ¿[unidad]? o [decena de miles de árboles]; y a veces quedándonos vacíos (sin unidades, en tanto por uno o en tanto por doce).

Evidentemente, hemos usado "unidades" diferentes para "Cantidades" de una misma especie (por ejemplo, para los tiempos); pero, habiendo abundado poco en eso, deliberadamente, podemos considerarlo poco preocupante. Lo que sí resulta preocupante, es que también hemos empleado una misma "unidad" (atendiendo a sus "dimensiones") para "Cantidades" de especies diferentes (por ejemplo, para las energías y los torques), y que nos hemos quedado sin ninguna "unidad" para "Cantidades" de algunas especies diversas (por ejemplo, para los módulos de Poisson y los números de Reynolds).

No tenemos "tantas unidades diferentes como especies diferentes de cantidades", y debemos meditar acaso enmendarnos al respecto o desapegarnos un poco de lo establecido por Maxwell.

Optemos por lo más firme: lo segundo. La avería no parece nuestra.

Por cierto, la propuesta que Maxwell atribuyó a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) acerca de que, si las "dimensiones" de cada término de una ecuación, con respecto a las "unidades fundamentales", no son las mismas, "la ecuación es absurda, y contiene algún error, ya que su interpretación sería diferente según el sistema de unidades arbitrario que adoptemos…", otorga a la arbitrariedad un rol de árbitro y la redime en parte de su mala reputación. Eso es interesante.

Además, la insinuación de que una unidad puede variar y la moción de que "si la unidad de longitud varía, la unidad de volumen variará como su potencia tercera, y se dice que la unidad de volumen es de tres dimensiones con respecto a la unidad de longitud", nos respalda en nuestro párrafo acerca de que los "valores numéricos" de la constante de Boltzmann y de la constante gravitacional varían si se varían sus "unidades".

Por otro lado, la concepción de las variaciones y "dimensiones" de las "unidades" asocia a éstas con las variables y las operaciones del Álgebra, explicando la apetencia por anotar [L] (con L como variable), [L^3] (con L^3 como resultado de elevar L a 3), [LT^{-1}] (como resultado de elevar T a -1 y multiplicar tácitamente aquello por L), etcétera, y, luego, la apetencia por particularizar anotando [m], [m^3], [$m\ s^{-1}$], etcétera.

Pero la elevación a potencia, la multiplicación y las otras operaciones algebraicas semejantes son para variables numéricas, y las "unidades" de las "Cantidades" no son números: son un pedazo de un meridiano, una porción de una rotación astronómica, y otras cosas parecidas.

BY NC ND

Estamos ante otra avería que podríamos alegar ajena (escamoteando que la hemos acogido): un abuso de notación.

Y aún queda otra.

En la Inglaterra de la segunda mitad del siglo 19, Maxwell se tomó la molestia de empezar escribiendo "cada expresión de una Cantidad" en vez de escribir simplemente "cada Cantidad". Con eso sugirió una distinción que, en la Inglaterra de fines del siglo 17, Newton se tomó la molestia de retirar.

Newton empezó a escribir sus claves respecto a los momenta y las fuerzas, con un par de definiciones; y ambas definiciones, con afirmaciones desconcertantes: una aseverando que "la cantidad de materia es la medida de sí misma" y la otra remachando que "la cantidad de movimiento es la medida de sí misma".

Volviendo muy poco atrás, resulta bastante ostensible, por ejemplo, que un pedazo de meridiano no es un número (o "valor numérico" variante según la "unidad" de distancia pese a que el pedazo no varía), que tampoco es la medida (o "expresión" con "valor numérico" y "unidad") de ese pedazo, que estamos ante una ambigüedad dura, que el escrito de Newton elude esa ambigüedad, que el de Maxwell la enfrenta (sin resolverla), y que este la truca con frases como "distancia, en [m]".

El libro presente pone variables numéricas en ecuaciones, pero pretende (tramposamente) que hay algo más; y apoya en ese algo la causalidad a la que alude con tanta majadería.

De hecho, si declaramos que las variables numéricas son de los "valores numéricos" y éstos de las medidas, nos ponemos en aprietos pues tales variables numéricas nos resultan de medir y se nos aparecen, por ello, como meramente dependientes, nunca como dominantes.

Queden estas incongruencias, ambigüedades y averías en suspenso, en un sueño de perseverancia futura, porque se agota el tiempo disponible.

CC BY NC ND

85.0
RECUENTO DE DEPENDENCIAS

Desde la sección 3 y hasta esta 85, el libro presente invoca diversas variables que evolucionan, declarándolas dependientes de otras (tras una prestidigitación con las mediciones). Las declaraciones de dependencias son como sigue.

1. Las *aceleraciones* dependen de: *velocidades* (en la sección 29).

2. Los *ángulos* dependen de: *otros ángulos* (en la sección 69); o *distancias* (en la sección 11); o *velocidades angulares* (en las secciones 41, 42, 43 y 69).

3. Las *áreas* dependen de: distancias (en la sección 17). Por otra parte, según 5), 18), 28), 29), 30) y 35) de esta sección 85, dependen implícitamente de: distancias (en las secciones 16, 44, 47, 48, 50, 51, 52, 59, 62, 63 y 66). En resumen, dependen de: *distancias*.

4. Los *bienestares económicos* dependen de: *coeficientes, flujos de dineros, flujos de mercaderías*, y *reservas de dineros* (en las secciones 78 y 79).

5. Los *caudales de masas* dependen de: áreas, y coeficientes (en la sección 17); o áreas, coeficientes de pasos de masas en [m s^{-1}], concentraciones de masas implícitas -dependientes de masas y volúmenes-, y fracciones (en la sección 64); o áreas, concentraciones de masas, y velocidades (en las secciones 49, 54 y 70); o áreas, concentraciones de masas, y velocidades implícitas -dependientes de distancias y velocidades angulares- (en la sección 53); o áreas implícitas -dependientes de distancias-, concentraciones de masas, y velocidades (en las secciones 44 y 48); o áreas implícitas -dependientes de distancias-, concentraciones de masas, y velocidades implícitas -dependientes de distancias y velocidades angulares (en las secciones 50, 51 y 52); u otros caudales de masas (en las secciones 15, 24, 46 y 54); u otros caudales de masas, y otros caudales de masas implícitos -dependientes de distancias, masas y velocidades- (en la sección 54); u otros caudales de masas, coeficientes, y fracciones implícitas -dependientes de masas- (en la sección 24); u otros caudales de masas, y fracciones (en las secciones 12, 21, 22, 23, 24, 63 y 65); u otros caudales de masas, y fracciones implícitas -dependientes de masas- (en las secciones 13, 22, 23, 24, 62 y 64); u otros caudales de masas, y tiempos (en la sección 83); u otros caudales de masas implícitos -dependientes de áreas implícitas a su vez -dependientes de distancias-, concentraciones de masas y velocidades-, y masas (en la sección 47); o coeficientes, y concentraciones de fuerzas (en las secciones 63, 64 y 67); o coeficientes, coeficientes de resbalamientos en tanto por uno, y concentraciones de fuerzas (en la sección 68); o coeficientes, concentraciones de fuerzas, y otras concentraciones de fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas y distancias- (en la sección 63); o coeficientes, y concentraciones de fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas y distancias- (en la sección 62); o coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$], concentraciones de fuerzas, y temperaturas (en la sección 69); o coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} $m^{-1/2}$], y distancias (en las secciones 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 59); o coeficientes, fracciones, y masas (en la sección 23); o coeficientes en [s^{-1}], y masas (en las secciones 21, 22, 23 y 24); o coeficientes, masas, y volúmenes (en las secciones 18, 19 y 20); o distancias (en la sección 11); o distancias, masas, y velocidades (en la sección 54); o masas (en la sección 15); o masas, y tiempos

