

Una medida de interacción multivariable en el dominio del tiempo y de la frecuencia

Mario E. Salgado* Juan I. Yuz*

* Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile. (e-mail: mario.salgado@usm.cl, juan.yuz@usm.cl)

Resumen: En este artículo se extiende el análisis de la Matriz de Participación, como herramienta para cuantificar la interacción en sistemas multivariables y para seleccionar, acorde con esa cuantificación, la estructura de los controladores. La extensión del análisis se realiza en los dominios del tiempo y de la frecuencia, a través de la conexión existente entre la definición de la Matriz de Participación y la norma Hilbert-Schmidt-Hankel. Esta conexión permite además estimar la matriz mediante métodos de identificación que utilizan datos experimentales de entrada y salida del sistema multivariable. Copyright © 2009 CEA.

Palabras Clave: Control multivariable, control descentralizado, controlabilidad, observabilidad, normas.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos multivariables son utilizados en diversas disciplinas en las que interesa describir las relaciones entre diversos estímulos y un número potencialmente elevado de respuestas del sistema (Kwakernaak y Sivan, 1972; Maciejowski, 1989). La dificultad para determinar y cuantificar el efecto de la actuación en las variables de entrada sobre las mediciones de la variables de salida es uno de los problemas centrales en el análisis de sistemas multivariables y, por ende, en la selección de estructura y síntesis del controlador.

Cuando hablamos de estructura en un modelo multivariable, nos referimos a la particular red de dependencias entre entradas y salidas, capturada por ese modelo. Si nos restringimos al caso de sistemas de igual número de entradas que de salidas, podemos considerar para ellos modelos diagonales o descentralizados, diagonales por bloques, triangulares o ralos, entre otros. La estructura en la que aparecen todas las dependencias posibles entre entradas y salidas, es conocida como multivariable plena (*full MIMO*).

La selección de estructura es especialmente importante desde el punto de vista práctico, ya que interesa construir modelos multivariables que sean *simples* pero que, a la vez, capturen aquellas dependencias entrada-salida del sistema que son relevantes para la aplicación de interés. En nuestro caso la aplicación está motivada por la necesidad de diseñar controladores de estructura restringida. La relación entre la estructura del modelo de la planta y aquella del controlador se origina en el paradigma fundamental que señala que el problema de diseño en control, es esencialmente un problema de construcción de inversos, sujeto a ciertas restricciones (Salgado, 2006).

En el proceso de construir modelos multivariables, la primera etapa es decidir cuáles entradas y cuáles salidas serán consideradas en el modelo multivariable (van de Wal y de Jager, 2001). En segundo lugar, se debe cuantificar el efecto que las entradas seleccionadas tienen en cada una de las salidas que se medirán, es decir, se requiere una medida para la dependencia entre entradas y salidas de la planta.

Si consideramos una planta lineal, de tiempo continuo e invariante en el tiempo, con p entradas y p salidas, ésta puede ser modelada como un sistema multivariable con matriz de transferencia:

$$\mathbf{G}(s) = [G_{ij}(s)] \quad (1)$$

donde $G_{ij}(s)$ es la función de transferencia entre la entrada $U_j(s)$ y la salida $Y_i(s)$. Dado este modelo de un proceso multivariable, se debe decidir qué elementos $G_{ij}(s)$ serán parte, y cuáles serán excluidos, de un modelo *reducido*. Por ejemplo, puede ser de interés reducir el modelo original a uno con matriz de transferencia diagonal o triangular que pueda ser luego utilizado para diseñar un controlador con la misma estructura. En este proceso de reducción aparece el concepto de *interacción*. Este concepto ha sido tradicionalmente usado en el contexto de control descentralizado de procesos para referirse al efecto del control de un lazo, en los otros (Witcher y McAvoy, 1977; Grosdidier y Morari, 1986; He *et al.*, 2006). Supongamos, por ejemplo, que $p = 9$ y que inicialmente se ha decidido que la entrada u_1 se use para ajustar la salida y_9 y que la entrada u_2 ha sido elegida para controlar la salida y_4 . Esto quiere decir que las funciones de transferencia G_{91} y G_{42} deben estar en el modelo reducido; entonces el efecto que tendrá en y_4 , la manipulación de u_1 , así como el efecto que tendrá en y_9 , la manipulación de u_2 , dan una medida de la interacción entre ambos canales. Desde un punto de vista complementario, uno puede decir que si en un modelo se excluye la función de transferencia G_{jk} , entonces se está suponiendo que variaciones significativas de u_k no producen variaciones significativas en y_j , en comparación con el efecto de otras entradas sobre la misma salida. Además, para enriquecer el análisis de la interacción en sistemas multivariables, más allá de estados estacionarios, se ha extendido el concepto al de *interacción dinámica* para describir la interacción en todos los rangos de frecuencias. Es importante notar además que el concepto de interacción trasciende la estructura diagonal tradicional, para incluir cualquier estructura en modelos de sistemas multivariables.

La medición de interacciones en modelos lineales multivariables ha sido estudiada extensamente a lo largo de la historia

del diseño de sistemas de control. En una referencia ya clásica, Bristol (Bristol, 1966) desarrolló la idea de la *Matriz de Ganancia Relativa* (RGA, por su denominación inglesa *Relative Gain Array*). La RGA mide la interacción entre canales de control, en base a la ganancia a continua (a frecuencia cero) del modelo multivariable. La RGA es una herramienta conceptualmente sencilla y simple de utilizar, que permite encontrar la *mejor* (en algún sentido) estructura descentralizada para un modelo multivariable dado; sin embargo, el análisis mediante la RGA tiene también algunas limitaciones que se originan en su propia simplicidad (Huang *et al.*, 1994; Kariwala y Hovd, 2006). Las propiedades de la RGA han sido ampliamente estudiadas y se han propuesto algunas variantes (Niederlinski, 1971; Witcher y McAvoy, 1977; Skogestad y Morari, 1987; Chiu y Arkun, 1991; Zhu, 1996). Uno de los rasgos claves de la RGA es que sólo considera la respuesta de la planta a frecuencia cero. Esta limitación ha sido enfrentada, enriqueciendo la idea original, a través de nuevas propuestas de medidas de interacción dinámicas, tales como las que aparecen descritas en (Witcher y McAvoy, 1977; Bristol, 1978; Gagnon *et al.*, 1999). A pesar que estas medidas permiten un análisis más profundo de la interacción multivariable, ellas se tornan bastante complejas de aplicar en modelos multivariables con más de 2 entradas y 2 salidas. La RGA tiene como limitación adicional el que fue concebida para seleccionar sólo estructuras diagonales o descentralizadas; por ejemplo, la matriz que resulta cuando se aplica el método de RGA a modelos triangulares es diagonal, con independencia de la relevancia de los términos fuera de la diagonal del modelo original.