CC BY NC ND

(en la sección 45); o potencias, y temperaturas (en la sección 65). Por otra parte, según este mismo 5) y 29) de esta sección 85, dependen implícitamente de: áreas, coeficientes, distancias, y fracciones (en la sección 16); o áreas, concentraciones de masas, y velocidades (en la sección 47); u otros caudales de masas, y fracciones (en las secciones 14, 16, 18, 19, 20, 23 y 69); o coeficientes en [s^{-1}], y masas (en la sección 69); o distancias, masas, y velocidades (en la sección 54). En resumen, dependen de: *áreas*, y *coeficientes*; o *áreas, coeficientes de pasos de masas en [m s^{-1}], otros coeficientes, concentraciones de masas,* y *fracciones*; o *áreas, coeficientes, distancias*, y *fracciones*; o *áreas, concentraciones de masas*, y *velocidades*; u *otros caudales de masas*; u *otros caudales de masas, coeficientes*, y *fracciones*; u *otros caudales de masas*, y *fracciones*; u *otros caudales de masas*, y *masas*; u *otros caudales de masas*, y *tiempos*; o *coeficientes, coeficientes de resbalamientos en tanto por uno*, y *concentraciones de fuerzas;* o *coeficientes*, y *concentraciones de fuerzas*; o *coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$], concentraciones de fuerzas*, y *temperaturas*; o *coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} $m^{-1/2}$]*, y *distancias*; o *coeficientes, fracciones*, y *masas*; o *coeficientes en [s^{-1}]*, y *masas*; o *coeficientes*, *masas*, y *volúmenes*; o *distancias*; o *distancias, masas*, y *velocidades*; o *masas*; o *masas*, y *tiempos*; o *potencias*, y *temperaturas*.

6. Los *coeficientes de pasos de energías en [W m^{-2} K^{-1}]* dependen de: *otros coeficientes*, y *masas* (en la sección 64).

7. Los *coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} $m^{-1/2}$]* dependen de: ángulos, y otros coeficientes (en la sección 11); u otros coeficientes, y distancias (en la sección 10); u otros coeficientes, y fracciones implícitas -dependientes de masas- (en las secciones 13 y 14). En resumen, dependen de: *ángulos*, y *otros coeficientes*; u *otros coeficientes*, y *distancias*; u *otros coeficientes*, y *fracciones*.

8. Los *coeficientes de pasos de masas en [kg s^{-1} N^{-1} m^2 $K^{1/2}$]* dependen de: *ángulos* (en la sección 69).

9. Los *coeficientes de pasos de masas en [m s^{-1}]* dependen de: otros coeficientes, y fracciones implícitas -dependientes de masas- (en la sección 64). En resumen, dependen de: *otros coeficientes*, y *fracciones*.

10. Los *coeficientes de resbalamientos en tanto por uno* dependen de: *concentraciones de fuerzas* (en la sección 68).

11. Los *coeficientes en [s^{-1}]* dependen de: *ángulos* (en la sección 69); u *otros coeficientes*, y *masas* (en las secciones 21, 22 y 24).

12. Las *concentraciones de fuerzas* dependen de: coeficientes, energías específicas, energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas-, volúmenes específicos, y volúmenes específicos implícitos -dependientes de volúmenes y masas- (en las secciones 66, 67 y 69); o coeficientes, energías específicas, y volúmenes específicos (en la sección 63); o coeficientes, y velocidades angulares (en la sección 68); u otras concentraciones de fuerzas (en la sección 68); u otras concentraciones de fuerzas, y otras concentraciones de fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas, y distancias- (en la sección 28); o energías, y volúmenes que, por estar en un cuociente precedido por coeficientes evaluados, corresponden a coeficientes, energías específicas, y volúmenes específicos (en la sección 68); o masas, temperaturas, y volúmenes (en las secciones 47 y 64). Por otra parte, según 5), este mismo 12) y 30) de esta sección 85, dependen implícitamente de: aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas, y distancias (en las secciones 28, 62 y 63); o concentraciones de masas, y distancias (en la sección **70.** En resumen, dependen de: *aceleraciones gravitacionales, concentraciones*

CC BY NC ND

de masas, y *distancias*; o *coeficientes, energías específicas*, y *volúmenes específicos*; o *coeficientes*, y *velocidades angulares*; u *otras concentraciones de fuerzas*; o *concentraciones de masas*, y *distancias*; o *masas, temperaturas,* y *volúmenes*.

13. Las *concentraciones de masas* dependen de: otras concentraciones de masas, y otras concentraciones de masas implícitas -dependientes de masas, y volúmenes implícitos a su vez -dependientes de distancias- - (en las secciones 51 y 52); o masas, y volúmenes (en la sección 47); o masas, y volúmenes implícitos -dependientes de áreas y distancias- (en las secciones 49, 53 y 70). Por otra parte, según 5) y este mismo 13) de esta sección 85, dependen implícitamente de: masas, y volúmenes (en la sección 64) En resumen, dependen de: *otras concentraciones de masas*; o *masas*, y *volúmenes*.

14. Las *conductancias térmicas* dependen de: conductividades térmicas, distancias, y distancias implícitas -dependientes de concentraciones de masas, otras distancias y masas- (en la sección 66). Por otra parte, según 35) de esta sección 85, dependen implícitamente de: conductividades térmicas, y distancias (en las secciones 58, 59, 62, 63 y 64). En resumen, dependen de: *conductividades térmicas*, y *distancias*.

15. Las *conductividades térmicas* dependen de: *temperaturas* (en la sección 70).

16. Los *cuocientes de crecimiento de dineros según crecimiento de expedientes* dependen de: *coeficientes, flujos de expedientes*, y *flujos individuales de dineros* (en la sección 81).

17. Las *distancias* dependen de: ángulos, y otras distancias (en las secciones 41, 43 y 69); o áreas, y volúmenes (en la sección 83); o coeficientes, y volúmenes (en la sección 8); u otras distancias (en las secciones 34, 35, 39, 40 y 52); u otras distancias, y volúmenes (en las secciones 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 48, 59 y 63); u otras distancias, y volúmenes implícitos -dependientes de concentraciones de masas, y masas (en las secciones 50, 51, 52 y 62); o velocidades (en las secciones 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 45, 46, 47, 48, 52, 53, 66 y 67); o volúmenes (en las secciones 7, 17 y 28). Por otra parte, según 14), 30), 31) y 47) de esta sección 85, dependen implícitamente de: ángulos, y otras distancias (en las secciones 41 y 43); o concentraciones de masas, otras distancias, y masas (en la sección 66); u otras distancias (en las secciones 52 y 53). En resumen, dependen de: *ángulos*, y *otras distancias*; o *áreas*, y *volúmenes*; o *coeficientes*, y *volúmenes*; o *concentraciones de masas, otras distancias*, y *masas*; u *otras distancias*; u *otras distancias*, y *volúmenes*; o *velocidades*; o *volúmenes*.

18. Las *energías* dependen de: potencias (en las secciones 55, 56, 58, 59, 62, 63, 64, 65, 67, 68 y 69); o potencias, y potencias implícitas -dependientes de caudales de masas, y energías específicas implícitas -dependientes de otras energías y masas- - (en la sección 57); o potencias, potencias implícitas -dependientes de áreas, conductividades térmicas, distancias, y temperaturas-, y otras potencias implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias- y potencias- (en la sección 70); o potencias implícitas -dependientes de caudales de masas, otras energías y masas-, y otras potencias implícitas -dependientes de conductancias térmicas, frecuencias y temperaturas- (en la sección 57); o potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas- y otras potencias implícitas -dependientes de áreas implícitas a su vez -dependientes de distancias-, conductividades térmicas, distancias, y temperaturas- (en las secciones 60 y 61); o potencias implícitas

BY NC ND

-dependientes de conductancias térmicas y temperaturas-, y otras potencias implícitas -dependientes de áreas implícitas a su vez -dependientes de distancias-, concentración de fuerzas, velocidades y velocidades implícitas a su vez -dependientes de áreas implícitas una vez más -dependientes de distancias-, caudales de masas y concentraciones de masas- -(en la sección 66). En resumen, dependen de: *potencias*.

19. Las *energías específicas* dependen de: energías, y masas (en las secciones 59, 60, 61 y 63). Por otra parte, según 12), 35) y 39) de esta sección 85, dependen implícitamente de: energías, y masas (en las secciones 55, 56, 57, 58, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69 y 70). En resumen, dependen de: *energías*, y *masas*.

20. Las *existencias de expedientes* dependen de: *flujos de expedientes* (en la sección 81).

21. Las *existencias de mercaderías* dependen de: *flujos de mercaderías* (en las secciones 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79 y 80).

22. Los *flujos de dineros* dependen de: coeficientes, y números de personas (en la sección 82); o coeficientes, y reservas de dineros (en la sección 81); o flujos de mercaderías, y precios unitarios (en las secciones 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79); o flujos individuales de dineros, y números de personas (en las secciones 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79). Por otro lado, según 42) de esta sección 85, dependen implícitamente de flujos de: mercaderías, y precios unitarios de mercaderías- (en la sección 80). En resumen, dependen de: *coeficientes*, y *números de personas*; o *coeficientes*, y *reservas de dineros*; o *flujos de mercaderías*, y *precios unitarios de mercaderías*; o *flujos individuales de dineros*, y *números de personas*.

23. Los *flujos de expedientes* dependen de: *coeficientes*, y *cuocientes de crecimiento de dineros según crecimiento de expedientes* (en la sección 81); u *otros flujos de expedientes*, y *existencias de expedientes* (en la sección 81).

24. Los *flujos de mercaderías* dependen de: *bienestares económicos*, y *coeficientes* (en las secciones 78 y 79); o *coeficientes*, y *números de personas* (en las secciones 74, 75, 76, 77, 78 y 79); o *coeficientes*, y *precios unitarios de mercaderías* (en las secciones 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77 y 80); o *existencias de mercaderías* (en la sección 80).

25. Los *flujos de personas* dependen de: *coeficientes, flujos individuales de dineros*, y *números de personas* (en las secciones 73, 74, 75, 76, 77 y 78); u *otros flujos de personas* (en la sección 82); o *fracciones*, y *otros flujos de personas* (en la sección 82); o *números de personas* (en la sección 82).

26. Los *flujos individuales de dineros* dependen de: coeficientes, y números de personas (en las secciones 73, 74, 75, 76, 77 y 78); o flujos de dineros, y fracciones implícitas -dependientes de flujos de expedientes- (en la sección 81); u otros flujos individuales de dineros (en la sección 81). En resumen, dependen de: *coeficientes*, y *números de personas*; o *flujos de dineros*, y *fracciones*; u *otros flujos individuales de dineros.*

27. Las *fracciones* dependen de: coeficientes, y otras fracciones implícitas -dependientes de flujos de personas- (en la sección 82); o coeficientes, y precios unitarios de mercaderías (en las secciones 77, 78 y 79); u otras fracciones, y temperaturas (en la sección 65); o masas (en las secciones 12, 16, 62, 64 y 65); o temperaturas (en la sección 64). Por otra parte, según 5), 7), 9), 18), 26), este mismo 27), 29), 30), 31) y 35) de esta sección 85, dependen implícitamente de: calores específicos, y masas (en la sección 62); o distancias (en las secciones 39, 40, 41, 43, 52, 53 y 70); o flujos de expedientes (en la sección 81); o flujos de personas (en la sección 82); o masas (en las secciones 13, 14, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 62, 64 y 69);. En resumen, dependen de: *calores específicos*, y *masas*;

CC BY NC ND

o *coeficientes*, y *otras fracciones*; o *coeficientes*, y *precios unitarios de mercaderías*; o *distancias*; o *flujos de expedientes*; o *flujos de personas*; u *otras fracciones*, y *temperaturas*; o *masas*; o *temperaturas*.

28. Las *fuerzas* dependen de: aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas, y volúmenes (en la sección 28); o aceleraciones gravitacionales, y masas (en las secciones 47 y 48); o ángulos, coeficientes, y distancias (en la sección 42); o ángulos, distancias, y otras fuerzas (en la sección 41); o áreas, coeficientes, y concentraciones de masas (en las secciones 49 y 53); o áreas, coeficientes, concentraciones de masas, distancias, y velocidades (en la sección 49); o áreas, y concentraciones de fuerzas (en las secciones 67 y 69); o áreas, concentraciones de masas, y temperaturas (en la sección 70); o áreas, distancias, velocidades, y viscosidades dinámicas (en la sección 70); o áreas implícitas -dependientes de distancias-, coeficientes, y concentraciones de masas (en las secciones 51 y 52); o caudales de masas, y velocidades (en las secciones 44, 45, 46, 47, 48, 49 y 70); o caudales de masas, y velocidades implícitas -dependientes de distancias y velocidades angulares- (en la sección 53); o coeficientes, y distancias (en las secciones 26, 30, 31, 32, 37, 39, 40, 41, 43, 48, 52 y 53); o coeficientes, y velocidades (en las secciones 27, 29, 30, 31, 32, 33, 38, 45, 48, 52, 53 y 67); o concentraciones de masas, distancias, números de Reynolds, y velocidades (en la sección 28); o distancias, y masas (en las secciones 34, 35, 36 y 46); o distancias, y torques (en la sección 38). Por otra parte, según 30) y 31) de esta sección 85, dependen implícitamente de: aceleraciones gravitacionales, ángulos, y masas (en la sección 54); o aceleraciones gravitacionales, y masas (en las secciones 33, 39 y 40); o ángulos, caudales de masas, y velocidades (en la sección 54); o áreas, y concentraciones de fuerzas (en la sección 66, 68 y 70); o caudales de masas, y velocidades (en las secciones 52 y 54); o coeficientes, y velocidades (en la sección 54); o distancias, y torques (en las secciones 39, 40 y 54); o fracciones, y otras fuerzas (en las secciones 39, 40, 41, 52 y 53); o masas (en las secciones 66 y 70). En resumen, dependen de: *aceleraciones gravitacionales, ángulos*, y *masas*; o *aceleraciones gravitacionales, concentraciones de masas*, y *volúmenes*; o *aceleraciones gravitacionales*, y *masas*; o *ángulos, caudales de masas*, y *velocidades*; o *ángulos, coeficientes*, y *distancias*; o *ángulos, distancias*, y *otras fuerzas*; o *áreas, coeficientes*, y *concentraciones de masas*; o *áreas, coeficientes, concentraciones de masas, distancias*, y *velocidades*; o *áreas*, y *concentraciones de fuerzas*; o *áreas, concentraciones de masas*, y *temperaturas*; o *áreas, distancias, velocidades*, y *viscosidades dinámicas*; o *áreas, coeficientes*, y *concentraciones de masas*; o *caudales de masas*, y *velocidades*; o *coeficientes*, y *distancias*; o *coeficientes*, y *velocidades*; o *concentraciones de masas, distancias, números de Reynolds*, y *velocidades*; o *distancias*, y *masas*; o *distancias*, y *torques*; o *fracciones*, y *otras fuerzas*; o *masas*.

29. Las *masas* dependen de: caudales de masas (en las secciones 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70 y 83); o caudales de masas, y caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas, y fracciones- (en la sección 23); o caudales de masas, y caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas, y fracciones implícitas a su vez -dependientes de masas- - (en las secciones 14 y 19); o caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas, y fracciones implícitas a su vez -dependientes de masas- - (en las secciones 18, 19 y 20); o caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas, y fracciones-, y otros caudales de masas implícitos -dependientes de áreas implícitas a su vez

CC BY NC ND

-dependientes de distancias-, coeficientes, distancias, y fracciones- (en la sección 16); o caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas y fracciones-, otros caudales de masas implícitos -dependientes de otros caudales de masas y fracciones implícitas a su vez -dependientes de masas- -, y otros caudales de masas implícitos -dependientes de coeficientes y masas- (en la sección 69); o caudales de masas, y masas (en la sección 47). En resumen, dependen de: *caudales de masas*.