La Matriz de Participación (MP), por su parte, ha sido propuesta como una medida de interacción dinámica entre entradas y salidas del sistema en lazo abierto (Salgado y Conley, 2004). Esta matriz se puede interpretar en términos de la controlabilidad relativa desde la entrada y de la observabilidad relativa desde la salida para cada subsistema escalar con entrada $u_j(t)$ y salida $y_i(t)$. En particular, la matriz considera la relación entre la energía inyectada en la entrada $u_j(t)$ y la energía obtenida en la salida $y_i(t)$. En otras palabras, la MP determina que el elemento (i, j) de la matriz de transferencia (1) es relevante si se obtiene energía significativa en la salida i , cuando se aplica energía limitada en la entrada j . De esta forma, la interacción entre entradas y salidas que mide la MP tendrá una incidencia directa en la interacción que existirá entre los canales cuando se elige la estructura del controlador multivariable en lazo cerrado. En consecuencia, un aspecto clave es que la MP permite discernir estructuras simplificadas que trascienden el caso diagonal.

Otras medidas de interacción similares a la MP han sido propuestas en la literatura. En (Weinmann, 2007), por ejemplo, se propone una medida de interacción basada en el Gramiano de controlabilidad (Kwakernaak y Sivan, 1972) del sistema. Por otra parte, en (Wittenmark y Salgado, 2002) se construye una *matriz de índices de interacción* en base a la norma Hankel (Glover, 1984) de los subsistemas elementales. Esta matriz de índices de interacción ha sido exitosamente aplicada, por ejemplo, en el control de plantas de aguas servidas, al proveer una base conceptual para el problema de selección de estructura del controlador (Samuelsson *et al.*, 2005).

Es necesario señalar que tanto la MP, como las demás herramientas desarrolladas para cuantificar interacciones, no están asociadas a ningún método particular de síntesis de controladores, sino que se centran en la selección de su estructura.

En este artículo se presenta una nueva interpretación de la MP tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, extendiendo el trabajo presentado en (Salgado y Yuz, 2007). La relación se establece entre la MP y una integral temporal de la respuesta a impulso de los subsistemas elementales. Esta relación, a su vez, es traducida al dominio de la frecuencia mediante la identidad de Parseval. Los resultados se han obtenido usando la norma Hilbert-Schmidt-Hankel de la matriz de transferencia del sistema multivariable, así como la de sus subsistemas elementales (Hanzon, 1992).

En el presente trabajo se propone el uso de las interpretaciones en el tiempo y en la frecuencia de la MP para obtener una estimación empírica de sus elementos. Se muestra que esto es posible, a partir de datos experimentales de entrada y salida del sistema. Esta estrategia permite cuantificar directamente las interacciones dinámicas en el sistema, sin tener que obtener primero un modelo paramétrico.

El presente artículo se ha estructurado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presentan la definición y las propiedades de la MP. En la Sección 3 se presenta el resultado central de este artículo, es decir, la interpretación de la MP en el dominio del tiempo y de la frecuencia. A continuación, en la Sección 4, las interpretaciones en el tiempo y la frecuencia de la MP son aplicadas para estimar directamente esta matriz a partir de datos muestreados de entrada y salida, usando métodos estándares de identificación no paramétrica. Finalmente, se presentan conclusiones en la Sección 5.

2. LA MATRIZ DE PARTICIPACIÓN

En esta sección se revisa la definición de la Matriz de Participación (MP) y sus propiedades principales. Un análisis y discusión más detallada de la MP como medida de interacción y su aplicación para la selección de estructura de controladores multivariables se presenta en (Salgado y Conley, 2004).

2.1 Definición y propiedades

Considere un sistema multivariable, de dimensión $p \times p$, estable, completamente observable y controlable, con un modelo en variables de estado dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

donde las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Adicionalmente, las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C}^T pueden ser particionadas en vectores columnas de la forma

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_p] \quad (4)$$

$$\mathbf{C}^T = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_p] \quad (5)$$

La matriz de transferencia del sistema puede ser entonces obtenida a partir del modelo (2)–(3) de la forma:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [G_{ij}(s)] \quad (6)$$

en que $G_{ij}(s)$ es la función de transferencia del subsistema elemental con entrada $u_j(t)$ y salida $y_i(t)$, y descripción en variables de estado dada por las matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_j, \mathbf{c}_i^T, 0)$.

Una medida de la interacción dinámica entre entradas y salidas del sistema multivariable (6) está dada por la Matriz de Participación, $\Phi \in \mathbb{R}^{p \times p}$, definida por (Salgado y Conley, 2004):

$$\Phi = [\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} \text{traza } \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i \\ \text{traza } \mathbf{P} \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (7)$$

En esta expresión, \mathbf{P} y \mathbf{Q} representan el Gramiano de controlabilidad y de observabilidad del vector de estado del sistema multivariable, respectivamente (Kwakernaak y Sivan, 1972). De manera similar, \mathbf{P}_j y \mathbf{Q}_i denotan los Gramianos de controlabilidad y observabilidad para el (i, j) -ésimo subsistema elemental.

Una característica de la MP definida en (7) es que la suma de los elementos de la matriz es igual a 1. Este resultado es consecuencia de la propiedad

$$\mathbf{P} \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i \quad (8)$$

lo cual implica que

$$\text{traza } \mathbf{P} \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \text{traza } \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i \quad (9)$$

En (7), $\text{traza } \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i$ representa una medida combinada de la controlabilidad y observabilidad del (i, j) -ésimo subsistema elemental. De manera similar, $\text{traza } \mathbf{P} \mathbf{Q}$ representa la misma medida, pero para el sistema multivariable completo. Estas propiedades explican que el elemento ϕ_{ij} de la matriz representa una medición de la importancia (dinámica) relativa del subsistema elemental $G_{ij}(s)$.

Una consideración práctica sugiere que, para que la definición de la MP no sea afectada por escalamiento de las entradas y salidas, es conveniente expresar estas señales en valores *por unidad* o en porcentaje de sus rangos máximos. Esto evita la ambigüedad de modelos descritos en unidades físicas o de ingeniería particulares (Glad y Ljung, 2000; Maciejowski, 1989).