30. Los *momenta* dependen de: fuerzas (en las secciones 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 44, 45, 46, 47, 48, 49 y 67); o fuerzas, y fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales y masas- (en la sección 33); o fuerzas, y fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias implícitas una vez más -dependientes de otras distancias-, y otras fuerzas- - (en la sección 53); o fuerzas, y fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias implícitas una vez más -dependientes de distancias-, otras fuerzas y otras fuerzas implícitas a su vez -dependientes de caudales de masas y velocidades implícitas una vez más -dependientes de distancias y velocidades angulares- - - -(en la sección 52); o fuerzas, fuerzas implícitas -dependientes de áreas, concentraciones de fuerzas y concentraciones de fuerzas implícitas a su vez -dependientes de concentraciones de masas y distancias- -, y otras fuerzas implícitas -dependientes de masas- (en la sección 70); o fuerzas implícitas -dependientes de áreas implícitas a su vez -dependientes de distancias- y concentraciones de fuerzas-, y otras fuerzas implícitas -dependientes de masas- (en la sección 66); o fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias- y otras fuerzas - (en las secciones 39 y 40); o fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias y distancias implícitas una vez más -dependientes de ángulos y otras distancias - - y otras fuerzas- (en la sección 41); o fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales y masas-, y otras fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias- y otras fuerzas- (en las secciones 39 y 40); o fuerzas implícitas -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias- y otras fuerzas-, y otras fuerzas implícitas -dependientes de distancias y torques- (en las secciones 39 y 40); o fuerzas implícitas -dependientes de aceleraciones gravitacionales, ángulos y masas-, otras fuerzas implícitas -dependientes de ángulos, caudales de masas y velocidades-, otras fuerzas implícitas -dependientes de caudales de masas y velocidades-, otras fuerzas implícitas -dependientes de coeficientes y velocidades-, y otras fuerzas implícitas -dependientes de distancias y torques- (en la sección 54). En resumen, dependen de: *fuerzas*.

31. Los *momenta angulares* dependen de: torques, y torques implícitos -dependientes de coeficientes y otros torques implícitos a su vez -dependientes de distancias y fuerzas implícitas una vez más -dependientes de áreas y concentraciones de fuerzas- - - (en la sección 68); o torques, y torques implícitos -dependientes de coeficientes y velocidades angulares- (en la sección 69); o torques, y torques implícitos -dependientes de distancias y fuerzas- (en las secciones 41, 42 y 53); o torques implícitos -dependientes de distancias y fuerzas-, y otros torques implícitos -dependientes de coeficientes y velocidades angulares- (en la sección 42); o torques implícitos -dependientes de fracciones implícitas a su vez -dependientes de distancias implícitas una vez más -dependientes de ángulos y otras distancias- - y torques implícitos a su vez -dependientes de distancias y fuerzas-, y otros torques implícitos -dependientes de coeficientes y velocidades

CC BY NC ND

angulares- (en la sección 43); o torques, torques implícitos -dependientes de distancias y fuerzas-, y otros torques implícitos -dependientes de caudales de masas, distancias y velocidades angulares- (en las secciones 50, 51 y 52). En resumen, dependen de: *torques*.

32. Los *momenta de inercia* dependen de: *distancias*, y *masas* (en las secciones 50, 51 y 52).

33. Los *números de personas* dependen de: *coeficientes, fracciones*, y *flujos individuales de dineros* (en la sección 75); o *coeficientes, flujos individuales de dineros*, y *precios unitarios de mercaderías* (en la sección 74); o *flujos de dineros* (en la sección 79); o *flujos de dineros*, y *otros números de personas* (en las secciones 76, 77 y 78); o *flujos de personas* (en las secciones 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 82); u *otros números de personas* (en las secciones 73, 74, 75, 76, 77 y 78).

34. Los *números de Reynolds* dependen de: *distancias, velocidades*, y *viscosidades cinemáticas* (en la sección 28).

35. Las *potencias* dependen de: potencias implícitas -dependientes de áreas, concentraciones de fuerzas y velocidades-, otras potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas implícitas a su vez -dependientes de energías y masas- -, y otras potencias implícitas -dependientes de conductancias térmicas y temperaturas- (en la sección 69); o potencias implícitas -dependientes de áreas, coeficientes y concentraciones de potencias-, y otras potencias implícitas -dependientes de áreas, coeficientes y temperaturas- (en la sección 65); o áreas, concentraciones de fuerzas, números de personas, temperaturas, y velocidades (en la sección 65); o áreas, concentraciones de potencias, y temperaturas (en la sección 65); o conductancias térmicas implícitas -dependientes de áreas, conductividades térmicas y distancias-, y temperaturas (en las secciones 58 y 64); o áreas, coeficientes de pasos de energías en [$W\ m^{-2}\ K^{-1}$], y temperaturas (en las secciones 55, 56, 64 y 65); o áreas, y temperaturas (en la sección 65); o áreas, temperaturas, y velocidades (en la sección 65); o caudales de masas, energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas-, y fracciones implícitas -dependientes de calores específicos y masas- (en la sección 62); o caudales de masas, calores específicos, energías, energías específicas, y masas (en la sección 64); o potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas-, otras potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas implícitas a su vez -dependientes de energías y masas- -, y otras potencias implícitas -dependientes de caudales de masas, concentraciones de fuerzas, masas, y volúmenes (en la sección 68); o potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas implícitas a su vez -dependientes de energías y masas- -, y otras potencias implícitas -dependientes de conductancias térmicas y temperaturas- (en la sección 68); o caudales de masas, y energías específicas (en las secciones 59, 62, 63 y 64); u otras potencias, y otras potencias implícitas -dependientes de caudales de masas y energías específicas- (en la sección 69); o caudales de masas, y energías específicas implícitas -dependientes de energías, y masas- (en las secciones 64, 65, 67 y 70); o caudales de masas, y poderes caloríficos (en las secciones 62 y 63); o caudales de masas, y temperaturas (en la sección 65); o potencias implícitas -dependientes de coeficientes y velocidades-, otras potencias implícitas -dependientes de conductancias térmicas y temperaturas-, y otras potencias implícitas -dependientes de fuerzas y velocidades- (en la sección 67); o potencias implícitas -dependientes de áreas implícitas a su vez -dependientes de distancias-, coeficientes, y temperaturas-, y otras potencias implícitas -dependientes de conductancias térmicas implícitas a su vez -dependientes

CC BY NC ND

de áreas implícitas una vez más -dependientes de distancias-, conductividades térmicas y distancias- y temperaturas- (en las secciones 59, 62 y 63); o coeficientes, fracciones, y otras potencias (en la sección 65); o coeficientes, otras potencias, y temperaturas (en la sección 65); o coeficientes, masas, y poderes caloríficos (en la sección 69); o torques, y velocidades angulares (en la sección 69). Por otra parte, según 18) y este mismo 35) de esta sección 85, dependen implícitamente de: áreas, coeficientes, y concentraciones de potencias (en la sección 65); áreas, coeficientes de pasos de energías en [$W\ m^{-2}\ K^{-1}$], y temperaturas (en las secciones 55, 56, 59, 62, 63, 64 y 65); o áreas, concentraciones de fuerzas, y velocidades (en las secciones 66 y 69); o áreas, concentraciones de fuerzas, números de personas, temperaturas, y velocidades (en la sección 65); o áreas, concentraciones de potencias, y temperaturas (en la sección 65); o áreas, conductividades térmicas, distancias, y temperaturas (en las secciones 60, 61 y 70); o áreas, fracciones, y otras potencias (en la sección 65); o áreas, temperaturas, y velocidades (en la sección 65); o caudales de masas y energías específicas (en las secciones 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69 y 70); o caudales de masas, energías específicas, y fracciones (en la sección 62); o caudales de masas, calores específicos, energías, energías específicas, y masas (en la sección 64); o caudales de masas, concentraciones de fuerzas, masas y volúmenes (en la sección 68); o caudales de masas, y poderes caloríficos (en las secciones 62 y 63); o caudales de masas, y temperaturas (en la sección 65); o coeficientes, fracciones, y temperaturas (en la sección 65); o coeficientes, masas, y poderes caloríficos (en la sección 69); o coeficientes, y velocidades (en la sección 67); o conductancias térmicas, frecuencias, y temperaturas (en la sección 57); o conductancias térmicas, y temperaturas (en las secciones 58, 64, 66, 67, 68 y 69); o fracciones, y otras potencias (en la sección 70); o fuerzas, y velocidades (en la sección 67); o torques, y velocidades angulares (en la sección 69). En resumen, dependen de: *áreas, coeficientes de pasos de energías en [$W\ m^{-2}\ K^{-1}$], otros coeficientes*, y *concentraciones de potencias*; o *áreas, coeficientes*, y *temperaturas*; o *áreas, concentraciones de fuerzas, números de personas, temperaturas*, y *velocidades*; o *áreas, concentraciones de fuerzas*, y *velocidades*; o *áreas, concentraciones de potencias*, y *temperaturas*; o *áreas, conductividades térmicas, distancias,* y *temperaturas*; o *áreas, coeficientes*, y *temperaturas*; o *áreas, fracciones*, y *otras potencias*; o *áreas*, y *temperaturas*; o *áreas, temperaturas*, y *velocidades*; o *caudales de masas, concentraciones de fuerzas, masas*, y *volúmenes*; o *caudales de masas*, y *energías específicas*; o *caudales de masas, energías específicas*, y *fracciones*; o *caudales de masas, calores específicos, energías, energías específicas*, y *masas*; o *caudales de masas*, y *energías específicas*; o *caudales de masas*, y *poderes caloríficos*; o *caudales de masas*, y *temperaturas*; o *coeficientes, fracciones*, y *otras potencias*; o *coeficientes, fracciones,* y *temperaturas*; o *coeficientes, masas,* y *poderes caloríficos*; o *coeficientes, otras potencias*, y *temperaturas*; o *coeficientes*, y *velocidades*; o *conductancias térmicas, frecuencias*, y *temperaturas*; o *conductancias térmicas*, y *temperaturas*; o *fracciones,* y *otras potencias*; o *fuerzas*, y *velocidades*; u *otras potencias*; o *torques*, y *velocidades angulares*.

36. Los *precios unitarios de mercaderías* dependen de: *coeficientes*, y *existencias de mercaderías* (en las secciones 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79); o *coeficientes, totales de dineros*, y *totales de mercaderías* (en la sección 80); o *fracciones, existencias de mercaderías*, y *otros precios unitarios de mercaderías* (en la sección 80); o *fracciones*, y *otros precios unitarios de mercaderías* (en las secciones 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79); u *otros precios unitarios de merca-*

CC BY NC ND

derías (en la sección 80).
37. Las *reservas de dineros* dependen de: *flujos de dineros* (en las secciones 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79 y 81).
38. Las *tasas de crecimiento de aceleraciones* dependen de: *aceleraciones* (en la sección 29).
39. Las *temperaturas* dependen de: coeficientes, y energías específicas (en las secciones 59, 60, 61 y 63); o coeficientes, y energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas- (en las secciones 58 y 62); o coeficientes, energías específicas, y otras energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas- (en las secciones 55, 56 y 64); o coeficientes, energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas-, y velocidades (en la sección 67); o coeficientes, energías específicas, energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas-, volúmenes específicos, y volúmenes específicos implícitos -dependientes de masas y volúmenes- (en las secciones 66, 67 y 69); o energías específicas implícitas -dependientes de energías y masas- (en las secciones 57, 65, 68 y 70); u otras temperaturas (en la sección 65). En resumen, dependen de: *coeficientes, energías específicas*, y *volúmenes específicos*; o *coeficientes, energías específicas,* y *velocidades*; u *otras temperaturas*.
40. Los *tiempos* dependen de *distancias*, y *velocidades* (en la sección 83).
41. Los *torques* dependen de: ángulos, distancias, y fuerzas (en la sección 69); o coeficientes, distancias, velocidades, y voltajes (en la sección 54); o coeficientes, y velocidades angulares (en la sección 53); o coeficientes, velocidades angulares, y voltajes (en la sección 68). Por otra parte, según 31) de esta sección 85, dependen implícitamente de: caudales de masas, distancias, y velocidades angulares (en las secciones 50, 51 y 52); o coeficientes, y velocidades angulares (en las secciones 42, 43 y 69); o coeficientes, y otros torques (en la sección 68); o distancias, y fuerzas (en las secciones 41, 42, 50, 51, 52, 53 y 68); o fracciones, y otros torques (en la sección 43). En resumen, dependen de: *ángulos, distancias*, y *fuerzas*; o *caudales de masas, distancias*, y *velocidades angulares*; o *coeficientes, distancias, velocidades*, y *voltajes*; o *coeficientes*, y *velocidades angulares*; o *coeficientes, velocidades angulares*, y *voltajes*; o *coeficientes*, y *otros torques*; o *distancias*, y *fuerzas*; o *fracciones,* y *otros torques*.
42. Los *totales de dineros* dependen de: *flujos de dineros implícitos* -dependientes de *flujos de mercaderías*, y *precios unitarios de mercaderías*- (en la sección 80).
43. Los *totales de mercaderías* dependen de: *flujos de mercaderías* (en la sección 80).
44. Las *velocidades* dependen de: masas, y momenta (en las secciones 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 66, 67, 70); u otras velocidades (en las secciones 45 y 46); aceleraciones gravitacionales, coeficientes, concentraciones de masas, distancias, y fuerzas (en la sección 48); o ángulos, distancias, y velocidades angulares (en la sección 69); o áreas, distancias, masas, y otras velocidades (en la sección 47); o concentraciones de fuerzas, concentraciones de masas, distancias, masas, y viscosidades cinemáticas (en la sección 47); o distancias, masas, momenta de inercia, y momenta (en la sección 54). Por otra parte, según 5), 18), 28) y 30) de esta sección 85, dependen implícitamente de: distancias, y velocidades angulares (en las secciones 50, 51, 52 y 53); o áreas, caudales de masas, y concentraciones de masas (en la sección 66). En resumen, las velocidades dependen de: *ángulos, distancias*, y *velocidades angulares*; o *aceleraciones gravitacionales, coeficientes, concentraciones de masas, distancias*, y *fuerzas*; *áreas, caudales*

BY NC ND

de masas, y *concentraciones de masas*; o *áreas, distancias, masas*, y *otras velocidades*; o *concentraciones de fuerzas, concentraciones de masas, distancias, masas*, y *viscosidades cinemáticas*; o *distancias, masas, momenta de inercia*, y *momenta*; o *distancias*, y *velocidades angulares*; o *masas*, y *momenta*; u *otras velocidades*.

45. Las *velocidades angulares* dependen de: *momenta angulares*, y *momenta de inercia* (en las secciones 41, 42, 43, 50, 51, 52, 53, 68 y 69).

46. Las *viscosidades dinámicas* dependen de: *temperaturas* (en la sección 70).

47. Los *volúmenes* dependen de: áreas, y distancias (en la sección 69); o áreas, distancias, y otros volúmenes (en la sección 67); o concentraciones de fuerzas, masas, y temperaturas (en la sección 28); o concentraciones de masas, y masas (en las secciones 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 47, 48, 59, 63 y 83); o distancias, y distancias implícitas -dependientes de concentraciones de masas, otras distancias y masas- (en la sección 66); u otros volúmenes (en las secciones 13 y 14). Por otra parte, según 13), 17) y 48) de esta sección 85, dependen implícitamente de: áreas, y distancias (en las secciones 49, 53 y 70); o concentraciones de masas, y masas (en las secciones 50, 51, 52 y 62); o distancias (en las secciones 51, 52 y 63). En resumen, dependen de: *áreas*, y *distancias*; o *áreas*, *distancias*, y *otros volúmenes*; o *distancias*; o *concentraciones de masas*, y *masas*; o *concentraciones de fuerzas, masas*, y *temperaturas*; u *otros volúmenes.*

48. Y los v*olúmenes específicos* dependen de: masas, volúmenes, y volúmenes implícitos -dependientes de distancias- (en la sección 63). Por otra parte, según 12) y 39) de esta sección 85, dependen implícitamente de: masas, y volúmenes (en las secciones 66, 67 y 69). En resumen, dependen de: *masas*, y *volúmenes*.