Nota 1. La definición de la MP se basa en los Gramianos de controlabilidad y observabilidad del sistema multivariable y de sus subsistemas elementales, todos los cuales se suponen estables. Si bien es posible extender la definición de Gramianos al caso de sistemas inestables (Zhou *et al.*, 1999), su aplicación para análisis de interacción y selección de estructura mediante la MP no es trivial. En rigor, cualquier método de simplificación estructural de plantas inestables debe enfrentar el desafío fundamental de estabilizar la planta en base a un modelo truncado de la misma. Éste es un problema no resuelto en general, ya que el truncamiento puede descartar uno o más polos inestables y, ciertamente, afecta las direcciones asociadas de los otros polos inestables. \square

Nota 2. La MP definida en (7) puede ser obtenida para sistemas que son estables y tienen una representación de estado de dimensión finita, ya sea en tiempo discreto o continuo. Sin embargo, para sistemas de tiempo continuo que contienen retardos puros, es posible obtener la MP en tiempo discreto a partir del modelo muestreado equivalente (Salgado y Rojas, 2005), o usar una aproximación racional para la exponencial que representa el retardo temporal (Allemandou, 1966). \square

2.2 Relación con la matriz de ganancia relativa

Como se mencionó en la Introducción, la Matriz de Ganancia Relativa (RGA, en inglés) ha sido aplicada exitosamente para el problema de pareo de entradas con salidas en el diseño un

sistema de control (Bristol, 1966; van de Wal y de Jager, 2001; Kariwala y Hovd, 2006). Resulta por tanto interesante discutir brevemente la relación entre ambas medidas de interacción, la MP y la RGA.

La RGA se describe en una matriz calculada en base a la ganancia a continua del sistema multivariable:

$$\Gamma = \mathbf{G}(0) \otimes (\mathbf{G}(0))^{-T} \\ = [G_{ij}(0)] \otimes [G_{ji}(0)]^{-1} \quad (10)$$

en que \otimes representa el producto elemento por elemento entre ambas matrices, y $(\cdot)^{-T}$ denota la traspuesta de la inversa de una matriz dada.

Si se considera, por ejemplo, un modelo simple para cada uno de los subsistemas escalares de la forma:

$$G_{ij}(s) = \frac{K_{ij}}{T_{ij}s + 1} \quad (11)$$

entonces la matriz de ganancia a continua del sistema está dada por $\mathbf{G}(0) = [G_{ij}(0)] = [K_{ij}]$, y la RGA asociada (10) está dada por

$$\Gamma = [K_{ij}] \otimes [K_{ji}]^{-1} \quad (12)$$

Por otro lado, la MP correspondiente a (11) está dada por

$$\Phi = \frac{[K_{ij}^2]}{\sum_{i,j} K_{ij}^2} \quad (13)$$

Por tanto, para modelos multivariables en que los subsistemas elementales son de la forma (11), tanto la RGA como la MP utilizan la misma información del sistema, es decir, la ganancia a continua de los subsistemas elementales.

Si se consideran características dinámicas adicionales en el sistema, tales como ceros de fase no mínima o modos naturales pobremente amortiguados, entonces ambas medidas, la RGA y la MP, pueden diferir de manera apreciable. Por ejemplo, si consideramos uno de los canales de la planta de la forma:

$$G_{ij}(s) = \frac{K_{ij}}{(\beta s + 1)(s^2 + \alpha s + 1)} \quad (14)$$

donde $0 < \alpha < 2$ y $\beta > 0$, entonces la RGA es el mismo que para el caso más simple considerado en (11). Sin embargo, al obtener el elemento (sin escalar) de la MP asociado a un subsistema elemental de la forma (14), obtenemos:

$$\text{traza } \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i = K_{ij}^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{(\alpha\beta + 1)^3 + \beta^2}{2\alpha^2(\beta^2 + \alpha\beta + 1)^2} \right) \quad (15)$$

En esta expresión se observa que, a medida que α disminuye, es decir, a medida que se reduce el amortiguamiento de los modos naturales del sistema, entonces ϕ_{ij} crece. De hecho, esto sugiere que el elemento $G_{ij}(s)$ de la matriz de transferencia del sistema multivariable debe ser incluido en un modelo de complejidad reducida, para pequeños valores de α y ganancia moderada.

2.3 Selección de estructura de controladores

El análisis en las secciones anteriores respalda el uso de la MP como herramienta, no sólo para el pareo de entradas y salidas en un sistema de control descentralizado, sino que también para seleccionar estructuras más complejas en el controlador multivariable: diagonal por bloques, triangular o rala, entre

otras. Cada una de estas estructuras puede ser seleccionada a partir de los elementos de la MP de mayor relevancia, o tales que se maximiza la suma para la estructura de control deseada. Estas ideas son ilustradas en el siguiente ejemplo (ver también (Samuelsson *et al.*, 2005)).

Ejemplo 1. Considere un sistema de 3×3 con matriz de transferencia

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,4}{(s+1)^2} & \frac{4(s+3)}{(s+2)(s+5)} & \frac{-2}{s+4} \\ \frac{2}{(s+2)(s+1)} & \frac{2}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{6(2s+1)}{(s+5)(s+4)} & \frac{4}{(s+3)^2} & \frac{8}{(s+2)(s+5)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

La MP para este sistema está dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0,0302 & 0,1646 & 0,0314 \\ 0,1815 & 0,0471 & 0,0314 \\ 0,3632 & 0,0372 & 0,1133 \end{bmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \quad (17)$$

Se observa que la interacción entre entrada y salida es mayor en los canales (u_1, y_3) , (u_1, y_2) y (u_2, y_1) . Sin embargo, si se requiere un controlador completamente descentralizado, entonces la MP sugiere seleccionar los canales (u_1, y_3) , (u_2, y_1) and (u_3, y_2) .

Por otra parte, la matriz RGA asociada a (17) está dada por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -00831 & 0,9111 & 0,1720 \\ 1,3809 & -0,2745 & -0,1064 \\ -0,2979 & 0,3634 & 0,9345 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Una de las reglas básicas en el análisis mediante la RGA señala que el emparejamiento de entradas y salidas no es confiable cuando la matriz contiene elementos negativos. Más aún, se ha indicado que, en estos casos, una estructura descentralizada no permitirá alcanzar un buen control (Glad y Ljung, 2000).