Frente a ese pandemónium de dependencias alternativas, podríamos intentar sosegarnos un poco amontonando todas las variables dominantes para cada especie de las dependientes, y pasando a etcéteras las dominantes que no son de ninguna de las especies de las dependientes.

Así, las declaraciones de dependencias se resumirían como sigue.

Las variables de 1) en esta sección 85, dependerían de las de 44) en esta misma sección.

Las de 2) dependerían de las de 2), 17) y 45).

Las de 3) dependerían de las de 17).

Las de 4) dependerían de las de 22), 24) y 37), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 5) dependerían de las de 3), 5), 7), 8), 9), 10), 11), 12), 13), 17), 27), 29), 35), 39), 40), 44) y 47), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 6) dependerían de las de 29), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 7) dependerían de las de 2), 17) y 27), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 8) dependerían de las de 2).

Las de 9) dependerían de las de 27), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 10) dependerían de las de 12).

Las de 11) dependerían de las de 2) y 29), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 12) dependerían de las de 12), 13), 17), 19), 29), 39), 45), 47) y 48), etc. (lo que incluye aceleraciones gravitacionales y coeficientes).

Las de 13) dependerían de las de 13), 29) y 47).

Las de 14) dependerían de las de 15) y 17).

Las de 15) dependerían de las de 39).

Las de 16) dependerían de las de 23) y 26), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 17) dependerían de las de 2), 3), 13), 17), 29), 44) y 47), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 18) dependerían de las de 35).

CC BY NC ND

Las de 19) dependerían de las de 18) y 29).

Las de 20) dependerían de las de 23).

Las de 21) dependerían de las de 24).

Las de 22) dependerían de las de 24), 26), 33), 36) y 37), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 23) dependerían de las de 16), 20) y 23), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 24) dependerían de las de 4), 21), 33) y 36), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 25) dependerían de las de 25), 26), 27) y 33), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 26) dependerían de las de 22), 26), 27) y 33), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 27) dependerían de las de 17), 23), 25), 27), 29), 36) y 39), etc. (lo que incluye calores específicos y coeficientes).

Las de 28) dependerían de las de 2), 3), 5), 12), 13), 17), 27), 28), 29), 34), 39), 41), 44), 46) y 47), etc. (lo que incluye aceleraciones gravitacionales y coeficientes).

Las de 29) dependerían de las de 5).

Las de 30) dependerían de las de 28).

Las de 31) dependerían de las de 41).

Las de 32) dependerían de las de 17) y 29).

Las de 33) dependerían de las de 22), 25), 26), 27), 33) y 36), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 34) dependerían de las de 17) y 44), etc. (lo que incluye viscosidades cinemáticas).

Las de 35) dependerían de las de 3), 5), 6), 12), 14), 15), 17), 18), 19), 27), 28), 29), 33), 35), 39), 41), 44), 45) y 47), etc. (lo que incluye calores específicos, coeficientes, concentraciones de potencias, frecuencias y poderes caloríficos).

Las de 36) dependerían de las de 21), 27), 36), 42) y 43), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 37) dependerían de las de 22).

Las de 38) dependerían de las de 1).

Las de 39) dependerían de las de 19), 39), 44) y 48), etc. (lo que incluye coeficientes).

Las de 40) dependerían de las de 17) y 44).

Las de 41) dependerían de las de 2), 5), 17), 27), 28), 41), 44) y 45), etc. (lo que incluye voltajes).

Las de 42) dependerían de las de 22).

Las de 43) dependerían de las de 24).

Las de 44) dependerían de las de 2), 3), 5), 12), 13), 17), 28), 29), 30), 32), 44) y 45), etc. (lo que incluye aceleraciones gravitacionales y coeficientes).

Las de 45) dependerían de las de 31) y 32).

Las de 46) dependerían de las de 39).

Las de 47) dependerían de las de 3), 12), 13), 17), 29), 39) y 47).

Y las de 48) dependerían de las de 29) y 47).

Ya que la confusión se centraría ahora en la aparición de dependencias mutuas sin retardos, podríamos intentar sosegarnos un poco más pasando también a etcéteras las variables dominantes a través de retardos explícitos o implícitos (como los de las integraciones), las variables dependientes cuyas dominantes hemos pasado todas a etcéteras, y las variables dominantes que son de alguna especie de las dependientes que hemos pasado a etcéteras. Así, las declaraciones de dependencias

BY NC ND

se desbrozarían como sigue.

Las variables de 1) dependerían de las de 44).

Las de 2) dependerían de las de 2) y 17), etc.

Las de 3) dependerían de las de 17).

Las de 4) dependerían de las de 22) y 24), etc.

Las de 5) dependerían de las de 3), 5), 7), 8), 9), 11), 12), 13), 17), 27), 35), 39), 40), 44) y 47), etc.

Las de 7) dependerían de las de 2), 17) y 27), etc.

Las de 8) dependerían de las de 2).

Las de 9) dependerían de las de 27), etc.

Las de 11) dependerían de las de 2), etc.

Las de 12) dependerían de las de 12), 13), 17), 39), 45), 47) y 48), etc.

Las de 13) dependerían de las de 13) y 47), etc.

Las de 14) dependerían de las de 15) y 17).

Las de 15) dependerían de las de 39).

Las de 17) dependerían de las de 2), 3), 13), 17) y 47), etc.

Las de 22) dependerían de las de 24), 26), 33) y 36), etc.

Las de 23) dependerían de las de 23), etc.

Las de 24) dependerían de las de 33) y 36), etc.

Las de 25) dependerían de las de 25), 26), 27) y 33), etc.

Las de 26) dependerían de las de 22), 26), 27) y 33), etc.

Las de 27) dependerían de las de 17), 23), 25), 27), 36) y 39), etc.

Las de 28) dependerían de las de 2), 3), 5), 12), 13), 17), 27), 28), 34), 39), 41), 44), 46) y 47), etc.

Las de 32) dependerían de las de 17), etc.

Las de 33) dependerían de las de 26), 27), 33) y 36), etc.

Las de 34) dependerían de las de 17) y 44), etc.

Las de 35) dependerían de las de 3), 5), 12), 14), 15), 17), 27), 28), 33), 35), 39), 41), 44), 45) y 47), etc.

Las de 36) dependerían de las de 27) y 36), etc.

Las de 38) dependerían de las de 1).

Las de 39) dependerían de las de 39), 44) y 48), etc.

Las de 40) dependerían de las de 17) y 44).

Las de 41) dependerían de las de 2), 5), 17), 27), 28), 41), 44) y 45), etc.

Las de 44) dependerían de las de 2), 3), 5), 12), 13), 17), 28), 32), 44) y 45), etc.

Las de 45) dependerían de las de 32), etc.

Las de 46) dependerían de las de 39).

Las de 47) dependerían de las de 3), 12), 13), 17), 39) y 47), etc.

Las de 48) dependerían de las de 47), etc.

Etcétera.

Entonces se nos aparecerían varias dependencias mutuas sin retardos, como las sugeridas a continuación: las variables de 2) dependerían de las de 2), etc.; las de 5), de las de 5), etc.; las de 12), de las de 12), etc.; las de 13), de las de 13), etc.; las de 17), de las de 17), etc.; las de 23), de las de 23), etc.; las de 25), de las de 25), etc.; las de 26), de las de 26), etc.; las de 27), de las de 27), etc.; las de 28), de las de 28), etc.; las de 33), de las de 33), etc.; las de 35), de las de 35), etc.; las de 36), de las de 36), etc.; las de 39), de las de 39), etc.; las de 41), de las de 41), etc.; las de 44), de las de 44), etc.; las de 47), de las de 47), etc; las de 2) dependerían de las de 17), etc., y las de 17), de las de 2), etc; las de 3), de las de 17), etc., y las de 17), de las de 3), etc; las de 5), de las de 35), etc., y las de 35), de las de 5), etc; las de 5), de las de 44), etc., y las de 44), de las de 5), etc; las de 12), de las de 47), etc., y las de 47),

CC BY NC ND

de las de 12), etc; las de 13), de las de 47), etc., y las de 47), de las de 13), etc; las de 17), de las de 47), etc., y las de 47), de las de 17), etc; las de 22), de las de 26), etc., y las de 26), de las de 22), etc; las de 25), de las de 27), etc., y las de 27), de las de 25), etc; las de 26), de las de 33), etc., y las de 33), de las de 26), etc; las de 27), de las de 36), etc., y las de 36), de las de 27), etc; las de 28), de las de 41), etc., y las de 41), de las de 28), etc; las de 28), de las de 44), etc., y las de 44), de las de 28), etc.; y así sucesivamente.