Por otro lado, también es posible verificar que usando el emparejamiento propuesto por la MP, el desempeño que se puede obtener con un controlador descentralizado no es satisfactorio. En consecuencia, debemos buscar un modelo reducido para la planta más complejo (y, por ende, una estructura más compleja para el controlador). Sin embargo la RGA no está concebida para seleccionar estructuras distintas a las descentralizadas. En cambio, la MP puede ayudar en alcanzar ese objetivo. De hecho, si se decide diseñar un controlador triangular, basado en un modelo también triangular de la planta, a partir de la matriz Φ definida en (17), se puede indicar que u_1 debe depender de y_2 , u_2 debe depender de la medición de y_1 y de y_2 , mientras que u_3 debe depender de la medición de las tres salidas. De esta forma, un modelo triangular para la planta esta dado por

$$\mathbf{G}_t(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4(s+3)}{(s+2)(s+5)} & 0 \\ \frac{2}{(s+2)(s+1)} & \frac{2}{(s+2)^2} & 0 \\ \frac{6(2s+1)}{(s+5)(s+4)} & \frac{4}{(s+3)^2} & \frac{8}{(s+2)(s+5)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

El modelo reducido triangular que se obtiene puede ser utilizado para diseñar un controlador sencillo de estructura triangular y que, además, permita alcanzar error cero en estado estacionario para referencias constantes. Dicho controlador puede ser obtenido mediante el parámetro de Youla (Goodwin *et al.*, 2001):

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{G}_t(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -0,4167 & 1,0000 & 0 \\ 0,8333 & 0 & 0 \\ -0,3067 & -0,3750 & 1,2500 \end{bmatrix} \quad (20)$$

El parámetro $\mathbf{Q}(s)$ es el inverso exacto del modelo (triangular) de la planta a frecuencia cero, lo cual asegura integración en el controlador equivalente $\mathbf{C}_t(s)$ (Salgado, 2006). Este controlador se obtiene a partir de la relación

$$\mathbf{C}_t(s)^{-1} = \mathbf{Q}(s)^{-1} - \mathbf{G}_t(s) \quad (21)$$

El controlador obtenido (21) estabiliza la planta original (16) y también es triangular, dado que esta estructura se preserva bajo inversión. \square

Antes de pasar a la siguiente sección es importante enfatizar que el arreglo de ganancia relativa (RGA), la matriz de participación (MP) y otras herramientas similares permiten determinar las relaciones entrada-salida más significativas en sistemas multivariables. De esta forma, pueden usarse como criterio de selección de estructura del controlador. Sin embargo, el diseño mismo del controlador es, en general, un tema independiente al de selección estructural y puede resolverse con diversas metodologías.

3. LA MEDIDA DE INTERACCIÓN EN LOS DOMINIOS TEMPORAL Y FRECUENCIAL

En esta sección se presentan nuevas interpretaciones de la MP tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. La base para establecer esta relación está dada por la equivalencia entre la norma Hilbert-Schmidt-Hankel y ciertas integrales en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

La teoría detrás de la MP presentada en las secciones anteriores requiere una descripción en variables de estado del sistema multivariable. Sin embargo, tal como se demuestra en (Salgado y Conley, 2004) la MP es independiente del modelo de estado particular utilizado para calcular los Gramianos. Esta observación sugiere la existencia de una relación directa entre la MP y alguna caracterización de entrada a salida del sistema. En efecto, el siguiente lema muestra que esta relación existe y se establece mediante la norma Hilbert-Schmidt-Hankel (HSH) (Hanzon, 1992).

Lema 1. Considere un sistema multivariable estable, con matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$, cuyos subsistemas elementales $G_{ij}(s)$ son estrictamente propios. Entonces, el (i, j) -ésimo elemento de la Matriz de Participación definida en (7) puede ser expresado mediante

$$\phi_{ij} = \frac{\|G_{ij}(s)\|_{HSH}^2}{\|\mathbf{G}(s)\|_{HSH}^2} \quad (22)$$

en que $\|\cdot\|_{HSH}$ denota la norma Hilbert-Schmidt-Hankel (Hanzon, 1992).

Demostración: La norma Hilbert-Schmidt-Hankel de la función de transferencia $G_{i,j}$, se define como (Hanzon, 1992):

$$\|G_{ij}(s)\|_{HSH}^2 = \text{traza } \mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i \quad (23)$$

El resultado se obtiene entonces a partir de la definición de la MP en (7). \square

A continuación se presenta el resultado central de este artículo: la interpretación de la MP en el dominio del tiempo y la frecuencia.

Teorema 1. Considere un sistema multivariable estable con matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$, cuyos subsistemas elementales $G_{ij}(s)$ son estrictamente propios y cuya respuesta a impulso es $h_{ij}(t)$. Entonces, una descripción alternativa de cada elemento de la Matriz de Participación (7) está dada, en el dominio del tiempo, por

$$\phi_{ij} = \frac{\int_0^{\infty} t h_{ij}(t)^2 dt}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \int_0^{\infty} t h_{ij}(t)^2 dt} \quad (24)$$

mientras que, en el dominio de la frecuencia, está dada por

$$\phi_{ij} = \frac{\int_0^{\infty} f_{ij}(\omega) d\omega}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \int_0^{\infty} f_{ij}(\omega) d\omega} \quad (25)$$

en que

$$f_{ij}(\omega) = |G_{ij}(j\omega)|^2 \frac{d\angle G_{ij}(j\omega)}{d\omega} \quad (26)$$

Demostración: El resultado se obtiene observando que, para todo sistema lineal escalar, estable, con función de transferencia estrictamente propia $H(s)$, y con respuesta a impulso $h(t)$, la norma HSH puede ser expresada, en el dominio del tiempo, por

$$\|H(s)\|_{HSH}^2 = \int_0^{\infty} t h(t)^2 dt \quad (27)$$

mientras que, utilizando la identidad de Parseval, en el dominio de la frecuencia, se puede expresar por

$$\|H(s)\|_{HSH}^2 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} d\omega \quad (28)$$

donde $\theta(\omega)$ es el ángulo de fase de $H(j\omega)$ (Hanzon, 1992).

Las ecuaciones (24)–(26) se obtienen de la expresión de los elementos de la MP (22) y observando que, a partir de (7)–(9), se tiene que

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{HSH}^2 = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \|G_{ij}(s)\|_{HSH}^2 \quad (29)$$

□

El Teorema 1 entrega una mayor base conceptual a la MP como medida de interacción. De hecho, permite interpretar y analizar esta matriz en los dominios del tiempo y de la frecuencia. En particular, cuando se utiliza la interpretación en el dominio temporal, es posible apreciar mejor el impacto de ciertas características dinámicas en la medida de interacción. El Cuadro 1 muestra la expresión obtenida para traza $\mathbf{P}_j \mathbf{Q}_i$ en el caso de algunos subsistemas elementales.