En verdad, desde la sección 3 y hasta antes del amontonamiento de variables dominantes en esta 85, hemos eludido las dependencias mutuas sin retardos, de manera que las aparecidas recién son ilusorias. Sin embargo, el hecho de que hayan aparecido (ilusoriamente) tras el amontonamiento con que intentamos sosegarnos ante un pandemónium de dependencias alternativas, acusa la necesidad de una decantación mayor en el panorama causal.

El planteamiento de ecuaciones en este libro, incluye algunas liviandades que se pueden excusar apenas con que los argumentos acerca de la causalidad imponen estrecheces drásticas, como se ve en el libro mismo, y con que la vida no es suficientemente dadivosa de tiempo para replanteamientos exhaustivos.

Quedémonos, pues, con esta avería y, aunque no basten para redimirla, con dos atisbos de ella: según se adivina en 2), 3), 17), 44), 47) y 48) de esta sección 85, tiene una parte significativa ubicada en los aspectos geométricos (en fingir dependencias orientadas para algunos ángulos, áreas, distancias, velocidades y volúmenes); y, según se aprecia en 5), 22), 25), 28), 35) y 41), tiene otra parte significativa ubicada en los flujos (en concebir por qué fluyen masas, dineros, personas, momenta y energías, a través de fronteras con aspectos geométricos arbitrarios y con exigencias de velocidades suficientes para atravesarlas).

De hecho, por ejemplo, 17) y 47) delatan que hemos declarado distancias como dependientes de áreas y volúmenes en la sección 83, hemos declarado volúmenes como dependientes de áreas y distancias en la sección 69, y hemos usado una inversión desorientadamente algebraica entre ambas declaraciones; por otro lado, 28) y 41) delatan que hemos declarado fuerzas como dependientes de distancias y torques en la sección 39, hemos declarado torques como dependientes de distancias y fuerzas en la sección 41, y también hemos usado una inversión desorientadamente algebraica entre ambas declaraciones; además, 5) y 35) delatan que hemos declarado caudales de masas como dependientes de temperaturas y potencias en la sección 65, hemos declarado potencias como dependientes de temperaturas y caudales de masas en la misma sección 65, y también hemos usado una inversión desorientadamente algebraica entre ambas declaraciones; adicionalmente, 44) y 13) delatan que hemos declarado concentraciones de masas como dependientes de masas y volúmenes en la sección 47, hemos declarado volúmenes como dependientes de masas y concentraciones de masas en la sección 3, y también hemos usado una inversión desorientadamente algebraica entre ambas declaraciones.

BY NC ND

86.0
CONCLUSIÓN

Recién, en la sección 85 de esta gira, sufrimos una avería causal.

Podríamos retroceder a preguntarnos por qué no nos desprendemos de la causalidad: por qué no botamos, sin más, los porqués [129].

Obviamente, si los botamos no nos queda por qué hacernos la pregunta.

Tampoco nos queda por qué contestarla; ni por qué hacer ninguna acción: ni la de contestar, ni la de preguntar, ni la de retroceder, ni la de predecir evoluciones, ni la de variar la realidad de manera técnica, ni la de exigirnos alguna cordura, ni ninguna otra.

Tampoco nos queda cómo creer que las hacemos, o que nos hacen.

Arriesgándonos un poco, recitemos otro verso bobo [130]:

" Variable dominante no es
la que varía después;
y no son por igual dominantes
las que varían antes"

Ahora, repitámonos.

Para variar la realidad en el sentido técnico, para variarla diestramente, hay que saber qué cosas obedecen a la voluntad, qué otras dependen de ellas y así sucesivamente, hasta saber cómo someter las cosas que interesa dominando a las que las dominan.

A lo menos por eso, no podemos botar los porqués sin pena: el apego a la causalidad tiene causas y efectos.

Sufrimos la avería antedicha al buscar estrechamientos y retardos en las dominaciones y dependencias, con un afán técnico; y con ese afán, que nos impide botar alegremente la causalidad, no nos queda más remedio que disponernos a perseverar en la búsqueda cuando se nos dé otra oportunidad, ya que esta se acaba; a perseverar como ante las averías sufridas en el intento de predicción de la sección 70 y en el ensayo de medidas de la sección 84.

En tal disposición a una perseverancia futura, no nos conviene esquivar las averías de este libro soñando, por ejemplo, con estructuraciones causales puramente arboriformes, de causas "primeras" y efectos "últimos", mediante la proscripción de las dependencias mutuas.

Tampoco nos conviene ocultar otros desperfectos del libro, entre los que caben la insistencia en el supuesto de medios continuos, la limitación de las integraciones a las aproximaciones de Euler y Newton, la ausencia de métodos de búsqueda más eficientes que los de paso (casi) fijo expuestos, la indisciplina en la orientación de los momenta de las fuerzas, la falta de advertencia acerca de algunos descartes intencionales de variables, la difuminación de la dificultad en la programación de retardos

[129] "**porqué.** (De *por qué*). **1.** m. coloq. Causa, razón o motivo…"; "**porque.** (De *por y que*). **1.** conj. causal Por causa o razón de que. *No pudo asistir porque estaba ausente. Porque es rico no quiere estudiar.*" (de: Real Academia Española, 1984, *Diccionario de la lengua española.* Espasa-Calpe, Madrid)

[130] Acabamos de recitar uno.

CC BY NC ND

variantes, la omisión completa de las predicciones probabilísticas, el uso de varias ecuaciones baratas en vez de otras mejores y también accesibles, la presencia de algunas equivocaciones muy menores que fueron dejadas sin corregir y de otras con distintos calibres que pasaron inadvertidas, y, principalmente, la insuficiencia en la corroboración de las predicciones mediante mediciones.

El libro propone predicciones realistas pero no necesariamente reales, de manera que, pese a sus fórmulas, su valor pudiera ser más cualitativo que cuantitativo.

Entre sus méritos podríamos incluir el énfasis dinámico, la variedad de los territorios en que se aventura, la diversidad de las complejidades que acomete, los parquedad de los recursos que emplea, la despreocupación por las jergas locales, la moderación en las maniobras algebraicas, las visiones espaciales con presencia del ambiente, el rescate de una causalidad cotidiana y severa, la propuesta de algunas pruebas para esa causalidad, la presentación de programaciones temporales para una computación con algo de la altura de nuestros tiempos, y, aún, la majadería que dilató mucho la escritura pero, en vista de varias incomprensiones y negaciones circundantes, era necesaria.

También podríamos incluir entre sus méritos el cumplimiento de su promesa acerca del planteamiento ordenado de ecuaciones: cada caso tratado se afinca en una estructura espacial o taxonómica (que incita a tomar en cuenta lo que viaja o se convierte y, por ello, se acumula en cantidades variables) obligándose enseguida a una estructuración causal. Según eso, el planteamiento mismo empieza con la identificación de las variables de interés (entre las cuales caben las cantidades mencionadas recién) y con la formulación de cómo cada una depende de otras o, equivalentemente, es dominada por ellas; continúa recurrentemente con la identificación de las variables nuevas que dominan a las antiguas en las fórmulas ya establecidas y con la formulación de cómo se comporta cada una independientemente o dependiendo de otras antiguas, nuevas o aún más nuevas; y cesa con el reconocimiento de que no hay más variables dominantes nuevas por identificar. Así da ecuaciones necesarias y suficientes con pocas vacilaciones y pocas maniobras algebraicas, completa una estructura causal con retardos en todas las dependencias mutuas, hace fácil estructurar algún programa de computación enseguida, y ayuda a maniobrar algebraicamente después. Eso concilia las ecuaciones y los discursos austera y ordenadamente; asemeja los casos; con un poco de suerte, tranquiliza el entendimiento de manera que las enmiendas se hacen sin espanto cuando hay que hacerlas; y forma conocimientos técnicos en concordancia con las declaraciones al respecto.