La segunda columna del Cuadro 1 ha sido obtenida analíticamente a partir de (27). En la última columna de dicho cuadro se indica cuáles de las características estructurales del subsistema elemental hacen que dicho término aumente su ponderación relativa y, de esta forma, sea más relevante para ser incluido en un modelo reducido de la planta. Las funciones de transferencia consideradas en el Cuadro 1 pueden parecer exageradamente

simples, sin embargo, al ser combinadas son suficientes para obtener la MP correspondiente a gran variedad de modelos multivariables.

La interpretación temporal de la MP en (24) es utilizada más adelante, en la Sección 4, para obtener una estimación *empírica* de la matriz a partir de datos de entrada y salida del proceso.

La relación en el dominio de la frecuencia que se muestra en (28) ha sido usada en (Hanzon, 1992) para relacionar la norma HSH de una función de transferencia $H(s)$ racional, estable y propia, con el área encerrada por su diagrama polar. Esta equivalencia permite estimar la MP usando valores de la respuesta en frecuencia de la planta, haciendo que no sea necesario tener un modelo analítico del sistema a controlar. Esta equivalencia también puede ser usada para realizar un análisis conceptual de las interacciones dinámicas del sistema tal como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2. Sea $H(s)$ una función de transferencia racional, estrictamente propia y estable, con m ceros reales de fase no mínima $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. La función de transferencia $H(s)$ puede expresarse como

$$H(s) = M(s)B_c(s) \quad (30)$$

donde $B_c(s)$ es el producto Blaschke (Serón *et al.*, 1997) asociado a los ceros de fase no mínima de $H(s)$ y $M(s)$ es una función de transferencia estable, propia y de fase mínima, tal que $|H(j\omega)| = |M(j\omega)|$. Entonces, se tiene que

$$\|H(s)\|_{HSH}^2 = \|M(s)\|_{HSH}^2 + \sum_{\ell=1}^m F(c_\ell) \quad (31)$$

donde

$$F(c_\ell) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|M(jc_\ell \nu)|^2}{1 + \nu^2} d\nu \quad (32)$$

Demostración: En primer lugar, se observa que

$$\angle H(j\omega) = \theta(\omega) = \angle M(j\omega) + \vartheta(\omega) \quad (33)$$

donde $\vartheta(\omega) = \angle B_c(j\omega)$, con

$$\vartheta(\omega) = -2 \sum_{\ell=1}^m \arctan\left(\frac{\omega}{c_\ell}\right) \quad (34)$$

Entonces, el resultado se obtiene reemplazando en (28) donde se cambia la variable de integración. □

El Lema 2 muestra que la presencia de ceros de fase no mínima aumenta el *peso relativo* de un término de la matriz de transferencia cuando se aplica la medida de interacción al modelo multivariable completo. Adicionalmente, del resultado obtenido es posible observar que estos ceros de fase no mínima tendrán poca influencia en la medida de interacción cuando son *grandes* en comparación con el ancho de banda del sistema. Sin embargo, cuando estos ceros son *pequeños* respecto al ancho de banda del sistema, tendrán gran impacto en la medida de interacción.

Nota 3. La interpretación frecuencial de la MP puede ser usada para estimar empíricamente esta matriz a partir de datos experimentales de la respuesta en frecuencia del sistema, tal como se ilustra en la Sección 4. Un ejemplo de esta situación aparece en el modelado y control de estructuras flexibles (Moheimani y Vautier, 2005). □

Nota 4. Los resultados presentados en este trabajo se han restringido a sistemas de tiempo continuo, sin embargo, es posible

$G_{ij}(s)$	$\ G_{ij}(s)\ _{HSH}^2$	Condición para relevancia
$K \frac{1}{s+1}$	$\frac{K^2}{4}$	Mayor ganancia a continua
$\frac{1}{(s+1)(\gamma s+1)}$	$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} \right)$	γ cercano a 1
$\frac{1}{s^2 + \alpha s + 1}$	$\frac{2 + \alpha^2}{4\alpha^2}$	$\alpha \in \mathbb{R}^+$ pequeña
$\frac{\beta s + 1}{s^2 + \alpha s + 1}$	$\frac{2 + \alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta}{4\alpha^2}$	$ \beta \gg \alpha > 0, \beta < 0$
$\frac{\beta s + 1}{(\gamma s + 1)(s + 1)}$	$\frac{(\beta - \gamma)^2 + (\beta - 1)^2 + 4\gamma}{4(1 + \gamma)^2}$	$ \beta \gg \gamma > 0, \beta < 0$

Cuadro 1. Controlabilidad y observabilidad combinada para subsistemas elementales ($\alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^+, K \in \mathbb{R}$)

construir interpretaciones similares para sistemas de tiempo discreto tanto en el dominio temporal como frecuencial. En particular, dada una función de transferencia de tiempo discreto $V(z)$, estable y estrictamente propia, con respuesta a impulso $v(k)$, se tiene que

$$\|V(z)\|_{HSH}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k v(k)^2 \quad (35)$$

y

$$\|V(z)\|_{HSH}^2 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |V(e^{j\omega})|^2 \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} d\omega \quad (36)$$

en que $\theta(\omega)$ es el ángulo de fase de $V(e^{j\omega})$. \square

4. ESTIMACIÓN EMPÍRICA DE LA MATRIZ DE PARTICIPACIÓN

En esta sección se muestra como es posible utilizar las interpretaciones de la MP en el dominio del tiempo y la frecuencia para estimarla a partir de datos de entrada y salida de la planta.

Para obtener una estimación empírica de la MP asociada a un sistema de tiempo continuo, es necesario considerar su modelo muestreado asociado pues inevitablemente los datos de entrada y salida de la planta están dados en forma de muestras tomadas en instantes de tiempo definidos.

Nota 5. El efecto de calcular la MP a partir del modelo muestreado asociado a un sistema de tiempo continuo ha sido considerado en (Salgado y Rojas, 2005). En dicho trabajo, se muestra que para períodos de muestreo *pequeños*, la MP del modelo muestreado es una buena aproximación de la matriz correspondiente al sistema continuo original. \square

La MP puede ser estimada empíricamente aplicando métodos de identificación no paramétrica. Estos métodos permiten estimar la respuesta a impulso o bien su respuesta en frecuencia a partir de datos de entrada y salida del sistema (Ljung, 1999). De esta forma, una estimación de la MP puede obtenerse:

- A partir de una estimación de la respuesta a impulso y de la interpretación temporal (35), o bien
- A partir de una estimación de la respuesta en frecuencia y de la interpretación frecuencial (36).

Más aún, para algunos sistemas puede disponerse directamente de datos experimentales en dominio de la frecuencia (ver, por ejemplo, (Moheimani y Vautier, 2005)). Por tanto, la MP puede obtenerse usando directamente la interpretación frecuencial.

Nota 6. La estimación empírica propuesta para la MP permite calcular esta medida de interacción sin requerir la identificación paramétrica de un modelo multivariable (matriz de transferencia o modelo en variables de estado) para luego, a partir de éste, calcular los gramianos del sistema y la MP asociada. En particular, los métodos de identificación paramétrica requieren la selección de orden y estructura. \square

La respuesta a impulso de un sistema puede ser estimada usando como modelo un filtro de respuesta a impulso finita (filtro FIR, *Finite Impulse Response*) (Ljung, 1999):

$$y(kh) = B_0 u(kh) + B_1 u(kh - h) + \dots + B_{N_{max}} u(kh - N_{max}h) \quad (37)$$

en que h es el período de muestreo y los coeficientes de las matrices B_k pueden ser estimados mediante mínimos cuadrados. Es importante hacer notar que estos coeficientes convergen, cuando N_{max} tiende a infinito, a la respuesta a impulso de tiempo discreto del sistema muestreado:

$$B_k = [\hat{h}_{ij}(k)]_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, p} \quad (38)$$

Una estimación empírica de la MP puede ser entonces obtenida mediante la expresión:

$$\hat{\Phi} = \frac{[\varphi_{ij}]}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \varphi_{ij}} \quad (39)$$

en que φ_{ij} es una estimación de la norma HSH del (i, j) -ésimo canal de la planta:

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=0}^{N_{max}} k (\hat{h}_{ij}(k))^2 \quad (40)$$

Existen diversos métodos para estimar la respuesta en frecuencia de un sistema. Por ejemplo, es posible obtenerla mediante análisis espectral a partir del espectro de la entrada y del espectro cruzado de entrada-salida¹:

$$\hat{G}(e^{j\omega h}) = \Phi_{yu}(e^{j\omega h}) \cdot [\Phi_u(e^{j\omega h})]^{-1} \quad (41)$$

Alternativamente, la respuesta en frecuencia puede obtenerse a partir del mismo modelo FIR (37) utilizado para estimar la respuesta a impulso:

$$y(kh) = \sum_{\ell=0}^{N_{max}} B_{\ell} q^{-\ell} u(kh) \quad (42)$$

¹ En este caso, $\Phi(e^{j\omega h})$ denota el espectro, es decir, la transformada de Fourier de la función de correlación respectiva

Por tanto,

$$\hat{G}(e^{j\omega h}) = \sum_{\ell=0}^{N_{max}} B_{\ell} e^{-j\omega h \ell} \quad (43)$$

De esta forma, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema $\hat{G}(e^{j\omega h})$, la estimación de la MP se puede obtener como en (39). En este caso, cada elemento φ_{ij} es una estimación de la norma HSH de cada canal de la planta obtenida a partir de su interpretación frecuencial (36). Si recordamos que esta interpretación de la norma se relaciona con el área encerrada por el diagrama de Nyquist de la respuesta en frecuencia (Hanzon, 1992), entonces podemos aproximar (36) por la siguiente suma de áreas de triángulos:

$$\varphi_{ij} = \|G_{ij}(e^{j\omega h})\|_{HSH} = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{\ell} \quad (44)$$

en que

$$A_{\ell} = \frac{1}{2} |G_{ij}(e^{j\omega_{\ell} h})| |G_{ij}(e^{j\omega_{\ell+1} h})| \times \sin |\angle G_{ij}(e^{j\omega_{\ell} h}) - \angle G_{ij}(e^{j\omega_{\ell+1} h})| \quad (45)$$

en que ω_{ℓ} , $\ell = 1, \dots, n$ son las frecuencias a las cuales se tiene una estimación de la respuesta en frecuencia.

En el siguiente ejemplo ilustramos la estimación empírica de la MP mediante las estrategias propuestas, en el dominio temporal y frecuencial, para el caso de un sistema de 2×2 .

Ejemplo 2. Considere el sistema multivariable definido en tiempo discreto

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,3}{z-0,8} & \frac{0,35}{z-0,7} \\ 0,25 & \frac{0,5(z-0,9)}{(z-0,7)(z-0,85)} \end{bmatrix} \quad (46)$$

La MP asociada, obtenida calculando los gramianos correspondientes a partir del modelo de estado asociado, está dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,2940 & 0,1994 \\ 0,2041 & 0,3025 \end{bmatrix} \quad (47)$$

El sistema multivariable ha sido simulado, obteniendo $N = 1000$ pares de datos de entrada y salida, capturados durante 100[s]. La entrada es generada a partir de una secuencia aleatoria, de media cero, distribución Gaussiana y matriz de covarianza $\Sigma_u = 4I_2$.

La medición de la salida del sistema es muestreada en presencia de ruido, el cual también es una secuencia aleatoria, de media cero y distribución Gaussiana, y matriz de covarianza $\Sigma_m = 10^{-2}I_2$.

En el dominio del tiempo, los coeficientes de la respuesta a impulso del sistema son estimados usando un modelo FIR (37) de orden $N_{max} = 50$, realizando 100 simulaciones Monte-Carlo para obtener una estimación de la MP usando (39). Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 1, en la cual se muestra el valor verdadero de los coeficientes, el valor estimado en cada una de las simulaciones y su promedio. En particular, el valor medio de los coeficientes estimados es

$$\hat{\Phi}_T = \begin{bmatrix} 0,2931 & 0,1998 \\ 0,2046 & 0,3025 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Se ha obtenido una estimación de la respuesta en frecuencia a partir de la ecuación (43). Para cada una de las 100 simulacio-

nes Monte Carlo se ha usado la interpretación frecuencial de la MP para obtener una estimación empírica según las ecuaciones (39), (44) y (45). Los valores medios obtenidos son:

$$\hat{\Phi}_F = \begin{bmatrix} 0,2927 & 0,1997 \\ 0,2041 & 0,3035 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Los resultados de simulación indican que el error relativo en la estimación de la MP es mayor en aquellos canales de la planta que presentan menor interacción entre entrada y salida. Este hecho puede explicarse en términos de la relación señal/ruido en la medición de las salidas, que será menor precisamente en los canales con menor interacción. De hecho, al eliminar el ruido de medición de las salidas, se obtiene:

$$\hat{\Phi}_T = \begin{bmatrix} 0,2940 & 0,1994 \\ 0,2041 & 0,3025 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Los resultados obtenidos en (50) corresponden, de hecho, a los valores *verdaderos* de los coeficientes (el error obtenido es del orden de 10^{-6}).