Terminemos la gira dispuestos a desprendernos de todo el equipaje (incluidos los apegos a la fluidez o la conversión, a la causalidad y a la computación) cuando tal desprendimiento valga la pena; y dedicando una mirada de despedida al salvoconducto que llevábamos preparado para posibles eventualidades aduaneras: las dinámicas son, domésticamente, sistemas con fuerzas que causan movimientos [131] ; hay sistemas (estructuras) diferentes: a lo menos causales, temporales, espaciales y taxonómi-

[131] "**dinámica.** (Del gr. δυναμικη, t. f. de -ικός, dinámico). f. Parte de la mecánica, que trata de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen"; "**dinámico, ca.** (Del gr. δυναμικός, de δυναμις, fuerza). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la fuerza cuando produce movimiento.// **2.** adj. Perteneciente o relativo a la **dinámica**…" (de: Real Academia Española, 1984, *Diccionario de la lengua española*. Espasa-Calpe, Madrid). "… **5.** f. Sistema de fuerzas dirigidas a un fin." (de: Real Academia Española, 2001, *Diccionario de la lengua española*. Internet).

CC BY NC ND

cos; las fuerzas son flujos particulares (de momenta) en roles dobles (de causas y también de efectos); hay flujos diferentes: de momenta, de masas, de energías, de compuestos químicos, de microorganismos, de mercaderías, de dineros, de personas, de trámites y otros; los movimientos son evoluciones de variables especiales (posiciones); y hay variables evolutivas diferentes, a granel.

Nos habíamos aprovisionado con extensiones que son capaces de estructurar bastante bien tanto el análisis de lo existente como el diseño de lo por existir, pero no llevábamos contrabandos.

CC BY NC ND

BY NC ND

INDICE

1.0	Inicio	7
2.0	Premisas	8

MASAS Y CAUDALES

3.0	Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical	45
4.0	Agua en un estanque cónico con eje vertical	51
5.0	Agua en un estanque esférico	55
6.0	Agua en un estanque cilíndrico con eje horizontal	60
7.0	Agua en una represa	65
8.0	Agua en un estanque con forma calculada a propósito	72
9.0	Agua en dos estanques cilíndricos, uno con eje vertical y otro con eje horizontal	78
10.0	Agua en dos estanques cilíndricos con ejes verticales, a la manera de Ktesibios	84
11.0	Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical y con flotador y válvula, a la manera de los ibn-Musa	90
12.0	Agua y un poco de soluto en un estanque cónico con eje vertical	96
13.0	Agua y tierra en un estanque parcialmente cónico y parcialmente cilíndrico, con eje vertical	101
14.0	Agua y tierra con tamaños diferentes en un estanque cilíndrico, con eje horizontal	108
15.0	Tierra con tamaños diferentes en un cilindro rotatorio, con eje horizontal	116
16.0	Agua y soluto a lo largo de un tubo cilíndrico con eje horizontal	121
17.0	Una bolita de naftalina	127
18.0	Una reacción química	130
19.0	Tres reacciones químicas	137
20.0	Una reacción con una enzima como catalizador	144
21.0	Un biodigestor de funcionamiento por tandas	151
22.0	Un biodigestor de funcionamiento continuo	156
23.0	Un biodigestor de funcionamiento continuo con sustratos de tres especies y microorganismos de dos especies	162
24.0	Sustrato y microorganismos a lo largo de un biodigestor cilíndrico de funcionamiento continuo	169
83.0	De vuelta: agua y burbujas de aire en un estanque cilíndrico con eje vertical	587

MOMENTA Y FUERZAS

25.0	Paréntesis acerca de momenta y fuerzas	178
26.0	Dos cuerpos y un resorte	185
27.0	Un paracaidista en el aire	190
28.0	Una burbuja de aire en el agua	194
29.0	Un paracaidista en el aire, otra vez	200
30.0	Dos cuerpos, un resorte y un suelo seco	204

CC BY NC ND

31.0 Una moto 210
32.0 Una casa y un temblor 216
33.0 Una bala en el aire 222
34.0 El Sol y la Tierra en caídas mutuas 228
35.0 El Sol y la Tierra en órbitas mutuas 236
36.0 Tres cuerpos celestes en órbitas mutuas 245
37.0 Tres cuerpos y tres resortes 251
38.0 Una moto, otra vez 258
39.0 Una carga y un montacargas 262
40.0 Un péndulo invertido sobre un carro 270

MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES
41.0 Un péndulo invertido sobre una rueda 277
42.0 Dos ruedas engranadas 284
43.0 Un disco y dos elásticos 288

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS
44.0 Una mirada a un cuerpo luminoso 294
45.0 Una andanada a bordo de un barco 299
46.0 Un cohete 304
47.0 Un cohete de juguete 309
48.0 Agua en un estanque cilíndrico con eje vertical, soportado por resortes 314
49.0 Movimientos a lo largo de una correa 319

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y TORQUES
50.0 Un rollo 340
51.0 Dos rollos 344

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES
52.0 Dos rollos y un rodillo 351
53.0 Una correa, dos motores y un bloque volante 358
54.0 Una correa transportadora 365

ENERGÍAS Y POTENCIAS
55.0 Una bala caliente 373
56.0 Una bala caliente en un calorímetro 377
57.0 Agua a través de un calefactor y de un radiador ventilado 382
58.0 Un alambre caliente 388

MASAS Y CAUDALES; ENERGÍAS Y POTENCIAS
59.0 Agua caliente en un estanque cilíndrico con eje vertical 393
60.0 Temperaturas a lo largo de un tubo cilíndrico con eje horizontal 399
61.0 Aguas en un intercambiador de calor 405
62.0 Un apagado de cal 413
63.0 Una caldera 420
64.0 Un secador de frutas 428
65.0 Una piscina 444

CC BY NC ND

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y FUERZAS; ENERGÍAS Y POTENCIAS
66.0 Aire en un cilindro con un pistón móvil 454
67.0 Aire en un cilindro con un pistón móvil formando dos cámaras 463
70.0 Convección natural de agua por un tubo con calefactor 490

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA Y TORQUES; ENERGÍAS Y POTENCIAS
68.0 Una cámara con un soplador 471

MASAS Y CAUDALES; MOMENTA, FUERZAS Y TORQUES; ENERGÍAS Y POTENCIAS
69.0 Un motor a explosión de un cilindro y cuatro tiempos 480

MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA
71.0 Una mercadería en un mercado libre e ingenuo 506
80.0 Una mercadería que se transa por temporadas 571

MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO
72.0 Una mercadería, y dineros 511
79.0 Dos mercaderías y dineros 559

MERCADERÍAS Y FLUJOS DE MERCADERÍA; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO; PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS
73.0 Una mercadería, dineros, y empleados 515
74.0 Una mercadería, dineros, empleados, y productores dispersos y adictos al Cálculo 519
75.0 Una mercadería, dineros, empleados, y un productor monopólico y adicto al Cálculo 528
76.0 Una mercadería, dineros, empleados, y productores aventureros 538
77.0 Una mercadería, dineros, empleados, y productores y comerciantes aventureros 546
78.0 Una mercadería, dineros, empleados, y productores, comerciantes y consumidores aventureros 551

EXPEDIENTES Y FLUJOS DE EXPEDIENTES; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO
81.0 Una oficina de tramitación de expedientes 577

PERSONAS Y FLUJOS DE PERSONAS; DINEROS Y FLUJOS DE DINERO
82.0 Una institución educativa 583

84.0 Recuento de variables 591
85.0 Recuento de dependencias 596
86.0 Conclusión 609

CC BY NC ND

BY NC ND