Resultados de simulación muestran que, como sería razonable suponer, el efecto del ruido de medición puede ser considerablemente reducido ya sea aumentando la energía de la señal de entrada, o bien, considerando una secuencia más larga de datos para estimar la MP. \square

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una nueva interpretación de la Matriz de Participación en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Esta matriz, basada en Gramianos, ha sido previamente propuesta como una medida de interacción en sistemas multivariables, lineales y estables.

La interpretación temporal presentada en el artículo se basa en una relación clave entre los valores singulares de Hankel del sistema, a través de la norma Hilbert-Schmidt-Hankel, y la integral cuadrática de la respuesta a impulso del sistema ponderada en el tiempo. Asimismo, esta interpretación ha sido extendida al dominio de la frecuencia, haciendo uso de la identidad de Parseval.

Los resultados obtenidos permiten apreciar mejor el impacto de características dinámicas del sistema multivariables y sus subsistemas elementales, tales como ceros de fase no mínima y modos resonantes, en la medida de interacción entre entradas y salidas.

Las interpretaciones en el tiempo y en la frecuencia de la matriz de participación permiten aplicar esta medida de interacción directamente a partir de datos experimentales de entrada y salida de la planta, utilizando métodos de identificación no paramétrica, tanto en el tiempo como en la frecuencia. Este hecho permite extender el uso de esta herramienta como una medida de interacción empírica, que no requiere contar con la matriz de transferencia o el modelo en variables de estado del sistema.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha contado con el apoyo de la Universidad Técnica Federico Santa María y al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT - Chile), a través de los proyectos 1080274 y 11070158.

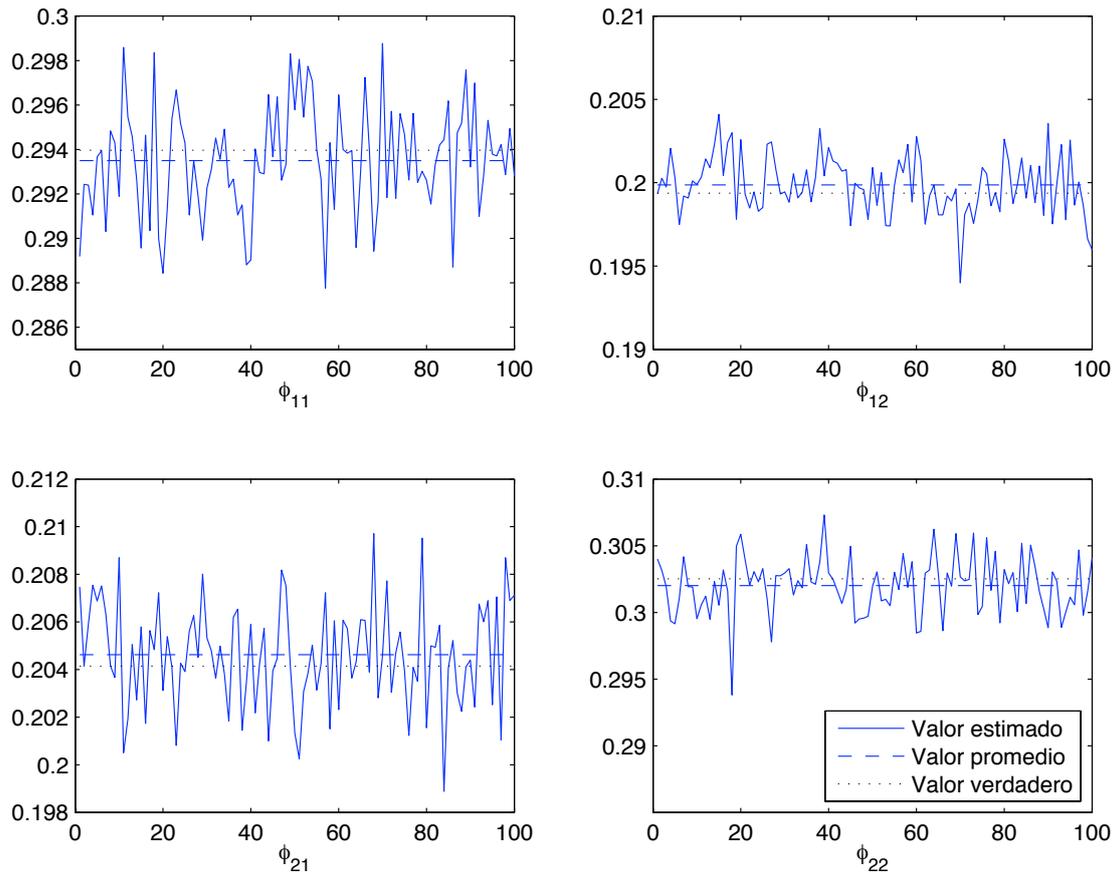


Figura 1. Estimación de los elementos de la MP para el Ejemplo 2

REFERENCIAS

- Allemandou, P. (1966). Low-pass filters approximating - in modulus and phase - the exponential function. *IEEE Transactions on Circuit Theory* **13**(3), 298–301.
- Bristol, E. H. (1978). Recent results on interaction in multivariable process control. En: *71^o AICHE Conference*, Miami, EE. UU.
- Bristol, E.H. (1966). On a new measure of interaction for multivariable process control. *Automatica* pp. 123–134.
- Chiu, Min-Sen y Yaman Arkun (1991). A new result on relative gain array, Niederlinski index and decentralized stability condition: 2×2 plant case. *Automatica* **27**(2), 419–421.
- Gagnon, Eric, André Desbiens y André Pomerleau (1999). Selection of pairing and constrained robust decentralized PI controllers. En: *American Control Conference*. San Diego, EE.UU.
- Glad, T. y L. Ljung (2000). *Control Theory. Multivariable and Nonlinear Methods*. Taylor and Francis. Londres, Reino Unido.
- Glover, K. (1984). All optimal hankel norm approximations of linear multivariable systems and their l^∞ -error bound. *International Journal of Control* **39**(6), 1115–1193.
- Goodwin, G.C., S.F. Graebe y M.E. Salgado (2001). *Control System Design*. Prentice Hall. Nueva Jersey, EE. UU.
- Grosdidier, P. y M. Morari (1986). Interaction measures for systems under decentralized control. *Automatica* **22**(3), 309–319.
- Hanzon, B. (1992). The area enclosed by the (oriented) Nyquist diagram and the Hilbert-Schmidt-Hankel norm of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(6), 835–839.
- He, M.J., W.J. Cai y B.F. Wu (2006). Control structure selection based on relative interaction decomposition. *International Journal of Control* **79**(10), 1285–1296.
- Huang, H.-P., M. Ohshima y I. Hashimoto (1994). Dynamic interaction and multiloop control system design. *Journal of Process Control* **4**(1), 15–27.
- Kariwala, V. y M. Hovd (2006). Relative Gain Array: Common misconceptions and clarifications. En: *7th Symposium on Computer Process Control*. Lake Louise, Canadá.
- Kwakernaak, H. y R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience. Nueva York.
- Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the User*. 2nd ed.. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Maciejowski, J. M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley. Wokingham, Inglaterra.
- Moheimani, S.O.R. y B.J.G. Vautier (2005). Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **13**(6), 1021–1035.
- Niederlinski, Antoni (1971). A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems. *Automatica* **7**, 691–701.
- Salgado, M.E. (2006). Inversión, un concepto unificador en la enseñanza del control automático. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* **3**(1), 5–15.
- Salgado, M.E. y A. Conley (2004). MIMO interaction measure and controller structure selection. *International Journal of Control* **77**(4), 367–383.

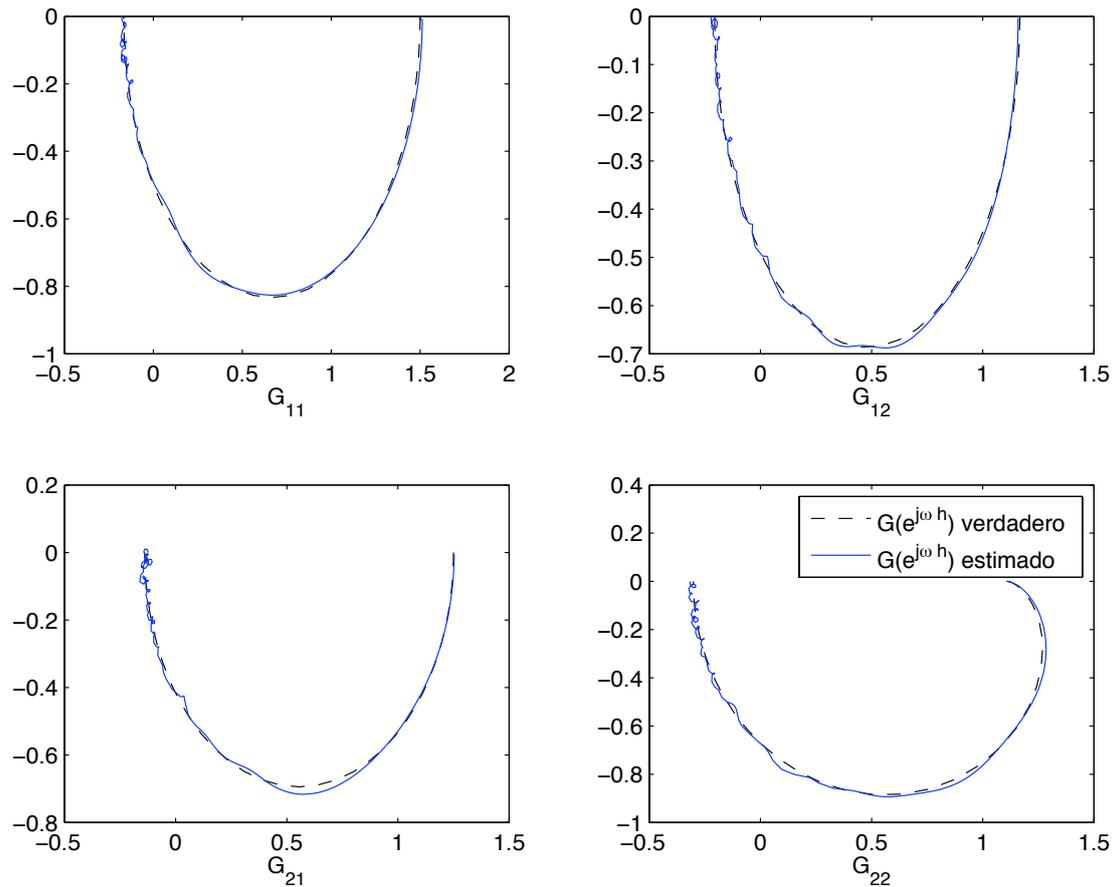


Figura 2. Respuesta en frecuencia del sistema verdadero y respuesta en frecuencia estimada para el Ejemplo 2

- Salgado, M.E. y D. Rojas (2005). MIMO interactions in sampled data systems. En: *16th IFAC World Congress*. Praga, República Checa.
- Salgado, M.E. y J.I. Yuz (2007). Mixed domain analysis of MIMO dynamic interactions. En: *IEEE International Conference On Networking, Sensing and Control - ICNSC07*. Londres, Reino Unido.
- Samuelsson, P., B. Halvarsson y B. Carlsson (2005). Interaction analysis and control structure selection in a wastewater treatment plant model. *IEEE Transactions On Control Systems Technology* **13**(6), 955–964.
- Serón, M.M., J.H. Braslavsky y G.C. Goodwin (1997). *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer. Londres.
- Skogestad, S. y M. Morari (1987). Implications of large RGA elements on control performance. *Industrial Engineering in Chemical Research* **26**, 2323–2330.
- van de Wal, M. y B. de Jager (2001). A review of methods for input/output selection. *Automatica* **37**(4), 487–510.
- Weinmann, A. (2007). Robustness and dynamic interaction. *Cybernetics and Systems* **38**(3), 229–248.
- Witcher, M. F. y T. J. McAvoy (1977). Interacting control systems: Steady-state and dynamic measurement of interaction. *ISA Transactions* **16**(3), 35–41.
- Wittenmark, B. y M.E. Salgado (2002). Hankel norm based interaction measure for input-output pairing. En: *15th IFAC World Congress Conference Proceedings*. Barcelona, España.
- Zhou, K., G. Salomon y E. Wu (1999). Balanced realization and model reduction for unstable systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **9**, 183–198.
- Zhu, Zhong-Xiang (1996). Variable pairing selection based on individual and overall interaction measures. *Industrial Engineering in Chemical Research* **35**, 4091–4099.